PRINCIPIA

Princípios Matemáticos de Filosofia Natural

LIVROS II E III

O SISTEMA DO MUNDO



Isaac Newton

edusp

» PRINCIPIA

» O SISTEMA DO MUNDO

edusp 50 anos

USP UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor João Grandino Rodas
Vice-reitor Hélio Nogueira da Cruz

edusp EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Diretor-presidente Plinio Martins Filho

COMISSÃO EDITORIAL
Presidente Rubens Ricupero
Vice-presidente Carlos Alberto Barbosa Dantas
Antonio Penteado Mendonça
Chester Luiz Galvão Cesar
Ivan Gilberto Sandoval Falleiros
Mary Macedo de Camargo Neves Lafer
Sedi Hirano

Editor-assistente Bruno Tenan
Chefe Téc. Div. Editorial Cristiane Silvestrin

Isaac Newton

» PRINCIPIA

Princípios Matemáticos de Filosofia Natural

Livro II
O Movimento dos Corpos
(em Meios com Resistência)

Tradução
André Koch Torres Assis

Livro III
O Sistema do Mundo
(Tratado Matematicamente)

Tradução
André Koch Torres Assis

» O SISTEMA DO MUNDO

Tradução
Fábio Duarte Joly

edusp

Copyright © by André Koch Torres Assis

Título do original:
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

Título do original em inglês:
Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy, and his System of the World

Traduzido a partir da edição da University of California Press (*Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy, and his System of the World*) feita por Andrew Motte a partir da edição latina, em 1729, revisada e acrescida de notas históricas por Florian Cajori, em 1934.

1ª edição 2008
1ª edição, 1ª reimpressão 2012

Ficha catalográfica elaborada pelo Departamento Técnico do Sistema Integrado de Bibliotecas da USP. Adaptada conforme normas da Edusp.

Newton, Isaac, 1642-1727.
Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural / Isaac Newton. – 1 ed. 1 reimpr. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2012.
448 p.; 18 x 25,5 cm.

Inclui apêndice histórico e explicativo.
Conteúdo: Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência) / tradução André Koch Torres Assis. Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente) / tradução André Koch Torres Assis. O Sistema do Mundo / tradução Fábio Duarte Joly.
ISBN 978-85-314-1089-5

1. Física (História). 2. Física teórica. I. Assis, André Koch Torres. II. Joly, Fábio Duarte. III. Título. IV. Título: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. V. O Movimentos dos Corpos (em Meios com Resistência). VI. O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). VII. O Sistema do Mundo.

CDD-530.09

Direitos em língua portuguesa reservados à

Edusp – Editora da Universidade de São Paulo
Av. Corifeu de Azevedo Marques, 1975, térreo
05581-001 – Butantã – São Paulo – SP – Brasil
Divisão Comercial: Tel. (11) 3091-4008 / 3091-4150
SAC (11) 3091-2911 – Fax (11) 3091-4151
www.edusp.com.br – e-mail: edusp@usp.br

Printed in Brazil 2012

Foi feito o depósito legal

» SUMÁRIO

Principia

Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência)

Seção I – O movimento dos corpos que são resistidos na razão da velocidade 11
Seção II – O movimento dos corpos que são resistidos como o quadrado de suas velocidades 23
Seção III – O movimento de corpos que são resistidos parcialmente na razão das velocidades e parcialmente como o quadrado da mesma razão 51
Seção IV – O movimento circular dos corpos em meios com resistência 61
Seção V – A densidade e compressão dos fluidos; hidrostática 71
Seção VI – O movimento e a resistência dos corpos pendulares 85
Seção VII – O movimento dos fluidos e a resistência feita aos corpos lançados 109
Seção VIII – O movimento propagado através de fluidos 149
Seção IX – O movimento de circular dos fluidos 169

LIVRO III: O SISTEMA DO MUNDO (TRATADO MATEMATICAMENTE)

Regras de Raciocício em Filosofia 185
Fenômenos 189
Proposições 195
O Movimento dos Nós da Lua 251
Escólio Geral 327

O SISTEMA DO MUNDO

O Sistema do Mundo 333

Apêndice Histórico e Explicativo – Por Florian Cajori 411

» LIVRO II

O MOVIMENTO DOS CORPOS (EM MEIOS COM RESISTÊNCIA)

TRADUÇÃO
André Koch Torres Assis

» SEÇÃO I

O movimento dos corpos que são resistidos na razão da velocidade

PROPOSIÇÃO I. TEOREMA I

Se um corpo é resistido na razão de sua velocidade, o movimento perdido pela resistência é como o espaço percorrido em seu movimento.

Pois como o movimento perdido em cada intervalo igual de tempo é como a velocidade, isto é, como o pequeno aumento de espaço percorrido, então, por composição, o movimento perdido no tempo total será como todo o espaço percorrido. Q.E.D.

COROLÁRIO – Portanto, se o corpo, destituído de toda a gravidade, move-se apenas por sua força inata em espaços livres, e se for dado o movimento total no começo, e também o movimento que sobra após parte do caminho ter sido percorrido, também será dado todo o espaço que o corpo pode percorrer num tempo infinito. Pois este espaço estará para o espaço agora percorrido assim como todo o movimento no começo está para a parte perdida deste movimento.

LEMA I

Quantidades proporcionais às suas diferenças são continuamente proporcionais.

Seja

$$A : A - B = B : B - C = C : C - D = \text{etc.};$$

então, por subtração

$$A : B = B : C = C : D = \text{etc.}$$

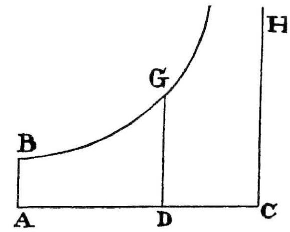
Q.E.D.

PROPOSIÇÃO II. TEOREMA II

Se um corpo é resistido na razão de sua velocidade, e move-se apenas por sua inércia através de um meio homogêneo, e os tempos forem considerados iguais, as velocidades no começo de cada um dos tempos estão numa progressão geométrica, e os espaços percorridos em cada um dos tempos são como as velocidades.

CASO 1 – Seja o tempo dividido em intervalos iguais. Se bem no começo de cada intervalo supormos a resistência agindo com um único impulso que é como a velocidade, a diminuição da velocidade em cada um dos intervalos de tempo será como a mesma velocidade. Portanto, as velocidades são proporcionais às suas diferenças e, portanto, (pelo Lema 1, Livro II) continuamente proporcionais. Portanto, se de um número igual de intervalos forem compostas quaisquer porções iguais de tempo, as velocidades nos inícios destes tempos serão como os termos numa progressão contínua, que são tomados por saltos, omitindo em todo lugar um número igual de termos intermediários. Mas as razões destes termos são compostas das razões iguais dos termos intermediários repetidos igualmente, e portanto são iguais. Portanto, as velocidades, sendo proporcionais a esses termos, estão numa progressão geométrica. Sejam diminuídos esses intervalos iguais de tempo, e seus números aumentados *in infinitum*, de tal forma que o impulso da resistência possa tornar-se contínuo; e as velocidades nos inícios dos tempos iguais, sempre continuamente proporcionais, também serão, neste caso, continuamente proporcionais. Q.E.D.[1]

1. Ver Apêndice, Nota 1



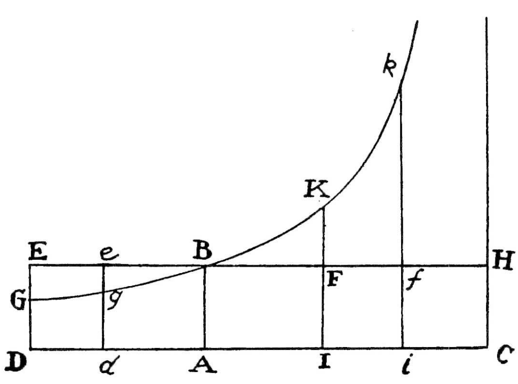
CASO 2 – E, por divisão, as diferenças das velocidades, isto é, as partes das velocidades perdidas em cada um dos tempos, são como os todos; mas os espaços percorridos em cada um dos tempos são como as partes perdidas das velocidades (pela Proposição 1, Livro I), e portanto também são como os todos. Q.E.D.

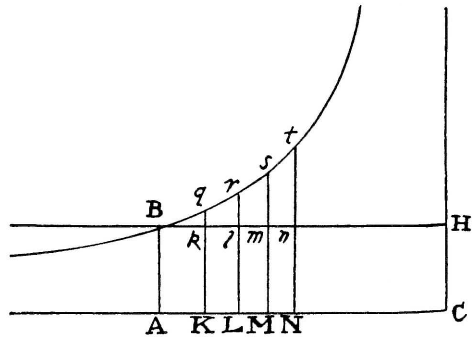
COROLÁRIO – Portanto, se for descrita a hipérbole BG com as assíntotas retangulares AC e CH, e se traçam AB e DG perpendiculares à assíntota AC, e se forem expressas por qualquer linha AC a velocidade do corpo e a resistência do meio bem no começo do movimento, e pela linha indefinida DC após algum tempo ter transcorrido, o tempo pode ser expresso pela área ABGD, e o espaço percorrido neste tempo pela linha AD. Pois se esta área for aumentada uniformemente da mesma maneira que o tempo, pelo movimento do ponto D, a linha reta DC vai diminuir numa razão geométrica da mesma maneira que a velocidade; e as partes da linha reta AC, descritas em tempos iguais, vão decrescer na mesma razão.

PROPOSIÇÃO III. PROBLEMA I

Definir o movimento de um corpo que, num meio homogêneo, sobe ou desce em uma linha reta, sendo resistido na razão de sua velocidade e submetido a uma força uniforme de gravidade.

Subindo o corpo, represente-se a gravidade por qualquer retângulo dado BACH; e a resistência do meio, no início da subida, pelo retângulo BADE, tomado no lado contrário da linha reta AB. Descreva uma hipérbole





através do ponto B, com as assíntotas retangulares AC e CH, cortando as perpendiculares DE e *de* em G e *g*; e no tempo DG*gd* o corpo subindo vai descrever o espaço EG*ge*; no tempo DGBA, o espaço de toda a subida EGB; no tempo ABKI, o espaço de descida BFK; e no tempo IK*ki* o espaço de descida KF*fk*; e as velocidades dos corpos (proporcionais à resistência do meio) nestes períodos de tempo serão ABED, AB*ed*, zero, ABFI e AB*fi*, respectivamente; e a maior velocidade que o corpo pode adquirir ao descer será BACH.

Pois seja o retângulo BACH decomposto em inumeráveis retângulos A*k*, K*l*, L*m*, M*n* etc., os quais serão como os incrementos das velocidades produzidas em tantos tempos iguais; então zero, A*k*, A*l*, A*m*, A*n* etc., serão como todas as velocidades e, portanto, (por suposição) como as resistências do meio no início de cada um dos tempos iguais. Faça AC para AK, ou ABHC para AB*k*K, como a força da gravidade para a resistência no início do segundo tempo; então subtraia da força da gravidade as resistências, e ABHC, K*k*HC, L*l*HC, M*m*HC etc., serão como as forças absolutas que atuam sobre o corpo no início de cada um dos tempos e, portanto, (pela Lei I) como os aumentos das velocidades, isto é, como os retângulos A*k*, K*l*, L*m*, M*n* etc. e, portanto, (pelo Lema 1, Livro II) numa progressão geométrica. Portanto, se as linhas retas K*k*, L*l*, M*m*, N*n* etc., são prolongadas de tal forma a encontrar a hipérbole em *q*, *r*, *s*, *t* etc., as áreas AB*q*K, K*qr*L, L*rs*M, M*st*N etc., serão iguais e, portanto, análogas aos tempos iguais e às forças iguais da gravidade. Mas a área AB*q*K (pelo Corolário III, Lemas 7 e 8, Livro I) está para a área B*kq* assim como K*q* está para *kq*/2, ou AC para AK/2, isto é, como a força da gravidade para a resistência no meio do primeiro tempo. E por um raciocínio similar, as áreas *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t* etc., estão para as áreas *qklr*, *rlms*, *smnt* etc., assim como as forças de gravidade para as resistências no meio do segundo, terceiro, quarto tempo, e assim por diante. Portanto, como as áreas iguais BAK*q*, *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t* etc., são análogas às forças gravitacionais, as áreas B*kq*, *qklr*, *rlms*, *smnt* etc. serão análogas às resistências no meio de

cada um dos tempos, isto é (por suposição), às velocidades, e portanto, aos espaços percorridos. Tome as somas das quantidades análogas, e as áreas B*kq*, B*lr*, B*ms*, B*nt* etc., serão análogas aos espaços totais percorridos; e também as áreas ABqK, ABrL, ABsM, ABtN etc., aos tempos. Portanto, o corpo, ao descer, vai descrever em qualquer tempo ABrL o espaço B*lr*, e no tempo L*rt*N o espaço *rlnt*. Q.E.D. E uma demonstração similar é válida no movimento ascendente.

Corolário I – Portanto, a maior velocidade que o corpo pode adquirir ao cair está para a velocidade adquirida em qualquer tempo, como a força dada da gravidade que age continuamente sobre ele está para a força de resistência que se opõe a ele no final desse tempo.

Corolário II – Mas sendo o tempo aumentado numa progressão aritmética, a soma da maior velocidade e da velocidade na subida, e também a diferença entre elas na descida, decresce numa progressão geométrica.

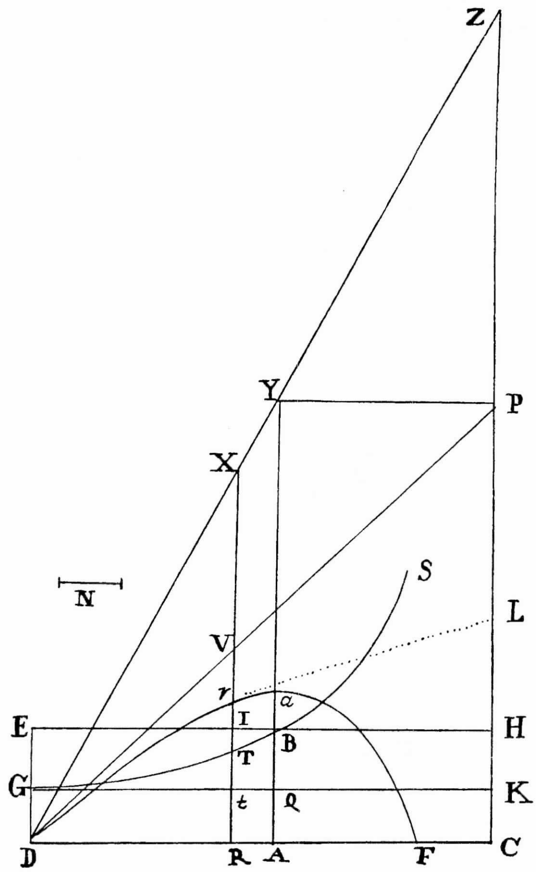
Corolário III – Também as diferenças dos espaços, que são percorridos em diferenças iguais de tempos, decrescem na mesma progressão geométrica.

Corolário IV – O espaço percorrido pelo corpo é a diferença de dois espaços, dos quais um é como o tempo tomado a partir do início da descida, e o outro como a velocidade; [espaços] estes que também são iguais entre si no início da descida.

Proposição IV. Problema II

Supondo ser uniforme a força da gravidade em qualquer meio homogêneo e que tenda perpendicularmente ao plano do horizonte, definir o movimento de um projétil neste meio, supondo que sofre uma resistência proporcional à sua velocidade.

Suponha que o projétil inicie seu movimento a partir de qualquer lugar D na direção de qualquer linha reta DP, e que sua velocidade no início do movimento seja representada pelo comprimento DP. A partir do ponto P, trace a perpendicular PC sobre a linha horizontal DC e corte DC em A, de tal forma que DA possa estar para AC assim como a componente vertical da resistência do meio, surgindo do movimento para cima no início, está para a força da gravidade; ou (o que dá no mesmo) de tal forma que o retângulo sob DA e DP possa estar para aquele sob AC e CP, como toda a resistência no início do movimento está para a força da gravidade. Com as assín-



totas DC e CP descreva uma hipérbole qualquer GTBS cortando as perpendiculares DG e AB em G e B; complete o paralelogramo DGKC, e suponha que seu lado GK corte AB em Q. Tome uma linha N na mesma razão para QB que DC tem para CP; e, a partir de qualquer ponto R da linha reta DC, levante RT perpendicular a ela, encontrando a hipérbole em T, e as linhas retas EH, GK, DP em I, *t*, e V; nesta perpendicular tome V*r* igual a *t*GT/N, ou, o que é a mesma coisa, tome R*r* igual a GTIE/N; e o projétil vai chegar no ponto *r* no tempo DRTG, descrevendo a linha curva D*ra*F, o lugar do ponto *r;* de lá ele vai atingir sua altura máxima *a* na perpendicular AB; e após isto vai se aproximar sempre da assíntota PC. E sua velocidade em qualquer ponto *r* estará como a tangente *r*L para a curva. Q.E.I.

Pois

$$N : QB = DC : CP = DR : RV,$$

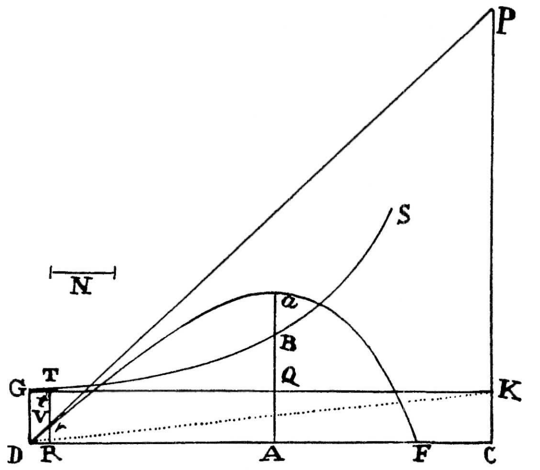
e, portanto, RV é igual a $\frac{DR \,.\, QB}{N}$, e R*r* (isto é, RV - V*r*, ou $\frac{DR \,.\, QB - tGT}{N}$) é

igual a $\frac{DR.AB - RDGT}{N}$. Seja agora o tempo representado pela área RDGT, e (pelas Leis, Coroláro II) seja o movimento do corpo decomposto em dois outros, um ascendente, o outro lateral. E como a resistência é como o movimento, seja ela também decomposta em duas partes proporcionais e contrárias às partes do movimento: e, portanto, o movimento descrito pelo movimento lateral estará (pela Proposição 2, Livro II) como a linha DR, e a altura (pela Proposição 3, Livro II) como a área DRxAB – RDGT, isto é, como a linha R*r*. Porém, bem no início do movimento, a área RDGT é igual ao retângulo DRxAQ, e, portanto, esta linha R*r* (ou $\frac{DR.AB - DR.AQ}{N}$) estará então para DR como AB – AQ ou QB para N, isto é, como CP para DC; e, portanto, como o movimento para cima para o movimento ao longo do comprimento no início. Como, portanto, R*r* é sempre como a altura, e DR sempre como o comprimento, e R*r* está para DR no início como a altura para o comprimento, segue-se que R*r* está sempre para DR como a altura para o comprimento; e, portanto, que o corpo vai mover-se na linha D*ra*F, que é o lugar do ponto *r*. Q.E.D.

Corolário I – Assim, R*r* é igual a $\frac{DR.AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$; e, portanto, se RT for prolongado até X de tal forma que RX possa ser igual a $\frac{DR.AB}{N}$, isto é, se for completado o paralelogramo ACPY, e for descrita DY cortando CP em Z, e RT for prolongada até que encontre DY em X, X*r* será igual a $\frac{RDGT}{N}$ e, portanto, proporcional ao tempo.

Corolário II – Portanto, se forem tomadas numa progressão geométrica, inumeráveis linhas CR, ou, o que é o mesmo, inumeráveis linhas ZX, haverão tantas linhas X*r* numa progressão aritmética. Dessa forma, a curva D*ra*F é facilmente delineada pela tabela de logaritmos.

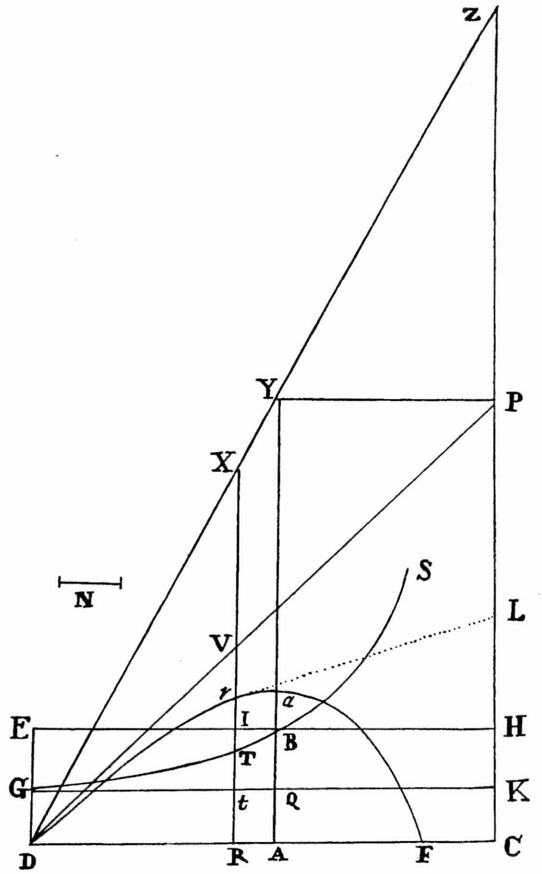
Corolário III – Se for construída uma parábola até o vértice D, e o diâmetro DG for prolongado para baixo, e seu *latus rectum* estiver para 2DP como toda a resistência no início do movimento para a força gravitacional, a velocidade com a qual o corpo tem de sair do lugar D, na direção da linha reta DP, de forma a descrever a curva D*ra*F em um meio com resistência uniforme, será a mesma que aquela com a qual ele tem de sair do mesmo ponto D na direção da mesma linha reta DP, de modo a descrever a parábola num meio sem resistência. Pois o *latus rectum* desta parábola, bem no início do movimento, é $\frac{DV^2}{Vr}$; e V*r* é $\frac{tGT}{N}$ ou $\frac{DR.Tt}{2N}$. Mas uma linha reta que,



se traçada, tocaria a hipérbole GTS em G, é paralela a DK e, portanto, Tt é $\frac{CK.DR}{DC}$, e N é $\frac{QB.DC}{CP}$. Assim, Vr é igual a $\frac{DR^2.CK.CP}{2DC^2.QB}$, isto é, (já que DR e DC, DV e DP são proporcionais), a $\frac{DV^2.CK.CP}{2DP^2.QB}$; e o *latus rectum* $\frac{DV^2}{Vr}$ torna-se $\frac{2DP^2.QB}{CK.CP}$, isto é (já que QB e CK, DA e AC são proporcionais), $\frac{2DP^2.DA}{AC.CP}$ e, portanto, está para 2DP como DP x DA está para CP x AC, isto é, como a resistência para a gravidade. Q.E.D.

COROLÁRIO IV – Assim, se um corpo for lançado de qualquer lugar D com uma dada velocidade na direção da linha reta DP dada por posição, e for dada a resistência do meio no início do movimento, pode ser encontrada a curva D*ra*F que este corpo vai descrever. Pois, sendo dada a velocidade, o *latus rectum* da parábola também é dado, como é bem conhecido. E tomando 2DP para este *latus rectum*, como a força da gravidade para a força de resistência, DP também é dado. Cortando então DC em A, de forma que CP x AC possa estar para DP x DA na mesma razão da gravidade para a resistência, o ponto A será dado. E, portanto, também é dada a curva D*ra*F.

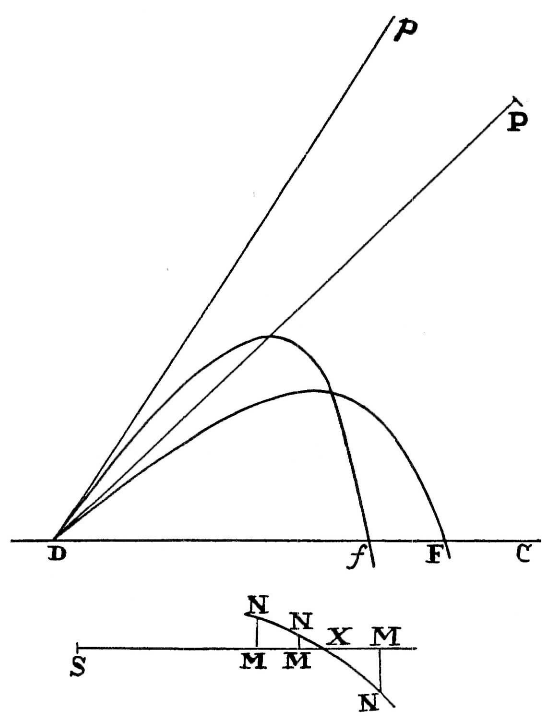
COROLÁRIO V – E, inversamente, se for dada a curva D*ra*F, serão dadas a velocidade do corpo e a resistência do meio em cada um dos lugares *r*. Pois, sendo dada a razão CPxAC para DP x DA, são dados a resistência do meio no início do movimento e o *latus rectum* da parábola e, portanto, também é dada a velocidade no início do movimento. Então, a partir do comprimento da tangente *r*L, é dada a velocidade proporcional a ele, e a resistência proporcional à velocidade em qualquer lugar *r*.



COROLÁRIO VI – Mas como o comprimento 2DP está para o *latus rectum* da parábola assim como a gravidade está para a resistência em D e, com a velocidade aumentada, a resistência é aumentada na mesma razão, mas o *latus rectum* da parábola é aumentado como o quadrado desta razão, é óbvio que o comprimento 2DP é aumentado apenas nesta razão simples e é, portanto, sempre proporcional à velocidade; nem será ele aumentado ou diminuído pela mudança do ângulo CDP, a não ser que a velocidade também seja alterada.

COROLÁRIO VII – Daqui segue-se o método de determinar, aproximadamente, a curva D*ra*F a partir dos fenômenos e, portanto, encontrando a resistência e a velocidade com as quais o corpo é lançado. Sejam dois corpos similares e iguais lançados com a mesma velocidade a partir do ponto D, em ângulos diferentes CDP e CD*p*; e sejam conhecidos os lugares F e *f* onde eles caem sobre o plano horizontal DC. Tomando então qualquer comprimento para DP ou D*p*, suponha a resistência em D estar para a gravidade

em qualquer razão, e seja esta razão representada por qualquer comprimento SM. Então, por cálculo, obtenha os comprimentos DF e D*f* a partir do comprimento assumido DP; e subtraia da razão $\frac{Ff}{DF}$, obtida por cálculo, a mesma razão obtida pelo experimento; e seja a diferença representada pela perpendicular MN. Repita o mesmo uma segunda e uma terceira vezes, assumindo sempre uma nova razão SM da resistência para a gravidade, e juntando uma nova diferença MN. Trace as diferenças positivas sobre um lado da linha reta SM, e as negativas sobre o outro lado e, através dos pontos N, N, N trace uma curva regular NNN, cortando a linha reta SMMM em X, e SX será a razão verdadeira da resistência para a gravidade, que era para ser encontrada. A partir desta razão deve ser encontrado por cálculo o comprimento DF; e um comprimento, que está para o comprimento assumido DP como o comprimento DF conhecido pelo experimento para o comprimento DF que acabou de ser encontrado, será o comprimento verdadeiro DP. Conhecido este comprimento, ter-se-á a linha curva D*ra*F descrita pelo corpo e também a velocidade e resistência do corpo em cada lugar.



Escólio

Contudo, que a resistência dos corpos está na razão da velocidade, é mais uma hipótese matemática do que física. Em meios vazios de toda tenacidade, as resistências feitas aos corpos são como o quadrado das velocidades. Pois pela ação de um corpo mais rápido, é comunicado um movimento maior em proporção a uma maior velocidade, à mesma quantidade do meio num tempo menor, e num tempo igual, em razão de uma maior quantidade de meio perturbado, é comunicado um movimento como o quadrado da razão maior, e a resistência (pelas Leis II e III) é como o movimento comunicado. Vamos ver, portanto, que movimentos surgem desta lei de resistência.

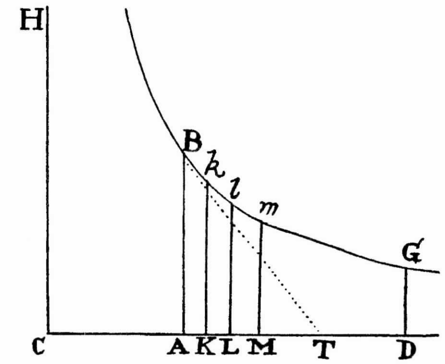
» SEÇÃO II

O movimento dos corpos que são resistidos como o quadrado de suas velocidades

PROPOSIÇÃO V. TEOREMA III

Se um corpo é resistido como o quadrado de sua velocidade, e move-se apenas por sua força inata através de um meio homogêneo, e se os tempos forem tomados em uma progressão geométrica, procedendo dos termos menores para os maiores, afirmo que as velocidades no início de cada um dos tempos estão inversamente na mesma progressão geométrica; e que os espaços que são percorridos em cada um dos tempos são iguais.

Pois, como a resistência do meio é proporcional ao quadrado da velocidade, e a diminuição da velocidade é proporcional à resistência: se o tempo for dividido em inumeráveis intervalos iguais, os quadrados das velocidades no início de cada um dos tempos serão proporcionais às diferenças das mesmas velocidades. Sejam estes intervalos de tempo AK, KL, LM etc., tomados na linha reta CD; levante as perpendiculares AB, K*k*, L*l*, M*m* etc., encontrando a hipérbole B*klm*G, descrita com o centro C, e as assíntotas retangulares CD e CH, em B, *k*, *l*, *m* etc.; então AB estará para K*k* assim como CK está para CA e, por divisão, AB - K*k* está para K*k* assim como AK está para CA, e alternadamente, AB - K*k* está para AK assim como K*k* está para CA; e,



portanto, assim como AB x K*k* está para AB x CA. Portanto, como AK e AB x CA são dados, AB - K*k* será como AB x K*k*; por fim, quando AB e K*k* coincidem, será como AB^2. E, por um raciocínio similar, K*k* - L*l*, L*l* – M*m* etc., serão como Kk^2, Ll^2 etc. Portanto, os quadrados das linhas AB, K*k*, L*l*, M*m* etc., são como suas diferenças e, portanto, como foi mostrado acima que os quadrados das velocidades estão como suas diferenças, a progressão de ambos será similar. Estando isto demonstrado segue-se que também as áreas descritas por essas linhas estão numa progressão similar com os espaços descritos por estas velocidades. Portanto, se a velocidade no início do primeiro tempo AK for representada pela linha AB, e a velocidade no início do segundo tempo KL pela linha K*k*, e o comprimento descrito no primeiro tempo pela área AK*k*B, todas as velocidades seguintes serão representadas pelas linhas seguintes L*l*, M*m* etc., e os comprimentos descritos pelas áreas K*l*, L*m* etc. E, por composição, se o tempo total for representado por AM, a soma de suas partes, o comprimento total percorrido será representado por AM*m*B, a soma de suas partes. Conceba agora que o tempo AM seja dividido nas partes AK, KL, LM etc., de forma que CA, CK, CL, CM etc., possam estar numa progressão geométrica; e aquelas partes estarão na mesma progressão, e as velocidades AB, K*k*, L*l*, M*m* etc. estarão na mesma progressão inversamente, e os espaços descritos A*k*, K*l*, L*m* etc. serão iguais. Q.E.D.

Corolário I – Portanto, depreende-se que se o tempo for representado por qualquer parte AD da assíntota, e a velocidade no início do tempo pela ordenada AB, a velocidade no final do tempo será representada pela ordenada DG; e o espaço total descrito pela área hiperbólica adjacente ABGD; e o espaço que qualquer corpo pode descrever no mesmo tempo AD, com a velocidade inicial AB, num meio sem resistência, pelo retângulo ABxAD.

Corolário II – Portanto, o espaço descrito num meio com resistência é dado, tomando-o para o espaço descrito com a velocidade uniforme AB em um meio sem resistência, assim como a área hiperbólica ABGD está para o retângulo ABxAD.

Corolário III – A resistência do meio também é dada, fazendo-a igual, bem no começo do movimento, a uma força centrípeta uniforme que pode gerar, num corpo caindo através de um meio sem resistência, a velocidade AB no tempo AC. Pois, se BT for traçada tocando a hipérbole em B, e

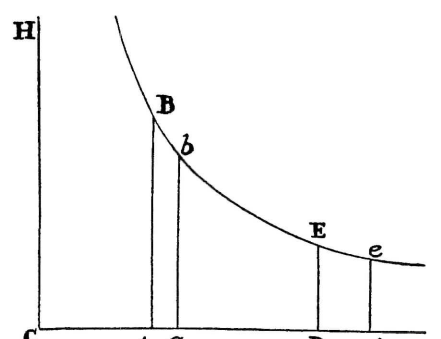
encontrando a assíntota em T, a linha reta AT será igual a AC, e vai expressar o tempo no qual a primeira resistência, permanecendo uniforme, anulará toda a velocidade AB.

COROLÁRIO IV – E, portanto, também é dada a proporção desta resistência para a força da gravidade ou qualquer outra força centrípeta dada.

COROLÁRIO V – E, inversamente, se for dada a proporção da resistência para qualquer força centrípeta dada, também é dado o tempo AC no qual uma força centrípeta igual à resistência pode gerar qualquer velocidade como AB; e, portanto, é dado o ponto B, através do qual deve ser descrita a hipérbole tendo CH e CD como suas assíntotas; e também o espaço ABGD que um corpo pode percorrer em qualquer tempo AD, começando seu movimento com aquela velocidade AB, em um meio homogêneo com resistência.

PROPOSIÇÃO VI. TEOREMA IV

Corpos esféricos homogêneos e iguais, impedidos por resistências que são como os quadrados das velocidades, e movendo-se apenas por suas forças inatas, vão descrever espaços iguais, em tempos que estão inversamente como as velocidades no início, e vão perder partes de suas velocidades proporcionais aos todos.



Trace qualquer hipérbole B*b*E*e* com as assíntotas retangulares CD e CH, cortando as perpendiculares AB, *ab*, DE, *de* em B, *b*, E, *e*; represente as velocidades iniciais pelas perpendiculares AB e DE, e os tempos pelas linhas A*a* e D*d*. Portanto, assim como A*a* está para D*d*, também (pela hipótese) está DE para AB, e assim (pela natureza da hipérbole) está CA para CD; e, por composição, assim está C*a* para C*d*. Portanto, as áreas AB*ba* e DE*ed*, isto é, os espaços descritos, são iguais entre si, e as primeiras velocidades AB e DE são proporcionais às últimas *ab* e *de*; e, portanto, por subtração, proporcionais às partes das velocidades perdidas, AB - *ab* e DE - *de*. Q.E.D.

Proposição VII. Teorema V

Se corpos esféricos são resistidos como os quadrados de suas velocidades, em tempos que são diretamente como os primeiros movimentos, e inversamente como as primeiras resistências, eles perderão partes de seus movimentos proporcionais aos todos, e vão descrever espaços proporcionais ao produto destes tempos e às velocidades iniciais[1].

Pois as partes dos movimentos perdidos são como o produto das resistências e dos tempos. Portanto, para que estas partes possam ser proporcionais aos todos, o produto da resistência e do tempo deve ser como o movimento. Portanto, o tempo será diretamente como o movimento e inversamente como a resistência. Portanto, sendo tomados os intervalos de tempo nesta razão, os corpos sempre vão perder partes de seus movimentos proporcionais aos todos, mantendo assim, velocidades sempre proporcionais às suas velocidades iniciais. E por causa da razão dada das velocidades, eles sempre vão percorrer espaços que são como o produto das primeiras velocidades e dos tempos. Q.E.D.

Corolário I – Portanto, se corpos igualmente rápidos são resistidos como o quadrado de seus diâmetros, globos homogêneos movendo-se com quaisquer velocidades, ao descrever espaços proporcionais a seus diâmetros, vão perder partes de seus movimentos proporcionais aos todos. Pois o movimento de cada globo será como o produto de sua velocidade e massa, isto é, como o produto da velocidade e do cubo do diâmetro; a resistência (por suposição) será como o produto do quadrado do diâmetro e o quadrado da velocidade; e o tempo (por esta Proposição), está na razão direta do primeiro, e inversa do último, isto é, diretamente como o diâmetro e inversamente como a velocidade; e, portanto, o espaço, que é proporcional ao tempo e à velocidade, é como o diâmetro.

Corolário II – Se corpos igualmente rápidos são resistidos como a 3/2ª potência de seus diâmetros, globos homogêneos, movendo-se com quaisquer velocidades, vão perder partes de seus movimentos proporcionais aos todos ao descrever espaços que são como a 3/2ª potência de seus diâmetros.

Corolário III – E, universalmente, se corpos igualmente rápidos são resistidos na razão de qualquer potência de seus diâmetros, os espaços nos quais globos homogêneos, movendo-se com quaisquer velocidades, vão perder partes de seus movimentos proporcionais aos todos, serão como os cubos

1. Apêndice, nota 2.

dos diâmetros aplicados a esta potência. Sejam estes diâmetros D e E; e se as resistências, nas quais as velocidades são supostas iguais, são como D^n e E^n; os espaços nos quais os globos, movendo-se com quaisquer velocidades, vão perder partes de seus movimentos proporcionais aos todos, serão como D^{3-n} e E^{3-n}. E, portanto, globos homogêneos, ao descrever espaços proporcionais a D^{3-n} e E^{3-n}, vão manter suas velocidades na mesma razão de um para outro como no início.

COROLÁRIO IV – Agora, se os corpos não são homogêneos, o espaço descrito pelo globo mais denso deve ser aumentado na razão da densidade. Pois o movimento, com uma mesma velocidade, é maior na razão da densidade, e o tempo (por esta Proposição) é aumentado diretamente na razão do movimento, e o espaço descrito na razão do tempo.

COROLÁRIO V – E se os corpos movem-se em meios diferentes, o espaço num meio que mais resiste, outras coisas sendo iguais, deve ser diminuído na razão da maior resistência. Pois o tempo (por esta Proposição) será diminuído na razão da resistência aumentada, e o espaço na razão do tempo.

LEMA II

O momento de qualquer genitum *é igual aos momentos de cada um dos lados geradores multiplicados pelos índices das potências destes lados, e por seus coeficientes continuamente.*

Chamo *genitum* qualquer quantidade não gerada por adição ou subtração de partes diversas, mas que é gerada ou produzida em aritmética pela multiplicação, divisão, ou extração da raiz de quaisquer termos; em geometria, pela determinação de conteúdos e lados, ou dos extremos e médias de proporcionais. Quantidades deste tipo são produtos, quocientes, raízes, retângulos, quadrados, cubos, lados quadrados e cúbicos, e assim por diante. Considero aqui estas quantidades como variáveis e indeterminadas, aumentadas ou diminuídas, por assim dizer, por um movimento ou fluxo contínuo. Dou a seus aumentos ou diminuições momentâneos o nome de momentos, de forma que os incrementos possam ser estimados como momentos adicionados ou positivos; e as diminuições como momentos subtraídos ou negativos. Mas deve-se tomar cuidado de não considerar como tais as partículas finitas[2]. As partículas finitas não são momentos, mas as próprias quantida-

2. Apêndice, nota 3.

des geradas pelos momentos. Devemos concebê-los como os princípios nascentes de grandezas finitas. Também não consideramos neste Lema a grandeza dos momentos, mas sua primeira proporção, como nascente. Será a mesma coisa se, em vez de momentos, usarmos ou as velocidades dos aumentos ou diminuições (que também podem ser chamados os movimentos, mutações, e fluxos das quantidades), ou quaisquer quantidades finitas proporcionais a estas velocidades. O coeficiente de qualquer lado gerador é a quantidade que surge ao aplicar o *genitum* a este lado.

Daí que o sentido do Lema é que, se os momentos de quaisquer quantidades A, B, C etc., aumentando ou diminuindo por um fluxo contínuo, ou as velocidades das mutações que são proporcionais a eles, forem chamados de *a, b, c* etc., o momento ou mutação do retângulo gerado AB será $aB + bA$; o momento do conteúdo gerado ABC será $aBC + bAC + cAB$; e os momentos das potências geradas A^2, A^3, A^4, $A^{1/2}$, $A^{3/2}$, $A^{1/3}$, $A^{2/3}$, A^{-1}, A^{-2}, $A^{-1/2}$ serão $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $(aA^{-1/2})/2$, $(3aA^{1/2})/2$, $(aA^{-2/3})/3$, $(2aA^{-1/3})/3$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, $-(aA^{-3/2})/2$, respectivamente; e, em geral, que o momento de qualquer potência $A^{n/m}$ será $(naA^{\frac{n-m}{m}})/m$. Também, que o momento da quantidade gerada A^2B será $2aAB + bA^2$; o momento da quantidade gerada $A^3B^4C^2$ será $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; e o momento da quantidade gerada A^3/B^2 ou A^3B^{-2} será $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$, e assim por diante. O Lema está assim demonstrado[3].

CASO 1 – Qualquer retângulo, como AB, aumentado por um fluxo contínuo, quando os lados A e B careciam da metade dos seus momentos $a/2$ e $b/2$, era $A - a/2$ por $B - b/2$, ou $AB - aB/2 - bA/2 + ab/4$; mas tão logo os lados A e B foram aumentados pelas outras metades dos momentos, o retângulo tornou-se $A + a/2$ por $B + b/2$, ou $AB + aB/2 + bA/2 + ab/4$. Subtraia deste retângulo o retângulo anterior, e vai sobrar o excesso $aB + bA$. Portanto, com os incrementos totais *a* e *b* dos lados, é gerado o incremento $aB + bA$ do retângulo. Q.E.D.

CASO 2 – Suponha AB sempre igual a G, e então o momento do conteúdo ABC ou GC (pelo Caso 1) será $gC + cG$, isto é (colocando AB e $aB + bA$ em vez de G e *g*), $aBC + bAC + cAB$. E o raciocínio é o mesmo para conteúdos com qualquer número de lados. Q.E.D.

CASO 3 – Suponha os lados A, B e C, serem sempre iguais entre si; e o momento $aB + bA$, de A^2, isto é, do retângulo AB, será $2aA$; e o momento $aBC + bAC + cAB$ de A^3, isto é, do conteúdo ABC, será $3aA^2$. E pelo mesmo raciocínio o momento de qualquer potência A^n é naA^{n-1}. Q.E.D.

3. Apêndice, nota 4.

CASO 4 – Portanto, como 1/A por A é 1, o momento de 1/A multiplicado por A, junto com 1/A multiplicado por *a*, será o momento de 1, isto é, nada. Portanto, o momento de 1/A, ou de A^{-1}, é $-a/A^2$. E, em geral, como $1/A^n$ por A^n é 1, o momento de $1/A^n$ multiplicado por A^n junto com $1/A^n$ por naA^{n-1} será nada. E, portanto, o momento de $1/A^n$ ou de A^{-n} será $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q.E.D.

CASO 5 – E como $A^{1/2}$ por $A^{1/2}$ é A, o momento de $A^{1/2}$ multiplicado por $2A^{1/2}$ será *a* (pelo Caso 3); e, portanto, o momento de $A^{1/2}$ será $\frac{a}{2A^{1/2}}$ ou $\frac{1}{2}aA^{-1/2}$. E, em geral, colocando $A^{m/n}$ igual a B, então A^m será igual a B^n e, portanto, maA^{m-1} será igual a nbB^{n-1}, e maA^{-1} igual a nbB^{-1}, ou $nbA^{-m/n}$; e, portanto, $\frac{m}{n}aA^{\frac{n-m}{n}}$ é igual a *b*, isto é, igual ao momento de $A^{m/n}$. Q.E.D.

CASO 6 – Portanto, o momento de qualquer quantidade gerada A^mB^n é o momento de A^m multiplicado por B^n, junto com o momento de B^n multiplicado por A^m, isto é, $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; e isto se os índices *m* e *n* das potências são números inteiros ou frações, positivas ou negativas. E o raciocínio é o mesmo para potências maiores. Q.E.D.

Corolário I – Portanto, em quantidades continuamente proporcionais[4], se é dado um termo, os momentos do restante dos termos será como os mesmos termos multiplicados pelo número de intervalos entre eles e o termo dado. Sejam A, B, C, D, E, F continuamente proporcionais; então se é dado o termo C, os momentos do restante dos termos estarão entre si como -2A, -B, D, 2E, 3F.

Corolário II – E se em quatro proporcionais são dados os dois médios, os momentos dos extremos serão como estes extremos. O mesmo é válido para os lados de qualquer retângulo.

Corolário III – E se é dada a soma ou diferença de dois quadrados, os momentos dos lados estarão inversamente como os lados.

Escólio[5]

Numa carta minha para o Sr. J. Collins, datada de 10 de dezembro de 1672, após descrever um método das tangentes, que suspeitei ser o mes-

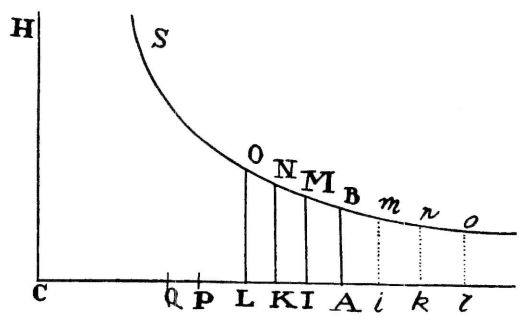
4. Apêndice, nota 5.
5. Apêndice, nota 6.

mo que o método de Sluse, que naquela época ainda não havia sido tornado público, adicionei estas palavras: *Este é um [caso] particular, ou melhor, um Corolário, de um método geral, que é válido, sem qualquer cálculo trabalhoso, não apenas para traçar tangentes de quaisquer linhas curvas, sejam geométricas ou mecânicas ou de qualquer maneira relativas a linhas retas ou outras curvas, mas também para resolver outros tipos mais abstrusos de problemas sobre as sinuosidades, áreas, comprimentos, centros de gravidade de curvas etc.; também não é ele (como o método de Hudden* de maximis et minimis*) limitado a equações que são livres de quantidades irracionais. Combinei este método com aquele outro que lida com equações reduzindo-as a séries infinitas.* Isto sobre aquela carta. E estas últimas palavras relacionam-se a um tratado que compus sobre este assunto no ano de 1671. O fundamento deste método geral está contido no Lema precedente.

Proposição VIII. Teorema VI

Se um corpo num meio uniforme sofre a ação uniforme da força da gravidade, subindo ou descendo numa linha reta; e se todo o espaço descrito for dividido em partes iguais, e no começo de cada uma das partes (ao adicionar ou subtrair a força de resistência do meio a favor ou contra a força da gravidade, quando o corpo sobe ou desce) você derivar as forças absolutas, afirmo que estas forças absolutas estão numa progressão geométrica.

Seja a força da gravidade representada pela linha dada AC; a força de resistência pela linha indefinida AK; a força absoluta na descida do corpo pela diferença KC; a velocidade do corpo por uma linha AP, que será uma média proporcional entre AK e AC e, portanto, como a raiz quadrada da resistência; o aumento da resistência ocorrido num dado intervalo de tempo pela linha curta KL, e o aumento simultâneo da velocidade pela linha



curta PQ; e com o centro C, e assíntotas retangulares CA e CH, descreva qualquer hipérbole BNS encontrando as perpendiculares levantadas AB, KN e LO em B, N e O. Como AK é como AP^2, o momento KL de uma será como o momento 2APxPQ da outra, isto é, como APxKC, pois o incremento PQ da velocidade é (pela Lei II) proporcional à força geradora KC. Seja a razão de KL multiplicada pela razão KN, e o retângulo KLxKN se tornará como APxKCxKN; isto é (já que o retângulo KCxKN é dado), como AP. Mas a última razão da área hiperbólica KNOL para o retângulo KLxKN torna-se, quando coincidem os pontos K e L, a razão da igualdade. Portanto, a área hiperbólica evanescente é como AP. Portanto, a área hiperbólica total ABOL é composta dos intervalos KNOL que são sempre proporcionais à velocidade AP e, portanto, é ela mesmo proporcional ao espaço descrito com esta velocidade. Seja esta área dividida agora em partes iguais, como ABMI, IMNK, KNOL etc., e as forças absolutas AC, IC, KC, LC etc., estarão numa progressão geométrica. Q.E.D. Por um raciocínio similar, na subida do corpo, tomando, no lado contrário do ponto A, as áreas iguais Ab*mi*, *imnk*, *knol* etc., demonstra-se que as forças absolutas AC, *i*C, *k*C, *l*C etc. são continuamente proporcionais. Portanto, se todos os espaços na subida e descida são tomados iguais, todas as forças absolutas *l*C, *k*C, *i*C, AC, IC, KC, LC etc. serão continuamente proporcionais. Q.E.D.

Corolário I – Portanto, se o espaço descrito for representado pela área hiperbólica ABNK, a força de gravidade, a velocidade do corpo, e a resistência do meio podem ser representadas respectivamente pelas linhas AC, AP e AK, e inversamente.

Corolário II – E a maior velocidade que o corpo pode adquirir numa descida infinita será representada pela linha AC.

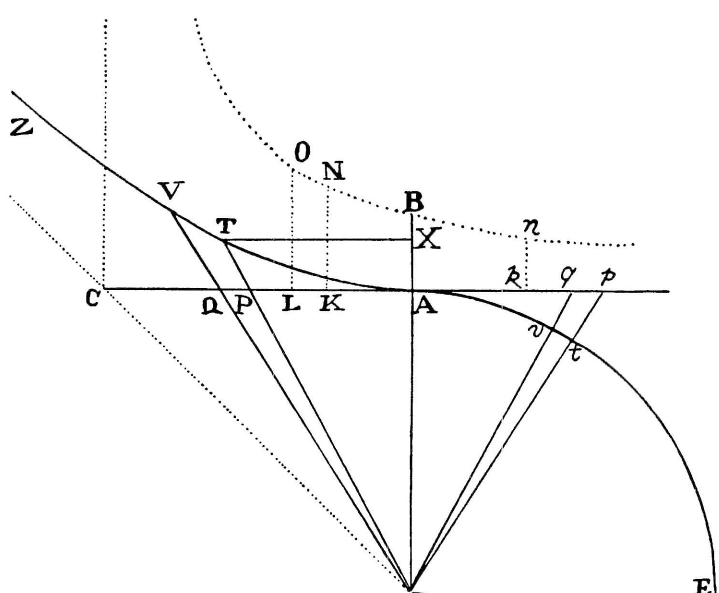
Corolário III – Portanto, se a resistência do meio correspondendo a qualquer velocidade dada for conhecida, a maior velocidade será encontrada, tomando-a para esta velocidade dada, como a raiz quadrada da razão que a força da gravidade tem para a resistência conhecida do meio.

Proposição IX. Teorema VII

Supondo o que foi acima demonstrado, afirmo que se as tangentes dos ângulos do setor de um círculo e de uma hipérbole forem proporcionais às velocidades, e o raio sendo de uma grandeza adequada, todo o tempo de subida ao lugar mais alto será como o setor do círculo, e todo o tempo de descida do lugar mais alto como o setor da hipérbole.

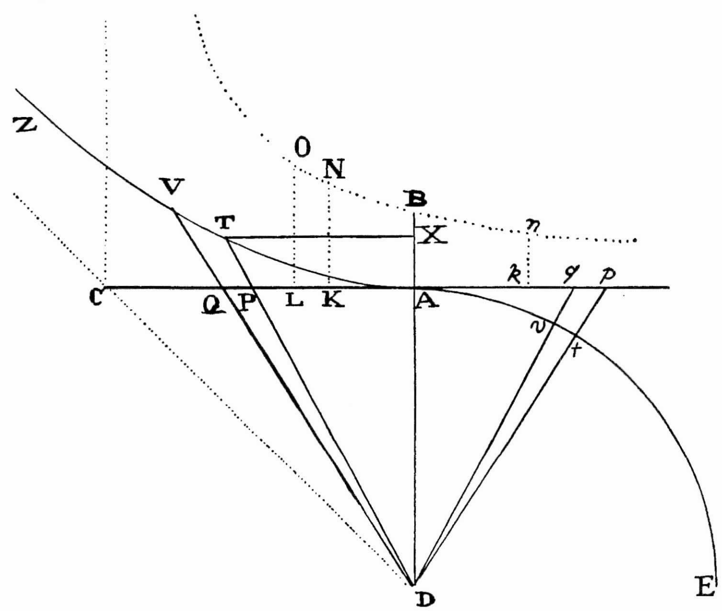
A partir da linha reta AC, que expressa a força da gravidade, seja traçada AD perpendicular e igual [a AC]. A partir do centro D, descreva com o semidiâmetro AD tanto o quadrante A*t*E de um círculo, como a hipérbole retangular AVZ, cujo eixo é AK, vértice principal A, e assíntota DC. Trace D*p* e DP, o setor circular A*t*D será como todo o tempo de subida para o lugar mais alto e o setor hiperbólico ATD como todo o tempo de descida do lugar mais alto, se acontecer de as tangentes A*p* e AP destes setores forem como as velocidades.

Caso 1 – Trace D*vq* delineando os momentos ou intervalos mínimos *t*D*v* e *q*D*p*, descritos ao mesmo tempo, do setor AD*t* e do triângulo AD*p*. Como estes intervalos (devido ao ângulo comum D) são como o quadrado dos lados, o intervalo *t*D*v* será como $\frac{q\mathrm{D}p \, . \, t\mathrm{D}^2}{p\mathrm{D}^2}$, isto é (já que *t*D é dado), como $\frac{q\mathrm{D}p}{p\mathrm{D}^2}$. Mas $p\mathrm{D}^2$ é $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{A}p^2$, isto é, $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}\mathrm{x}\mathrm{A}k$, ou ADxC*k*; e *q*D*p* é ½ AD x *pq*. Portanto, *t*D*v*, o intervalo do setor, é como $\frac{pq}{\mathrm{C}k}$, isto é, diretamente como a menor diminuição *pq* da velocidade, e inversamente como a força C*k* que diminui a velocidade, portanto, como o intervalo de tempo correspondente à diminuição da velocidade. Por composição, a soma de todos os intervalos *t*D*v* no setor AD*t* será como a soma dos intervalos de tempo correspondentes a cada um dos intervalos perdidos *pq* da velocidade decrescen-



te A*p*, até que esta velocidade, sendo reduzida a zero, desapareça; isto é, todo o setor AD*t* está como todo o tempo de subida ao lugar mais alto. Q.E.D.

Caso 2 – Trace DQV delineando os intervalos mínimos TDV e PDQ do setor DAV, e do triângulo DAQ; e estes intervalos estarão um para o outro como DT^2 está para DP^2, isto é (se TX e AP são paralelas), como DX^2 para DA^2 ou TX^2 para AP^2, e, por subtração, como $DX^2 - TX^2$ para $DA^2 - AP^2$. Mas, pela natureza da hipérbole, $DX^2 - TX^2$ é AD^2, e, por suposição, AP^2 é ADxAK. Portanto, os intervalos estão um para o outro como AD^2 está para AD^2 – ADxAK, isto é, como AD para AD - AK ou AC para CK e, portanto, o intervalo TDV do setor é $\frac{PDQ.AC}{CK}$; e, portanto, (já que AC e AD são dados) como $\frac{PQ}{CK}$; isto é, diretamente como o aumento da velocidade, e inversamente como a força geradora do aumento; e, portanto, como o intervalo de tempo correspondente ao aumento. Por composição, a soma dos intervalos de tempo, em que são gerados todos os intervalos PQ da velocidade AP, será como a soma dos intervalos do setor ATD, isto é, o tempo total será como o setor total. Q.E.D.



Corolário I – Assim, se AB for igual à quarta parte de AC, o espaço que um corpo vai descrever ao cair em qualquer tempo estará para o espaço que o corpo poderia descrever, ao mover-se uniformemente no mesmo tempo com sua maior velocidade AC, como a área ABNK, que expressa o espaço percorrido ao cair para a área ATD, que expressa o tempo. Pois como

AC : AP = AP : AK,

e pelo Corolário I, Lema 2, deste Livro,

LK : PQ = 2AK : AP = 2AP : AC,

portanto,

LK : ½ PQ = AP : ¼ AC ou AB,

e como

KN : AC ou AD = AD : CK,

multiplicando junto os termos correspondentes,

LKNO : DPQ = AP : CK.

Como foi mostrado acima,

DPQ : DTV = CK : AC.

Por conseqüência,

LKNO : DTV = AP : AC,

isto é, como a velocidade do corpo que cai está para a maior velocidade que o corpo pode adquirir ao cair. Como, portanto, os momentos LKNO e DTV das áreas ABNK e ATD são como as velocidades, todas as partes destas áreas geradas no mesmo tempo serão como os espaços descritos no mesmo tempo e, portanto, as áreas totais ABNK e ADT, geradas desde o início, serão como os espaços totais descritos desde o início da descida. Q.E.D.

Corolário II – O mesmo também é verdadeiro para o espaço descrito na subida. Isso quer dizer que todo este espaço está para o espaço descrito no mesmo tempo com a velocidade uniforme AC, como a área Ab*nk* está para o setor AD*t*.

Corolário III – A velocidade do corpo, ao cair no tempo ATD, está para a velocidade que ele iria adquirir no mesmo tempo num espaço sem resistência, como o triângulo APD para o setor hiperbólico ATD. Pois a velocidade num meio sem resistência estaria como o tempo ATD, e num meio com resistência é como AP, isto é, como o triângulo APD. E estas velocidades, no início da descida são iguais entre si, assim como estas áreas ATD e APD.

Corolário IV – Pelo mesmo argumento, a velocidade na subida está para a velocidade com a qual o corpo, no mesmo tempo, num espaço sem resistência, perderia todo o seu movimento de subida, como o triângulo A*p*D para o setor circular A*t*D; ou como a linha reta A*p* para o arco A*t*.

Corolário V – Portanto, o tempo no qual um corpo, ao cair num meio com resistência, iria adquirir a velocidade AP, está para o tempo no qual ele iria adquirir sua maior velocidade AC, ao cair num espaço sem resistência, como o setor ADT está para o triângulo ADC; e o tempo no qual ele perderia sua velocidade A*p*, ao subir num meio com resistência, está para

o tempo no qual ele perderia a mesma velocidade ao subir num espaço sem resistência, como o arco A*t* para sua tangente A*p*.

Corolário VI – Como conseqüência, a partir do tempo dado é conhecido o espaço descrito na subida ou na descida. Pois a maior velocidade de um corpo descendo *in infinitum* é dada (pelos Corolários II e III, Teor. 6 deste Livro) e, portanto, é dado o tempo no qual um corpo iria adquirir aquela velocidade ao cair num espaço sem resistência. Tomando o setor ADT ou AD*t* para o triângulo ADC na razão do tempo dado para o tempo que se acabou de encontrar, serão dadas a velocidade AP ou A*p*, e a área ABNK ou AB*nk*, que está para o setor ADT, ou AD*t*, assim como o espaço buscado está para aquele que iria, no tempo dado, ser descrito uniformemente com a maior velocidade que se acabou de encontrar.

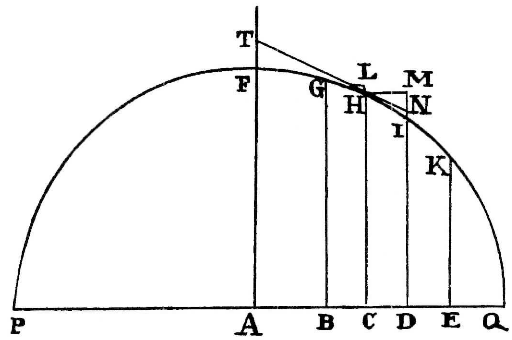
Corolário VII – E retrocedendo, a partir do espaço dado de subida ou descida AB*nk* ou ABNK, será dado o tempo AD*t* ou ADT.

Proposição X. Problema III[6]

Suponha que a força uniforme da gravidade tende diretamente para o plano do horizonte, e que a resistência seja como o produto da densidade do meio e o quadrado da velocidade: propõe-se achar a densidade do meio, em cada lugar, que vai fazer com que o corpo se mova em qualquer linha curva dada, a velocidade do corpo, e a resistência do meio em cada lugar.

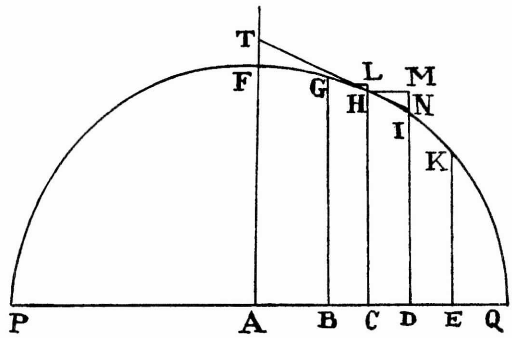
Seja PQ um plano perpendicular ao plano do próprio esquema; PFHQ uma linha curva encontrando este plano nos pontos P e Q; G, H, I e K quatro lugares do corpo movendo-se ao longo desta curva de F para Q; e GB, HC, ID e KE quatro ordenadas paralelas traçadas destes pontos até o horizonte, e tocando na linha horizontal PQ nos pontos B, C, D e E; e sejam as distâncias BC, CD e DE das ordenadas iguais entre si. Trace a partir dos pontos G e H as linhas retas GL e HN tocando a curva em G e H, e encontrando as ordenadas CH e DI, estendidas para cima, em L e N; e complete o paralelogramo HCDM. E os tempos nos quais o corpo descreve os arcos GH e HI serão como a raiz quadrada das alturas LH e NI, que o corpo descreveria nestes tempos, ao cair a partir das tangentes; e as velocidades serão diretamente como os comprimentos percorridos GH e HI, e inversamente como os tempos. Sejam os tempos representados por T e *t*, e as velocidades por

6. Apêndice, nota 7.



$\frac{GH}{T}$ e $\frac{HI}{t}$; e a diminuição da velocidade produzida no tempo *t* será representada por $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Esta diminuição surge da resistência que retarda o corpo, e da gravidade que o acelera. A gravidade produz num corpo que ao cair percorre o espaço NI uma velocidade com a qual ele seria capaz de descrever duas vezes este espaço no mesmo tempo, como Galileu demonstrou; isto é, a velocidade $\frac{2NI}{t}$: mas se o corpo descreve o arco HI, ela aumenta este arco apenas pelo comprimento HI - HN ou $\frac{MI.NI}{HI}$ e, portanto, só gera a velocidade $\frac{2MI.NI}{t.HI}$. Seja esta velocidade adicionada à diminuição mencionada acima, e teremos a diminuição da velocidade surgindo apenas da resistência, isto é, $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI.NI}{t.HI}$. Portanto, como, no mesmo tempo, a ação da gravidade em um corpo que cai gera a velocidade $\frac{2NI}{t}$, a resistência estará para a gravidade como $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI.NI}{t.HI}$ está para $\frac{2NI}{t}$ ou como $\frac{t.GH}{T} - HI + \frac{2MI.NI}{HI}$ está para 2NI.

Agora, no lugar das abcissas CB, CD e CE, coloque -*o*, *o* e 2*o*. No lugar da ordenada CH coloque P; e no lugar de MI coloque qualquer série $Qo + Ro^2 + So^3 + \text{etc.}$ E todos os termos da série após o primeiro, isto é, $Ro^2 + So^3 + \text{etc.}$, serão NI; e as ordenadas DI, EK e BG serão $P - Qo - Ro^2 - So^3 - \text{etc.}$, $P - 2Qo - 4Ro^2 - 8So^3 - \text{etc.}$, e $P + Qo - Ro^2 + So^3 - \text{etc.}$, respectivamente. E ao elevar ao quadrado as diferenças das ordenadas BG - CH e CH - DI, e aos quadrados assim produzidos adicionar os quadrados dos próprios BC e CD, você



terá oo + $QQoo$ - $2QRo^3$ + etc., e oo + $QQoo$ + $2QRo^3$ + etc., os quadrados dos arcos GH e HI, cujas raízes quadradas $o\sqrt{(I+QQ)} - \frac{QRoo}{\sqrt{(I+QQ)}}$ e $o\sqrt{(I+QQ)} + \frac{QRoo}{\sqrt{(I+QQ)}}$ são os arcos GH e HI. Além disso, se for subtraída da ordenada CH metade da soma das ordenadas BG e DI, e se for subtraída da ordenada DI metade da soma das ordenadas CH e EK, vai sobrar Roo e $Roo + 3So^3$, os senos versos dos arcos GI e HK. E estes são proporcionais às linhas curtas LH e NI e, portanto, são como os quadrados dos tempos infinitamente pequenos T e *t*: assim, a razão $\frac{t}{T}$ varia como a raiz quadrada de $\frac{R+3So}{R}$ ou $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$; e, substituindo-se os valores que acabaram de ser encontrados de $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI e NI, $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ torna-se $\frac{3Soo}{2R} \cdot \sqrt{(I+QQ)}$. E como 2NI é $2Roo$, a resistência vai estar agora para a gravidade como $\frac{3Soo}{2R} \cdot \sqrt{(I+QQ)}$ está para $2Roo$, isto é, como $3S\sqrt{(I+QQ)}$ está para 4RR.

A velocidade será tal que um corpo saindo de qualquer lugar H na direção da tangente HN descreveria, no vácuo, uma parábola, cujo diâmetro é HC, e seu *latus rectum* $\frac{HN^2}{NI}$ ou $\frac{I+QQ}{R}$.

A resistência é como o produto da densidade do meio e o quadrado da velocidade e, portanto, a densidade do meio é diretamente como a resistência, e inversamente como o quadrado da velocidade, isto é, diretamente como $\frac{3S\sqrt{(I+QQ)}}{4RR}$ e inversamente como $\frac{I+QQ}{R}$, isto é, como $\frac{S}{R\sqrt{(I+QQ)}}$.

Q.E.I.

COROLÁRIO I – Se a tangente HN for prolongada em ambas as direções, de forma a se encontrar com qualquer ordenada AF em T, $\frac{HT}{AC}$ será igual a $\sqrt{(I + QQ)}$ e, portanto, pode substituir naquilo que se escreveu antes a $\sqrt{(I + QQ)}$. Desta forma, a resistência estará para a gravidade como 3SxHT está para 4RRxAC; a velocidade será como $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, e a densidade do meio será como $\frac{S.AC}{R.HT}$.

COROLÁRIO II – Portanto, se a linha curva PFHQ for definida pela relação entre a base ou abcissa AC e a ordenada CH, como é usual, e o valor da ordenada for resolvido em uma série convergente, o problema será rapidamente solucionado pelos primeiros termos da série; como nos exemplos seguintes.

Ex. 1. Seja a linha PFHQ um semicírculo descrito sobre o diâmetro PQ; ache a densidade do meio que vai fazer com que um projétil se mova nesta linha.

Divida ao meio o diâmetro PQ em A, e chame AQ, *n*; AC, *a*; CH, *e*; e CD, *o*; então DI^2 ou $AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo$, ou $ee - 2ao - oo$, e a raiz extraída pelo nosso método vai dar

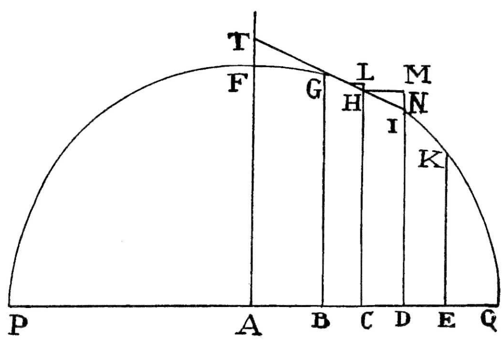
$$DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

Substitua aqui $ee + aa$ por nn e DI vai se tornar

$$= e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

Nesta série distingo os termos sucessivos da seguinte maneira: chamo de primeiro termo àquele no qual não aparece a quantidade infinitamente pequena *o*; segundo, àquele em que a quantidade é de apenas uma dimensão; terceiro, àquele no qual ela surge em duas dimensões; quarto, àquele em que ela é de três; e assim *ad infinitum*. O primeiro termo, que aqui é *e*, sempre denotará o comprimento da ordenada CH, levantada a partir do ponto de partida da quantidade indefinida *o*. O segundo termo, que aqui é $\frac{ao}{e}$, vai denotar a diferença entre CH e DN, isto é, a linha curta MN que é destacada ao completar o paralelogramo HCDM e que, portanto, sempre determina a posição da tangente HN; como, neste caso, tomando MN : HM = $\frac{ao}{e} : o = a : e$. O terceiro termo, que aqui é $\frac{nnoo}{2e^3}$, representará a linha curta IN, que está entre a tangente e a curva e que, portanto, determina o ângulo

de contato IHN ou a curvatura que a linha curva tem em H. Se esta linha curta IN tem um tamanho finito, ela vai ser expressa pelo terceiro termo, junto com aqueles que o seguem *in infinitum.* Mas se esta linha curta for diminuída *in infinitum,* os termos seguintes tornam-se infinitamente menores do que o terceiro termo, podendo ser desprezados. O quarto termo determina a variação da curvatura; o quinto, a variação da variação, e assim por diante. Disto, aliás, aparece o uso que pode ser feito destas séries na solução de problemas que dependem das tangentes e curvatura das curvas.



Agora compare a série

$$e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \text{etc.},$$

com a série P - Qo - Roo - So^3 - etc. e, em vez de P, Q, R e S, coloque e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$ e $\frac{ann}{2e^5}$ e, em vez de $\sqrt{(I + QQ)}$ coloque $\sqrt{\left(I + \frac{aa}{ee}\right)}$ ou $\frac{n}{e}$; a densidade do meio vai aparecer como $\frac{a}{ne}$, isto é (já que n é dado), como $\frac{a}{e}$ ou $\frac{AC}{CH}$, ou seja, como aquele comprimento da tangente HT que termina no semidiâmetro AF, perpendicular a PQ: e a resistência estará para a gravidade como $3a$ para $2n$, isto é, como 3AC está para o diâmetro PQ do círculo; e a velocidade será como $\sqrt{CH}$. Portanto, se o corpo parte do lugar F com a devida velocidade, na direção de uma linha paralela a PQ, e a densidade do meio em cada um dos lugares H é como o comprimento da tangente HT, e também a resistência em qualquer lugar H está para a força da gravidade como 3AC para PQ, este corpo vai descrever o quadrante FHQ de um círculo. Q.E.I.

Mas, se o mesmo corpo partir do lugar P na direção de uma linha perpendicular a PQ, e começar a se mover num arco do semicírculo PFQ,

temos de tomar AC ou a no lado contrário do centro A; e, portanto, seu sinal tem de ser trocado, e temos de colocar $-a$ em vez de $+a$. Então a densidade do meio será como $-\frac{a}{e}$. Mas a natureza não admite uma densidade negativa, isto é, uma densidade que acelera o movimento dos corpos; portanto, não pode acontecer naturalmente de um corpo, ao subir a partir de P, descrever o quadrante PF de um círculo. Para produzir tal efeito, um corpo teria de ser acelerado por um meio propulsor, e não impedido por um meio com resistência.

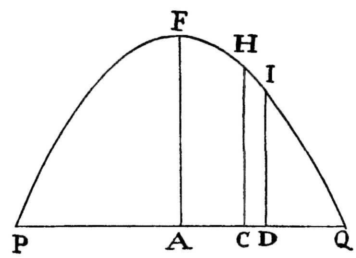
Ex. 2. Seja a linha PFQ uma parábola, tendo seu eixo AF perpendicular ao horizonte PQ; ache a densidade do meio que vai fazer com que um projétil mova-se nesta linha.

Da natureza da parábola, o retângulo -PDxDQ é igual ao retângulo sob a ordenada DI e alguma linha reta dada, isto é, se esta linha reta for chamada de b; PC de a; PQ de c; CH de e; e CD de o; o retângulo

$$(a + o)(c - a - o) = ac - aa - 2ao + co - oo = b\text{xDI},$$

portanto,

$$\text{DI} = \frac{ac-aa}{b} + \frac{c-2a}{b} \cdot o - \frac{oo}{b}.$$



Agora o segundo termo $\frac{c-2a}{b}o$ desta série deve ser colocado no lugar de Qo, e o terceiro termo $\frac{oo}{b}$ no lugar de Roo. Mas como não há mais termos, o coeficiente S do quarto termo desaparece; portanto, a quantidade $\frac{\text{S}}{\text{R}\sqrt{(\text{I} + \text{QQ})}}$, ao qual é proporcional à densidade do meio, torna-se nula. Portanto, onde o meio não tem densidade, o projétil move-se numa parábola; como foi demonstrado por Galileu. Q.E.I.

Ex. 3. Seja a linha AGK uma hipérbole, tendo sua assíntota NX perpendicular ao plano horizontal AK: ache a densidade do meio que vai fazer com que um projétil se mova nesta linha.

Seja MX a outra assíntota, encontrando a ordenada DG prolongada em V; e pela natureza da hipérbole, o retângulo XV em VG será dado. Também é dada a razão de DN para VX e, portanto, o retângulo de DN em VG. Seja ele bb e, ao completar o paralelogramo DNXZ, seja BN chamado de a; BD de o; NX de c; e seja a razão dada de VZ para ZX ou DN, $\frac{m}{n}$. Então DN

será igual a $a - o$, VG igual a $\frac{bb}{a-o}$, VZ igual a $\frac{m}{n}(a - o)$ e GD ou NX - VZ - VG igual a

$$c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}.$$

Seja o termo $\frac{bb}{a-o}$ resolvido na série convergente

$$\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3 \text{ etc.,}$$

e GD vai tornar-se igual a

$$c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3 \text{ etc.}$$

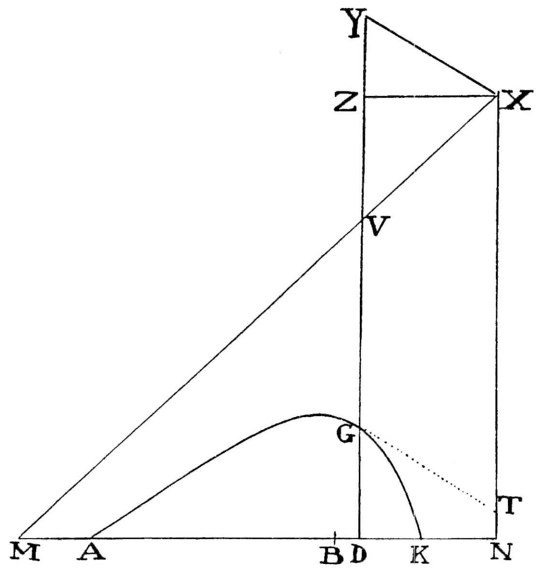
O segundo termo $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ desta série é para ser usado no lugar de Qo; o terceiro $\frac{bb}{a^3}o^2$, com seu sinal trocado no lugar de Ro^2; e o quarto $\frac{bb}{a^4}o^3$, também com seu sinal trocado, no lugar de So^3, e seus coeficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$, e $\frac{bb}{a^4}$ devem ser colocados no lugar de Q, R, e S na regra precedente. Isto feito, a densidade do meio ficará como

$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{\left(\mathrm{I} + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}\right)}}$$

ou

$$\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\left(aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}\right)}},$$

isto é, se em VZ você tomar VY igual a VG, como $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{XY}}$, pois aa e $\frac{m^2}{n^2}a^2 - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ são os quadrados de XZ e ZY. A razão da resistência para a gravidade, no entanto, é aquela de 3XY para 2YG, e a velocidade é aquela com a qual o corpo descreveria a parábola cujo vértice é G, diâmetro DG, *latus rectum* $\frac{\mathrm{XY}^2}{\mathrm{VG}}$. Suponha, portanto, que as densidades do meio em cada



um dos lugares G estão inversamente como as distâncias XY, e que a resistência em qualquer lugar G está para a gravidade como 3XY está para 2YG; e um corpo que parte do lugar A, com uma velocidade devida, vai descrever a hipérbole AGK. Q.E.I.

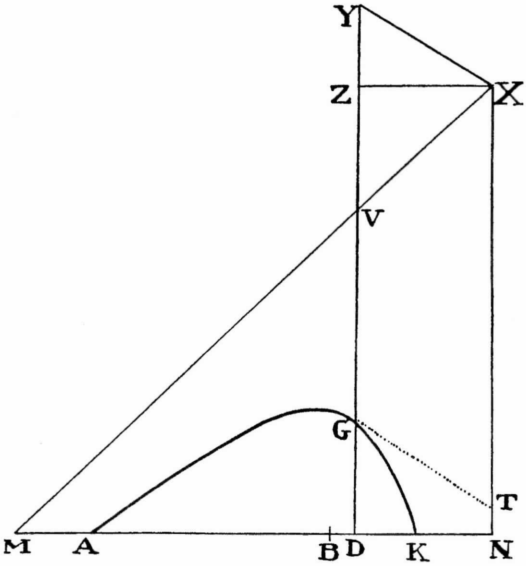
Ex. 4. Suponha, indefinidamente, ser a linha AGK uma hipérbole descrita com o centro X e as assíntotas MX e NX, de forma que, tendo construído o retângulo XZDN, cujo lado ZD corta a hipérbole em G e sua assíntota em V, VG possa ser inversamente como qualquer potência DN^n da linha ZX ou DN, cujo índice é o número *n*: ache a densidade do meio no qual um corpo projetado vai descrever esta curva.

Coloque A, O e C no lugar de BN, BD e NX, respectivamente, e esteja VZ para XZ ou DN assim como *d* está para *e*, sendo VG igual a $\frac{bb}{DN^n}$; DN será então igual a A - O, $VG = \frac{bb}{(A-C)^n}$, $VZ = \frac{d}{e}(A-O)$ e GD ou NX - VZ - VG igual a $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{(A-O)^n}$. Seja o termo $\frac{bb}{(A-O)^n}$ resolvido numa série infinita

$$\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}} \cdot O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}} \cdot bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} \cdot bbO^3$$

etc., e GD vai ser igual a

$$C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3 \text{ etc.}$$



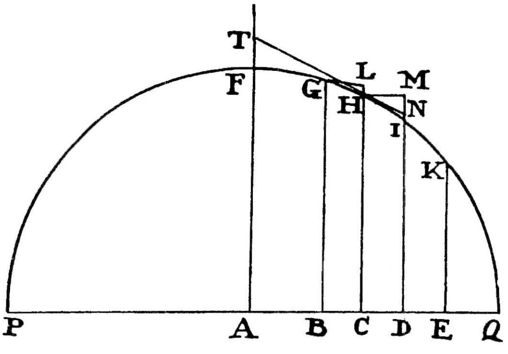
O segundo termo $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ desta série é para ser utilizado no lugar de Q*o*, o terceiro $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ no lugar de R*oo*, o quarto $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO$ no lugar de So^3. Assim, a densidade do meio $\frac{S}{R\sqrt{(I+QQ)}}$, em qualquer lugar G, será

$$\frac{n+2}{3\sqrt{\left(A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}\right)}}$$

e, portanto, se em VZ você tomar VY igual a *n*xVG, esta densidade é reciprocamente como XY, pois A^2 e $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ são os quadrados de XZ e ZY. A resistência no mesmo lugar G, no entanto, está para a força da gravidade como 3S $\frac{XY}{A}$ está para 4RR, isto é, como XY está para $\frac{2nn+2n}{n+2}$ VG. E a velocidade é a mesma com a qual o corpo lançado iria se mover numa parábola cujo vértice é G, diâmetro GD e *latus rectum* $\frac{1+QQ}{R}$ ou $\frac{2XY^2}{(nn+n)\cdot VG}$. Q.E.I.

Escólio

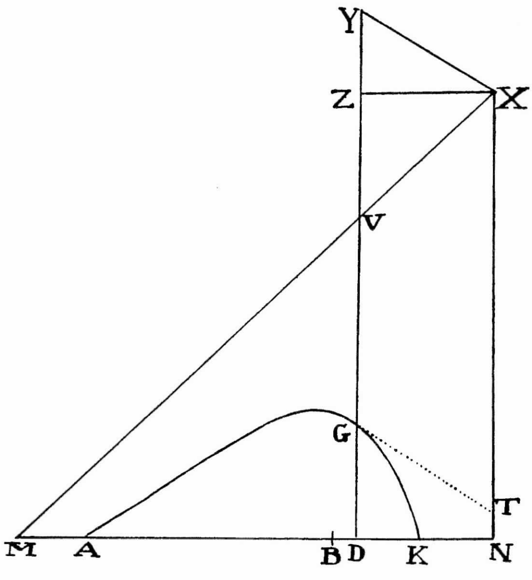
Da mesma forma que a densidade do meio resulta em $\frac{S \cdot AC}{R \cdot HT}$, no Corolário I, se a resistência é colocada como qualquer potência V^n da velocidade V, a densidade do meio resultará em $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \cdot \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$.



E, portanto, se pode ser encontrada uma curva, tal que possa ser dada a razão de $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ para $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1}$, ou de $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ para $(I + QQ)^{n-1}$, o corpo, num meio homogêneo, cuja resistência é como a potência V^n da velocidade V, vai mover-se nesta curva. Mas retornemos às curvas mais simples.

Não pode haver movimento em uma parábola exceto em meios sem resistência, mas nas hipérboles aqui descritas ele é produzido por uma resistência contínua. É evidente, portanto, que a linha percorrida por um projétil em um meio uniformemente resistente aproxima-se mais destas hipérboles do que de uma parábola. Esta linha é certamente do tipo hiperbólico, mas perto do vértice ela é mais distante das assíntotas, e nas partes remotas do vértice aproxima-se mais delas do que estas hipérboles aqui descritas. A diferença, contudo, não é tão grande entre uma e outra que não permita que estas últimas possam ser utilizadas comodamente na prática no lugar das primeiras. Além disso, é provável que estas possam ser mais úteis do que uma hipérbole que é mais precisa e ao mesmo tempo mais complexa. Elas podem ser utilizadas, então, desta maneira:

Complete o paralelogramo XYGT. A linha reta GT vai tocar a hipérbole em G, e, portanto, a densidade do meio em G é inversamente como a

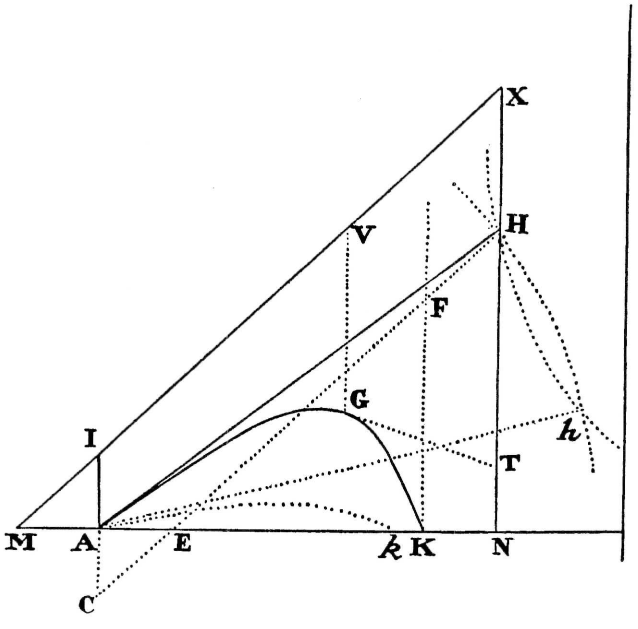


tangente GT, e a velocidade aí como $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$; além disso, a resistência está para a força da gravidade assim como GT para $\frac{2nn+2n}{n+2}$ GV.

Portanto, se um corpo lançado do lugar A, na direção da linha reta AH, descreve uma hipérbole AGK, e AH prolongado encontra a assíntota NX em H, e AI traçada paralela a ela encontra a outra assíntota MX em I, a densidade do meio em A será inversamente como AH, a velocidade do corpo como $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, e a resistência aí estará para a força da gravidade assim como AH está para $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI. De onde se deduzem as seguintes regras:

REGRA 1 – Se a densidade do meio em A, e a velocidade com a qual o corpo é lançado permanecem as mesmas, e o ângulo NAH for modificado, os comprimentos AH, AI e HX vão permanecer iguais. Portanto, se estes comprimentos forem encontrados em qualquer um dos casos, a hipérbole pode ser facilmente determinada depois, a partir de qualquer ângulo dado NAH.

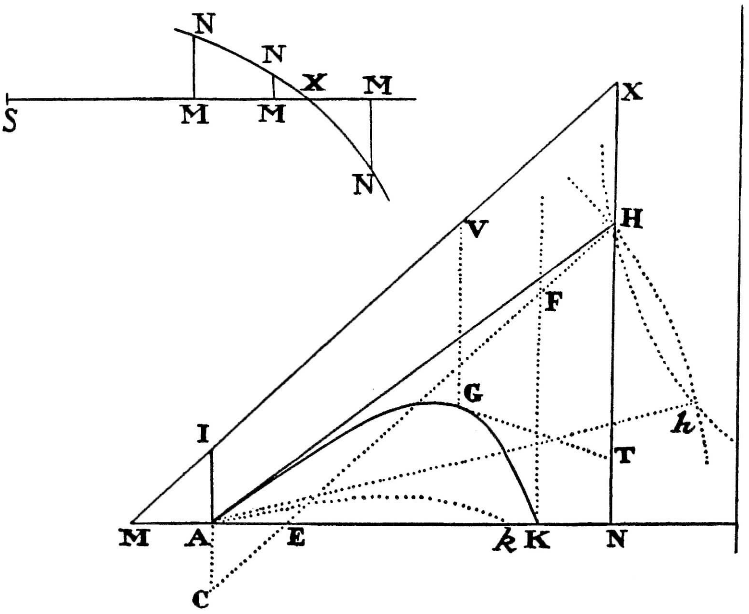
REGRA 2 – Se o ângulo NAH, e a densidade do meio em A permanecem os mesmos, e a velocidade com a qual o corpo é lançado for modificada, o comprimento AH vai continuar o mesmo, e AI vai ser modificada inversamente como o quadrado da velocidade.



REGRA 3 – Se o ângulo NAH, a velocidade do corpo em A e a aceleração da gravidade permanecerem os mesmos, e a proporção da resistência em A para a gravidade motriz for aumentada em qualquer razão, a proporção de AH para AI será aumentada na mesma razão, o *latus rectum* da parábola mencionada acima permanecendo o mesmo, e também o comprimento $\frac{AH^2}{AI}$ proporcional a ele, e, portanto, AH será diminuído na mesma razão e AI será diminuído como o quadrado daquela razão. A proporção da resistência para o peso, no entanto, é aumentada ou quando a gravidade específica é diminuída, a grandeza permanecendo igual, ou quando a densidade do meio é aumentada, ou quando, ao diminuir a grandeza, a resistência torna-se diminuída numa razão menor do que o peso.

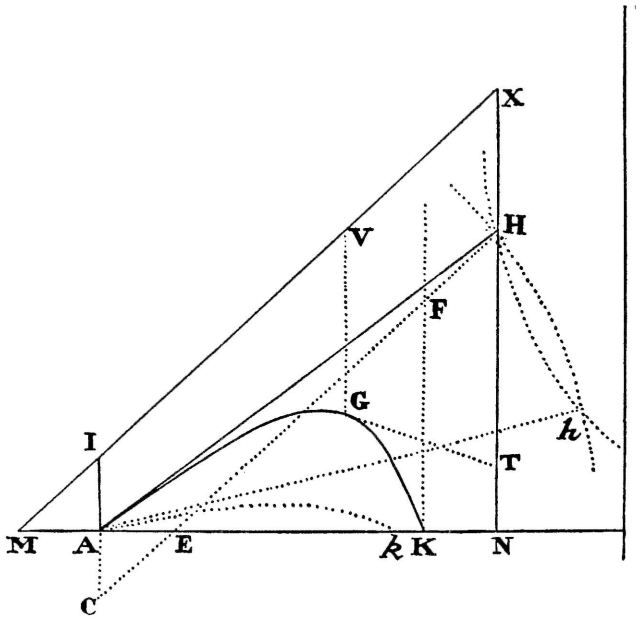
REGRA 4 – Como a densidade do meio é maior perto do vértice da hipérbole do que no lugar A, para que a densidade média possa ser preservada, a razão da menor das tangentes GT para a tangente AH deve ser encontrada, e a densidade em A aumentada numa razão um pouco maior do que aquela da metade da soma destas tangentes para a menor das tangentes GT.

REGRA 5 – Se os comprimentos AH e AI são dados, e a figura AGK deve ser descrita, prolongue HN até X, de forma que HX possa estar para AI assim como $n + 1$ está para 1; e com o centro X e as assíntotas MX e NX, descreva uma hipérbole através do ponto A, de modo que AI possa estar para qualquer das linhas VG, assim como XV^n está para XI^n.



REGRA 6 – Quanto maior for o número *n*, mais precisas serão estas hipérboles na subida do corpo desde A, e menos precisas na sua descida até K, e inversamente. A hipérbole cônica mantém uma razão média entre estas, e é mais simples do que as restantes. Portanto, se a hipérbole for deste tipo, e você tiver de encontrar o ponto K onde cai o corpo lançado em qualquer linha reta AN passando através do ponto A, prolongue AN até encontrar as assíntotas MX e NX em M e N, e tome NK igual a AM.

REGRA 7 – E daqui é derivado um método rápido para determinar esta hipérbole a partir dos fenômenos. Lance dois corpos similares e iguais com a mesma velocidade, em ângulos diferentes HAK e *hAk*, e deixe-os cair sobre o plano do horizonte em K e *k*, observando a proporção de AK para *Ak*. Seja ela assim como *d* está para *e*. Então, subindo uma perpendicular AI de qualquer comprimento, assuma qualquer comprimento AH ou *Ah*, e obtenha os comprimentos AK e A*k* graficamente, ou por régua e compasso (pela Regra 6). Se a razão de AK para A*k* for a mesma que a de *d* para *e*, o comprimento de AH foi assumido corretamente. Caso não seja, tome na linha reta indefinida SM, o comprimento SM igual ao assumido AH, e trace uma perpendicular MN igual à diferença $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ das razões multiplicada por qualquer linha reta dada. Por um método semelhante, a partir de vários comprimentos assumidos AH, você pode encontrar vários pontos N, e traçar através de todos eles uma curva regular NNXN cortando a linha reta



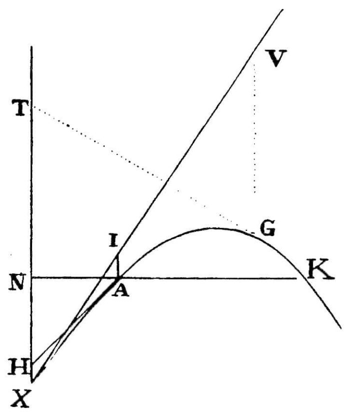
SMMM em X. Por último, assuma AH igual à abcissa SX, e daí obtenha novamente o comprimento AK; e os comprimentos, que estão para o comprimento assumido AI, e este último AH, assim como o comprimento AK conhecido pelo experimento, para o comprimento AK obtido por último, serão os comprimentos verdadeiros AI e AH, que eram para ser encontrados. Mas estes sendo dados, também será dada a força de resistência do meio no lugar A, estando ela para a força da gravidade assim como AH está para $\frac{4AI}{3}$.

Seja a densidade do meio aumentada pela Regra 4, e se a força de resistência que se acabou de encontrar for aumentada na mesma razão, ela vai tornar-se ainda mais precisa.

REGRA 8 – Encontrados os comprimentos AH e HX, seja agora requerida a posição da linha AH, de acordo com a qual um projétil lançado com aquela velocidade dada vai cair sobre qualquer ponto K. Nos pontos A e K, trace as linhas AC e KF perpendiculares ao horizonte, sendo AC traçada para baixo e igual a AI ou ½ HX. Com as assíntotas AK e KF descreva uma hipérbole, cuja conjugada passe através do ponto C; e a partir do centro A, com intervalo AH, descreva um círculo cortando esta hipérbole no ponto H. O projétil lançado na direção da linha reta AH então vai cair sobre o ponto K. Q.E.I., pois o ponto H, devido ao comprimento dado AH, deve estar em algum lugar na circunferência do círculo descrito. Trace CH encontrando AK e KF em E e F; como CH e MX são paralelos, e AC e AI iguais, AE será igual

a AM e, portanto, também igual a KN. CE, por sua vez, está para AE assim como FH está para KN, e neste caso, CE e FH também são iguais. Assim, o ponto H está sobre a curva hiperbólica descrita com as assíntotas AK e KF, cuja conjugada passa através do ponto C, sendo encontrada na intersecção desta curva hiperbólica e da circunferência do círculo descrito. Q.E.D. Deve ser observado que esta operação é a mesma, seja a linha reta AKN paralela ao horizonte, ou inclinada em relação a ele em qualquer ângulo. Além disso, a partir das duas intersecções H e *h*, surgem dois ângulos NAH e NA*h*, sendo que na prática mecânica é suficiente descrever um só círculo e depois aplicar uma régua CH, de um comprimento indeterminado, ao ponto C de tal forma que sua parte FH, interceptada entre o círculo e a linha reta FK, possa ser igual à sua parte CE colocada entre o ponto C e a linha reta AK.

O que foi dito das hipérboles pode ser facilmente aplicado às parábolas. Pois se uma parábola for representada por XAGK, tocada por uma linha reta XV no vértice X, e as ordenadas IA e VG forem como quaisquer potências XI^n e XV^n das abcissas XI e XV; trace XT, GT e AH fazendo com que XT seja paralela a VG, e faça com que GT e AH toquem a parábola em G e A: e um corpo lançado de qualquer lugar A, na direção da linha reta AH, com devida velocidade, vai descrever esta parábola, se a densidade do meio em cada um dos lugares G for inversamente como a tangente GT. Neste caso, a velocidade em G será a mesma daquela que faria com que um corpo, movendo-se num espaço sem resistência, descrevesse uma parábola cônica, tendo G como seu vértice, VG prolongado para baixo como seu diâmetro, e $\frac{2GT^2}{(nn-n) \cdot VG}$ como seu *latus rectum.* E a força de resistência em G estará para a força da gravidade como GT está para $\frac{2nn-2n}{n-2}$ VG. Portanto, se NAK representa uma linha horizontal, e tanto a densidade do meio em A quanto a velocidade com a qual o corpo é lançado permanecerem as mesmas, e o ângulo NAH for alterado de qualquer forma, os comprimentos AH, AI e HX vão permanecer os mesmos; e com isto será dado o vértice X da parábola, e a posição da linha reta XI; e tomando VG para IA assim como XV^n está para XI^n, serão dados todos os pontos G da parábola, através dos quais vai passar o projétil.

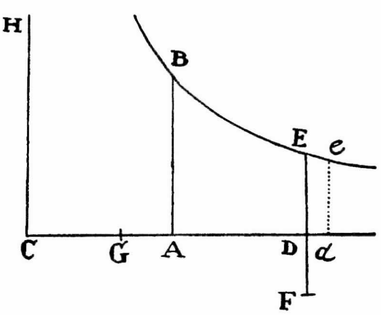


» SEÇÃO III

O movimento de corpos que são resistidos parcialmente na razão das velocidades e parcialmente como o quadrado da mesma razão

PROPOSIÇÃO XI. TEOREMA VIII

Se um corpo for resistido parcialmente na razão e parcialmente como o quadrado da razão de sua velocidade, e se move num meio similar apenas por sua força inata; e os tempos forem tomados numa progressão aritmética: então quantidades inversamente proporcionais às velocidades, aumentadas por uma certa quantidade dada, estarão numa progressão geométrica.



Com o centro C e as assíntotas retangulares CAD*d* e CH, descreva uma hipérbole BE*e*, sendo AB, DE e *de* paralelas à assíntota CH. Na assíntota CD sejam A e G pontos dados; se o tempo for representado pela área hiperbólica ABED que aumenta uniformemente, afirmo que a velocidade pode ser expressa pelo comprimento DF, cujo recíproca GD, juntamente com a linha dada CG, compõe o comprimento CD que aumenta em progressão geométrica. Suponha então ser a pequena área DE*ed* o menor aumento de

tempo dado, e Dd será inversamente como DE e, portanto, diretamente como CD. Neste caso, a diminuição de $\frac{1}{GD}$, que é (pelo Lema 2, Livro II) $\frac{Dd}{GD^2}$, também será como $\frac{CD}{GD^2}$ ou $\frac{CG + GD}{GD^2}$, isto é, como $\frac{I}{GD} + \frac{CG}{GD^2}$. Portanto, se o tempo ABED aumentar uniformemente pela adição dos intervalos dados ED*de*, segue-se que $\frac{1}{GD}$ diminui na mesma razão com a velocidade. Pois a diminuição da velocidade é como a resistência, isto é (pela suposição), como a soma de duas quantidades, sendo uma como a velocidade, e a outra como o quadrado da velocidade. A diminuição de $\frac{1}{GD}$ é como a soma das quantidades $\frac{1}{GD}$ e $\frac{CG}{GD^2}$, das quais a primeira é o próprio $\frac{1}{GD}$, e a última $\frac{CG}{GD^2}$ é como $\frac{1}{GD^2}$: assim $\frac{1}{GD}$ é como a velocidade, e as diminuições de ambos são análogas. E se a quantidade GD, inversamente proporcional a $\frac{1}{GD}$, for aumentada pela quantidade dada CG, a soma CD vai aumentar numa progressão geométrica, com o tempo ABED aumentando uniformemente. Q.E.D.

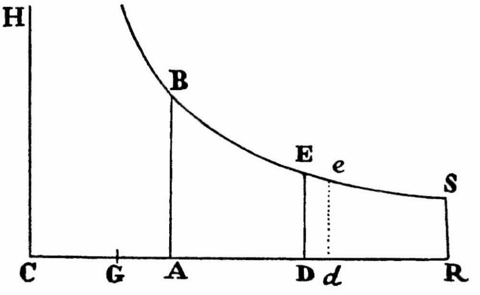
Corolário I – Portanto se, sendo dados os pontos A e G, o tempo for representado pela área hiperbólica ABED, a velocidade pode ser representada por 1/GD, o recíproco de GD.

Corolário II – E tomando GA para GD como o recíproco da velocidade no início para o recíproco da velocidade no fim de qualquer tempo ABED, o ponto G será encontrado. E este ponto sendo encontrado, a velocidade pode ser encontrada a partir de qualquer outro tempo dado.

Proposição XII. Teorema IX

O mesmo sendo suposto, afirmo que se os espaços descritos forem tomados numa progressão aritmética, as velocidades aumentadas por uma certa quantidade dada estarão numa progressão geométrica.

Na assíntota CD seja dado o ponto R, e ao traçar a perpendicular RS encontrando a hipérbole em S, seja o espaço descrito representado pela área hiperbólica RSED; a velocidade será como o comprimento GD que, junta-



mente com a linha dada CG, compõe um comprimento CD, que diminui numa progressão geométrica, enquanto o espaço RSED aumenta numa progressão aritmética.

Pois, como o aumento ED*de* do espaço é dado, a linha curta D*d*, que é a diminuição de GD, será reciprocamente como ED e, portanto, diretamente como CD, isto é, como a soma de GD e do comprimento dado CG. A diminuição da velocidade, todavia, num tempo inversamente proporcional a ela, no qual o intervalo dado de espaço D*de*E é descrito, é como a resistência e o tempo conjuntamente, isto é, diretamente como a soma de duas quantidades, das quais uma é como a velocidade, a outra como o quadrado da velocidade, e inversamente como a velocidade, portanto, diretamente como a soma de duas quantidades, uma das quais é dada, e a outra é como a velocidade. Desta maneira, a diminuição, tanto da velocidade quanto da linha GD, é simultaneamente como uma quantidade dada e uma quantidade decrescente; e, como as diminuições são análogas, as quantidades ao diminuírem serão sempre análogas, a saber, a velocidade e a linha GD. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Se a velocidade for representada pelo comprimento GD, o espaço descrito será como a área hiperbólica DESR.

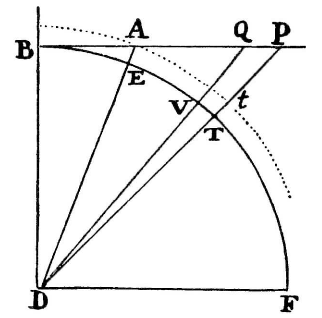
COROLÁRIO II – E se o ponto R for assumido em qualquer lugar, o ponto G será encontrado tomando GR para GD assim como a velocidade no início para a velocidade após ser percorrido qualquer espaço RSED. O ponto G sendo dado, é dado o espaço a partir da velocidade dada, e inversamente.

COROLÁRIO III – Daí que (pela Proposição XI) a velocidade é dada a partir do tempo dado e (por esta Proposição) o espaço é dado a partir da velocidade dada, o espaço será dado a partir do tempo dado, e inversamente.

PROPOSIÇÃO XIII. TEOREMA X

Supondo que um corpo, sendo atraído para baixo por uma gravidade uniforme, sobe ou desce numa linha reta, e que o mesmo é resistido parcialmente na

razão de sua velocidade, e parcialmente como o quadrado desta razão, afirmo que, se forem traçadas linhas retas paralelas aos diâmetros de um círculo e uma hipérbole através das extremidades dos diâmetros conjugados, e as velocidades forem como alguns segmentos destas paralelas traçadas a partir de um ponto dado, os tempos serão como os setores das áreas cortadas por linhas retas traçadas do centro até as extremidades dos segmentos; e inversamente.

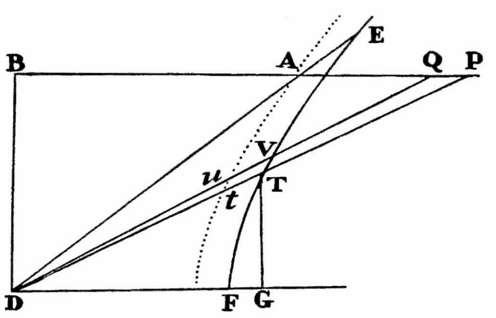


CASO 1 – Suponha inicialmente que o corpo está subindo e, a partir do centro D, com qualquer semidiâmetro DB, descreva um quadrante BETF de um círculo, e através da extremidade B do semidiâmetro DB trace a linha indefinida BAP, paralela ao semidiâmetro DF. Seja dado o ponto A nesta linha, e tome o segmento AP proporcional à velocidade. E como uma parte da resistência é como a velocidade, e uma outra parte como o quadrado da velocidade, seja toda a resistência como $AP^2 + 2BAxAP$. Ligue DA e DP, cortando o círculo em E e T, e seja a gravidade representada por DA^2, de forma que a gravidade possa estar para a resistência em P como DA^2 está para $AP^2 + 2BAxAP$; e o tempo de toda a subida será como o setor EDT do círculo.

Trace, então, DVQ, cortando o momento PQ da velocidade AP, e o momento DTV do setor DET correspondente a um momento dado de tempo. Esta diminuição PQ da velocidade estará como a soma das forças de gravidade DA^2 e de resistência $AP^2 + 2BAxAP$; isto é (pela Proposição 12, Livro II, *Elementos* de Euclides), como DP^2. Então a área DPQ, proporcional a PQ, é como DP^2, e a área DTV, que está para a área DPQ como DT^2 está para DP^2, é como a quantidade dada DT^2. Assim, a área EDT decresce uniformemente de acordo com a taxa do tempo futuro, pela subtração dos intervalos dados DTV, e é, portanto, proporcional ao tempo de toda a subida. Q.E.D.

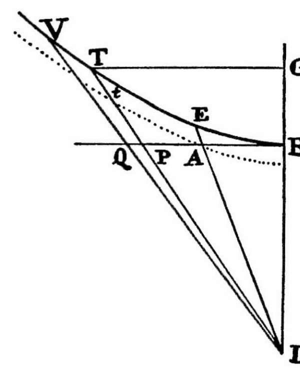
CASO 2 – Se a velocidade na subida do corpo for representada pelo comprimento AP como antes, e a resistência for tomada como $AP^2 + 2BA \times AP$; e se a força da gravidade for menor do que pode ser expressa por DA^2; tome BD de um tal comprimento, de modo que $AB^2 - BD^2$ possa ser proporcional à gravidade, e seja DF perpendicular e igual a DB, e através do vértice F descreva a hipérbole FTVE, cujos semidiâmetros conjugados são DB e DF, e que corta DA em E, DP em T e DQ em V; e o tempo de toda a subida será como o setor hiperbólico TDE.

Pois a diminuição PQ da velocidade, produzida num intervalo de tempo dado, é como a soma da resistência $AP^2 + 2BAxAP$ e da gravidade $AB^2 - BD^2$,



isto é, como BP^2 - BD^2. Mas a área DTV está para a área DPQ como DT^2 está para DP^2 e, portanto, se GT for traçada perpendicular a DF, como GT^2 ou GD^2 - DF^2 para BD^2, e como GD^2 para BP^2, e, por subtração, como DF^2 está para BP^2 - BD^2. Assim, como a área DPQ é como PQ, isto é, como BP^2 - BD^2, a área DTV será como a quantidade dada DF^2. Portanto a área EDT decresce uniformemente em cada um dos intervalos iguais de tempo, pela subtração de tantos intervalos dados DTV, sendo proporcional ao tempo. Q.E.D.

CASO 3 – Seja AP a velocidade na descida do corpo, e $AP^2 + 2BAxAP$ a força de resistência, e BD^2 - AB^2 a força da gravidade, o ângulo DBA sendo reto. Se com o centro D e o vértice principal B for descrita uma hipérbole retangular BETV cortando os prolongamentos de DA, DP e DQ em E, T e V, então o setor DET desta hipérbole será como todo o tempo de descida.



Pois o aumento PQ da velocidade e a área DPQ proporcional a ele, é como o excesso da gravidade sobre a resistência, isto é, como BD^2 - AB^2 - 2BAxAP - AP^2 ou BD^2 - BP^2. E a área DTV está para a área DPQ como DT^2 está para DP^2; e portanto, como GT^2 ou GD^2 - BD^2 está para BP^2; e como GD^2 está para BD^2 e, por subtração, BD^2 para BD^2 - BP^2. Portanto, já que a área DPQ é como BD^2 - BP^2, a área DTV será como a quantidade dada BD^2. Assim, a área EDT aumenta uniformemente nos vários intervalos iguais de tempo pela adição de tantos intervalos iguais DTV, sendo proporcional ao tempo de descida. Q.E.D.

COROLÁRIO – Se for traçado com o centro D e o semidiâmetro DA através do vértice A um arco A*t* similar ao arco ET, subtendendo similarmente o ângulo ADT, a velocidade AP estará para a velocidade que o corpo, no tempo EDT, num espaço sem resistência, pode perder em sua subida ou adquirir em sua descida, assim como a área do triângulo DAP está para a área

do setor DA*t* e, portanto, é dada a partir do tempo dado. Pois a velocidade num meio sem resistência é proporcional ao tempo e, conseqüentemente, a este setor; em um meio com resistência, ela é como o triângulo; e em ambos os meios, onde ela é menor, ela aproxima-se à razão da igualdade, como fazem o setor e o triângulo.

Escólio

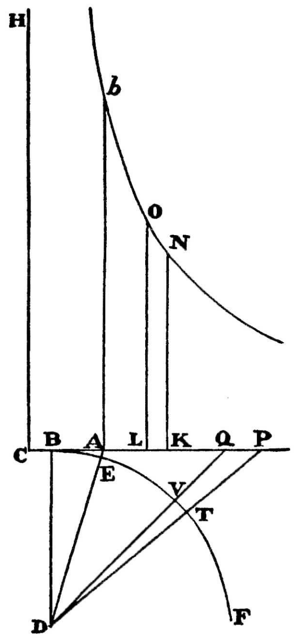
Pode-se demonstrar também este caso na subida do corpo, quando a força da gravidade é menor do que pode ser expresso por DA^2 ou $AB^2 + BD^2$, e maior do que pode ser expresso por $AB^2 - DB^2$, e deve ser expressa por AB^2. Mas passo para outros assuntos.

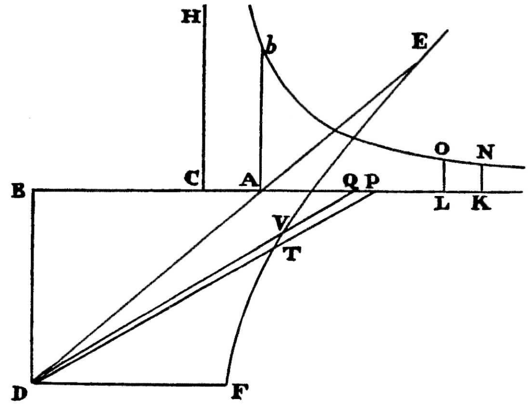
Proposição XIV. Teorema XI

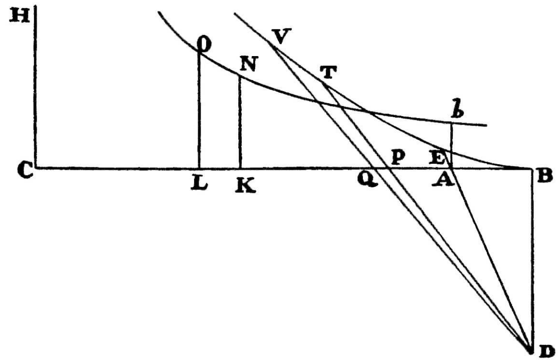
O mesmo sendo suposto, afirmo que o espaço percorrido na subida ou descida é como a diferença da área pela qual o tempo é expresso, e de alguma outra área que é aumentada ou diminuída numa progressão aritmética, se as forças compostas da resistência e da gravidade forem tomadas numa progressão geométrica.

Tome AC (nestas três figuras) proporcional à gravidade, e AK proporcional à resistência; mas se o corpo está descendo, tome-as sobre o mesmo lado do ponto A, caso contrário, no lado oposto. Trace A*b*, que está para DB assim como DB^2 está para 4BAxCA, e descreva nas assíntotas retangulares CK e CH a hipérbole *b*N; ao traçar KN perpendicular a CK, a área A*b*NK será aumentada ou diminuída numa progressão aritmética, enquanto as forças CK estão numa progressão geométrica. Afirmo, portanto, que a distância do corpo a partir de sua maior altura é como o excesso da área A*b*NK sobre a área DET.

Já que, pois, AK é como a resistência, isto é, como AP^2x2BAxAP, assuma qualquer quantidade Z dada, e coloque AK igual a $\frac{AP^2 + 2BA \cdot AP}{Z}$; então (pelo Lema 2 deste livro), o momento KL de AK será igual a $\frac{2PQ \cdot AP + 2BA \cdot PQ}{Z}$ ou $\frac{2PQ \cdot BP}{Z}$, e o momento KLON da área A*b*NK será igual a $\frac{2PQ \cdot BP \cdot LO}{Z}$ ou $\frac{PQ \cdot BP \cdot BD^3}{2Z \cdot CK \cdot AB}$.







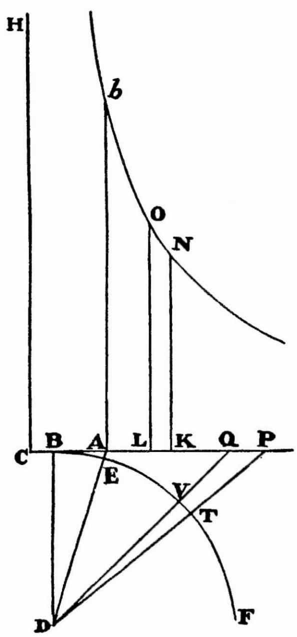
CASO 1 – Agora, se o corpo sobe e a gravidade for como $AB^2 + BD^2$, BET sendo um círculo, a linha AC, que é proporcional à gravidade, será $\frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, e DP^2 ou $AP^2 + 2BA \times AP + AB^2 + BD^2$ será $AK \times Z + AC \times Z$ ou $CK \times Z$; e, portanto, a área DTV estará para a área DPQ como DT^2 ou DB^2 está para $CK \times Z$.

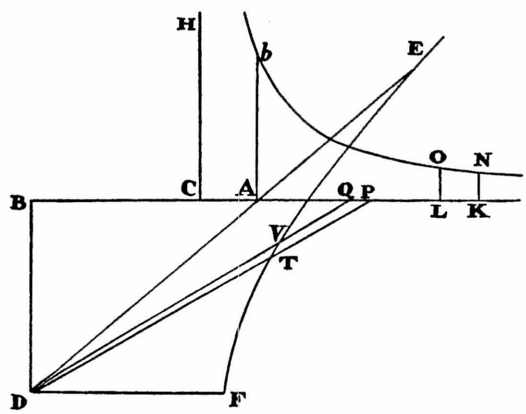
Caso 2 – Se o corpo sobe e a gravidade é como $AB^2 - BD^2$, a linha AC será $\frac{AB^2 - BD^2}{Z}$, e DT^2 estará para DP^2 assim como DF^2 ou DB^2 está para $BP^2 - BD^2$ ou $AP^2 + 2BA \times AP + AB^2 - BD^2$, isto é, para $AK \times Z + AC \times Z$ ou $CK \times Z$. Assim, a área DTV estará para a área DPQ assim como DB^2 está para $CK \times Z$.

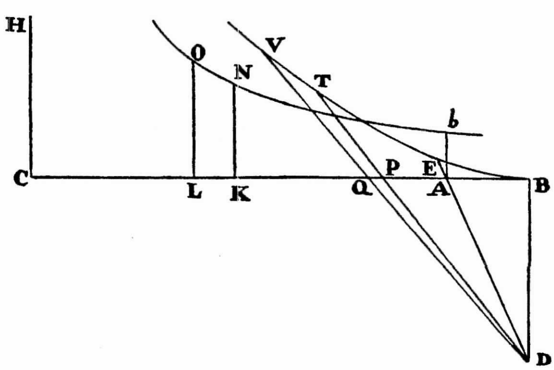
CASO 3 – Pelo mesmo raciocínio, se o corpo desce, e portanto a gravidade é como $BD^2 - AB^2$, e a linha AC torna-se igual a $\frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, a área DTV estará para a área DPQ assim como DB^2 está para $CK \times Z$, do mesmo modo que acima.

Como, portanto, estas áreas estão sempre nesta razão, se no lugar da área DTV, pela qual é expresso o momento do tempo, sempre igual a si pró-

prio, for colocado qualquer retângulo determinado, como BDx*m*, a área DPQ, isto é, ½ BDxPQ, estará para BDx*m* assim como CKxZ está para BD^2. Portanto PQxBD^3 torna-se igual a 2BDx*m*xCKxZ, e o momento KLON da área A*b*NK, encontrado anteriormente, torna-se $\frac{BP\,.\,BD\,.\,m}{AB}$. Da área DET subtraia seu momento DTV ou BDx*m*, restando, assim, $\frac{AP\,.\,BD\,.\,m}{AB}$. Portanto, a diferença dos momentos, isto é, o momento da diferença das áreas, é igual a $\frac{AP\,.\,BD\,.\,m}{AB}$ e (devido à quantidade dada $\frac{BD\,.\,m}{AB}$), como a velocidade de AP, isto é, como o momento do espaço que o corpo descreve na sua subida ou descida. Assim, a diferença das áreas e este espaço, aumentando ou diminuindo por momentos proporcionais, e começando juntos ou desaparecendo juntos, são proporcionais. Q.E.D.







Corolário – Se o comprimento que surge ao aplicar a área DET à linha BD for chamado M, e um outro comprimento V for tomado naquela razão para o comprimento M que a linha DA tem para a linha DE, o espaço

que um corpo descreve, num meio com resistência, em toda sua subida ou descida, estará para o espaço que um corpo, num meio sem resistência, ao cair a partir do repouso, pode descrever no mesmo tempo, como a diferença das áreas acima para $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$ e, portanto, é dado a partir do tempo dado. Pois o espaço num meio sem resistência é como o quadrado do tempo, ou como V^2; e, como BD e AB são dados, como $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$. Esta área é igual à área $\frac{DA^2 \cdot BD \cdot M^2}{DE^2 \cdot AB}$ e o momento de M é *m*, portanto, o momento desta área é $\frac{DA^2 \cdot BD \cdot 2M \cdot m}{DE^2 \cdot AB}$. Mas este momento está para o momento da diferença das áreas acima DET e A*b*NK, ou seja, para $\frac{AP \cdot BD \cdot m}{AB}$, assim como $\frac{DA^2 \cdot BD \cdot M}{DE^2}$ está para ½ BDxAP, ou como $\frac{DA^2}{DE^2}$ por DET está para DAP; e, portanto, quando as áreas DET e DAP são mínimas, na razão da igualdade. Desse modo, a área $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$ e a diferença das áreas DET e A*b*NK, quando mínimas, têm momentos iguais, portanto são iguais. Como também as velocidades e os espaços em ambos os meios descritos juntos, no início da descida ou no final da subida, aproximam-se da igualdade, então um está para o outro como a área $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$, e a diferença das áreas DET e A*b*NK; e além disso, como o espaço, num meio sem resistência, é continuamente como $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$, e o espaço, num meio com resistência, é continuamente como a diferença das áreas DET e A*b*NK, segue-se necessariamente que os espaços, em ambos os meios, descritos em quaisquer tempos iguais, estão um para o outro assim como a área $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$, e a diferença das áreas DET e A*b*NK.

Q.E.D.

Escólio

A resistência dos corpos esféricos em fluidos decorre parcialmente da tenacidade, parcialmente do atrito e parcialmente da densidade do meio. E esta parte da resistência que surge da densidade do meio é, como eu dis-

se, como o quadrado da velocidade; a outra parte, que surge da tenacidade do fluido, é uniforme, ou como o momento do tempo; e, portanto, poderíamos proceder agora para o movimento dos corpos, que são parcialmente resistidos por uma força uniforme, ou na razão dos momentos do tempo, e parcialmente como o quadrado da velocidade. Mas é suficiente ter esclarecido o caminho para esta especulação nas Proposições precedentes 8 e 9, e seus Corolários. Pois nestas Proposições, em vez da resistência uniforme feita a um corpo ascendente pela sua gravidade, podemos substituir a resistência uniforme que surge da tenacidade do meio, quando o corpo move-se apenas por sua inércia; e quando o corpo sobe numa linha reta, adicione esta resistência uniforme à força da gravidade, e subtraia-a quando o corpo desce numa linha reta. Poderíamos também considerar o movimento dos corpos que são resistidos em parte uniformemente, em parte na razão da velocidade, e em parte como o quadrado da mesma velocidade. Abri caminho para isto nas Proposições precedentes 13 e 14, nas quais a resistência uniforme que surge da tenacidade do meio pode ser substituída pela força da gravidade, ou ser composta com ela como acima. Mas me apresso a ir para outros assuntos.

» SEÇÃO IV

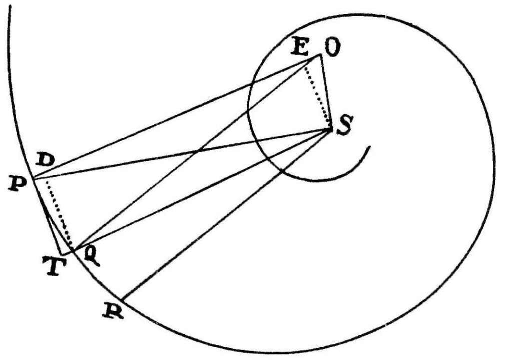
O movimento circular dos corpos em meios com resistência

LEMA III

Seja PQR uma espiral cortando todos os raios SP, SQ, SR etc. em ângulos iguais. Trace a linha reta PT tocando a espiral em qualquer ponto P e cortando o raio SQ em T; trace PO e QO perpendiculares à espiral e, encontrando-se em O, ligue SO. Afirmo que se os pontos P e Q aproximam-se e coincidem, o ângulo PSO vai tornar-se reto, e a última razão do retângulo TQx2PS para PQ^2 será a razão da igualdade.

Subtraia, pois, os ângulos iguais SPQ e SQR, a partir dos ângulos retos OPQ e OQR, de forma a sobrar os ângulos iguais OPS e OQS. Portanto, um círculo que passa através dos pontos OSP vai passar também através do ponto Q. Deixe os pontos P e Q coincidirem, de modo que este círculo vai tocar a espiral no lugar da coincidência PQ e, portanto, cortar a linha reta OP perpendicularmente. Portanto, OP vai tornar-se um diâmetro deste círculo, e o ângulo OSP, estando em um semicírculo, torna-se um ângulo reto. Q.E.D.

Trace então QD e SE perpendiculares a OP, e as razões últimas das linhas serão como segue:

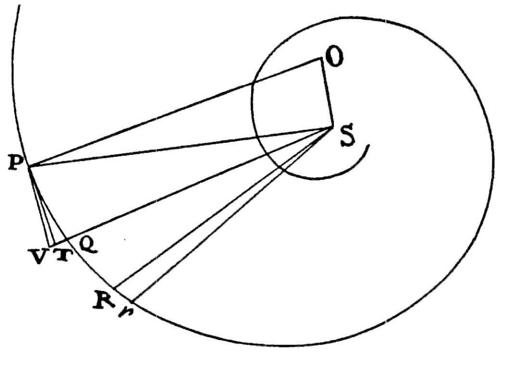


TQ : PD = TS ou PS : PE = 2PO : 2PS;
e PD : PQ = PQ : 2PO;
multiplicando junto os termos correspondentes das razões iguais,
TQ : PQ = PQ : 2PS.
De onde PQ^2 torna-se igual a TQx2PS. Q.E.D.

Proposição XV. Teorema XII

Se a densidade de um meio em cada lugar dele for inversamente como a distância dos lugares a partir de um centro imóvel; e a força centrípeta for como o quadrado da densidade, afirmo que um corpo pode girar numa espiral que corta todos os raios traçados a partir deste centro num ângulo dado.

Suponha ser tudo como no Lema precedente. Prolongue SQ até V de forma que SV possa ser igual a SP. Suponha que um corpo, num meio com resistência, descreve o arco mínimo PQ em qualquer tempo, e no dobro do tempo o arco mínimo PR; as diminuições destes arcos que surgem da resistência, ou suas diferenças dos arcos que seriam descritos num meio



sem resistência nos mesmos tempos, estarão umas para as outras como os quadrados dos tempos nos quais eles são gerados; portanto, a diminuição do arco PQ é a quarta parte da diminuição do arco PR. Assim, também se a área QS*r* for tomada igual à área PSQ, a diminuição do arco PQ será igual à metade da linha curta R*r*; e, portanto, a força de resistência e a força centrípeta estão uma para a outra como a linha curta ½ R*r* e TQ que elas geram no mesmo tempo. Como a força centrípeta com a qual o corpo é forçado em P é inversamente como SP^2, e (pelo Lema 10, Livro I) a linha curta TQ, que é gerada por esta força, está numa razão composta da razão desta força e da razão quadrada do tempo no qual é percorrido o arco PQ (pois neste caso desprezo a resistência, como sendo infinitamente menor do que a força centrípeta), segue-se que $TQ \times SP^2$, isto é (pelo último Lema), $\frac{1}{2} PQ^2 \times SP$, será como o quadrado do tempo, e portanto o tempo é como $PQ \cdot \sqrt{SP}$, e a velocidade do corpo, com a qual é descrito neste tempo o arco PQ, é como $\frac{PQ}{PQ \cdot \sqrt{SP}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, isto é, inversamente como a raiz quadrada de SP. Por um raciocínio similar, a velocidade com a qual o arco QR é descrito, é inversamente como a raiz quadrada de SQ. Agora estes arcos PQ e QR estão como as velocidades uma para a outra, isto é, como a raiz quadrada da razão de SQ para SP, ou como SQ para $\sqrt{(SP \cdot SQ)}$; e, devido aos ângulos iguais SPQ e SQ*r*, e às áreas iguais PSQ e QS*r*, o arco PQ está para o arco Q*r* assim como SQ está para SP. Tome as diferenças dos conseqüentes proporcionais, e o arco PQ estará para o arco R*r* assim como SQ está para $SP - \sqrt{(SP \cdot SQ)}$, ou ½ VQ. Pois, coincidindo os pontos P e Q, a razão última de $SP - \sqrt{(SP \cdot SQ)}$ para ½ VQ é a razão da igualdade. Como a diminuição do arco PQ que surge da resistência, ou seu dobro R*r*, é como a resistência e o quadrado do tempo conjuntamente, a resistência será como $\frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP}$. Mas PQ estava para R*r* assim como SQ estava para ½ VQ e, portanto, $\frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP}$ torna-se $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \cdot SP \cdot SQ}$, ou $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \cdot SP^2}$. Pois, coincidindo os pontos P e Q, SP e SQ também coincidem, e o ângulo PVQ torna-se reto; e, devido aos triângulos similares PVQ e PSO, PQ está para ½ VQ assim como OP está para ½ OS. Portanto, $\frac{OS}{OP \cdot SP^2}$ é como a resistência, isto é, na razão da densidade do meio em P e na razão quadrada da velocidade conjuntamente. Subtraia a razão quadrada da velocidade, a saber, a razão $\frac{1}{SP}$, e vai sobrar a densidade do meio em P, como

$\frac{OS}{OP \,.\, SP}$. Seja dada a espiral, e, devido à razão dada de OS para OP, a densidade do meio em P será como $\frac{1}{SP}$. Portanto, num meio cuja densidade é inversamente como SP, a distância ao centro, um corpo vai girar nesta espiral. Q.E.D.

COROLÁRIO I – A velocidade em qualquer lugar P é sempre a mesma com a qual um corpo num meio sem resistência com a mesma força centrípeta giraria num círculo, à mesma distância SP do centro.

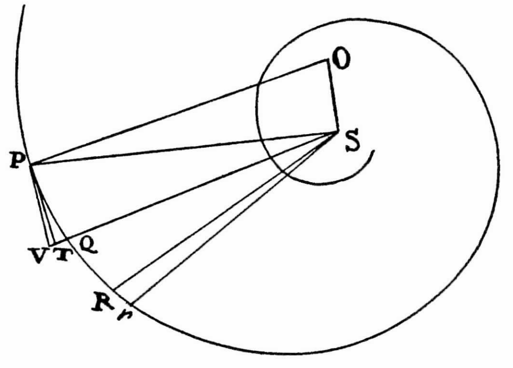
COROLÁRIO II – A densidade do meio, se for dada a distância SP, é como $\frac{OS}{OP}$, mas se esta distância não for dada, como $\frac{OS}{OP \,.\, SP}$. E assim uma espiral pode adaptar-se a qualquer densidade do meio.

COROLÁRIO III – A força da resistência em qualquer lugar P está para a força centrípeta no mesmo lugar como ½ OS está para OP. Pois estas forças estão uma para a outra como ½ R*r* e TQ, ou como $\frac{\frac{1}{4} VQ \,.\, PQ}{SQ}$ e $\frac{\frac{1}{2} PQ^2}{SP}$, isto é, como ½ VQ e PQ, ou ½ OS e OP. Sendo dada, portanto, a espiral, é dada a proporção da resistência para a força centrípeta e, inversamente, a partir desta proporção é dada a espiral.

COROLÁRIO IV – Portanto, o corpo não pode girar nesta espiral, exceto onde a força de resistência é menor do que metade da força centrípeta. Seja a resistência tornada igual a metade da força centrípeta, e a espiral vai coincidir com a linha reta PS, e nesta linha reta o corpo vai descer ao centro com uma velocidade que está para a velocidade que antes adquiriu no caso da parábola (Teor. 10, Livro I) e a descida seria feita num meio sem resistência, como a raiz quadrada da razão da unidade para o número 2. E os tempos de descida serão aqui inversamente como as velocidades e, portanto, dados.

COROLÁRIO V – Como a distâncias iguais do centro, a velocidade é a mesma na espiral PQR e na linha reta SP, e o comprimento da espiral está para o comprimento da linha reta PS em uma razão dada, a saber, na razão de OP para OS; o tempo de descida na espiral estará para o tempo de descida na linha reta SP na mesma razão dada e, portanto, dado.

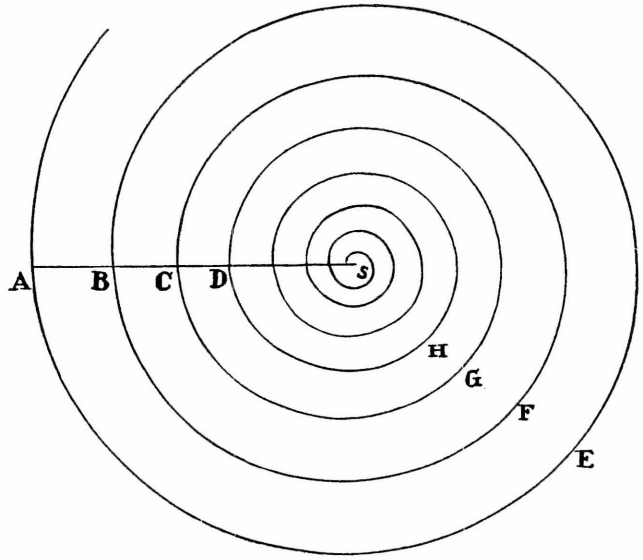
COROLÁRIO VI – Se a partir do centro S, com quaisquer dois raios dados, forem descritos dois círculos, e mantendo-se estes círculos, o ângulo que a espiral faz com o raio PS for modificado de uma forma qualquer, o número de revoluções que o corpo pode completar no espaço entre as circunferências destes círculos, dando a volta na espiral de uma circunferência



para a outra, será como $\frac{PS}{OS}$, ou como a tangente do ângulo que a espiral faz com o raio PS; além disso, o tempo das mesmas revoluções será como $\frac{OP}{OS}$, isto é, como a secante do mesmo ângulo ou, inversamente, como a densidade do meio.

COROLÁRIO VII – Se um corpo, num meio cuja densidade é inversamente como as distâncias dos lugares ao centro, gira em qualquer curva AEB ao redor deste centro e corta o primeiro raio AS no mesmo ângulo B, como antes fez em A, e isto com uma velocidade, que estará para sua primeira velocidade em A inversamente como a raiz quadrada das distâncias ao centro (isto é, como AS para uma média proporcional entre AS e BS), este corpo vai continuar a descrever inumeráveis revoluções similares BFC, CGD, etc., e por suas interseções vai dividir o raio AS em partes AS, BS, CS, DS, etc., que são continuamente proporcionais. Mas os tempos das revoluções serão diretamente como os perímetros das órbitas AEB, BFC, CGD etc., e inversamente como as velocidades nos inícios A, B, C destas órbitas, isto é, como $AS^{3/2}$, $BS^{3/2}$, $CS^{3/2}$. E o tempo total no qual o corpo vai chegar ao centro estará para o tempo da primeira revolução como a soma de todas as proporcionais contínuas $AS^{3/2}$, $BS^{3/2}$, $CS^{3/2}$, continuando *ad infinitum*, está para o primeiro termo $AS^{3/2}$, isto é, como o primeiro termo $AS^{3/2}$ está para a diferença dos dois primeiros $AS^{3/2} - BS^{3/2}$, ou como 2AS/3 está para AB, muito aproximadamente. E assim o tempo total pode ser facilmente encontrado.

COROLÁRIO VIII – Disso também pode ser deduzido, com aproximação suficiente, os movimentos dos corpos em meios cuja densidade é, ou uniforme, ou que siga qualquer outra lei designada. Descreva a partir do centro S, com raios SA, SB, SC etc., continuamente proporcionais, tantos círculos; e suponha o tempo das revoluções entre os perímetros de quaisquer dois destes círculos, no meio do qual tratamos, estar para o tempo das



revoluções entre os mesmos no meio proposto como a densidade média do meio proposto entre estes círculos está para a densidade média do meio do qual tratamos, entre os mesmos círculos, aproximadamente; e que a secante do ângulo no qual a espiral determinada acima, no meio do qual tratamos, corta o raio AS, está na mesma razão para a secante do ângulo no qual a nova espiral, no meio proposto, corta o mesmo raio; e também que o número de todas as revoluções entre os mesmos dois círculos é aproximadamente como as tangentes destes ângulos. Se isto for feito em todo lugar entre cada dois círculos, o movimento vai continuar através de todos os círculos. E desta maneira não será difícil determinar com que velocidade e em que tempo os corpos têm de girar em qualquer meio regular.

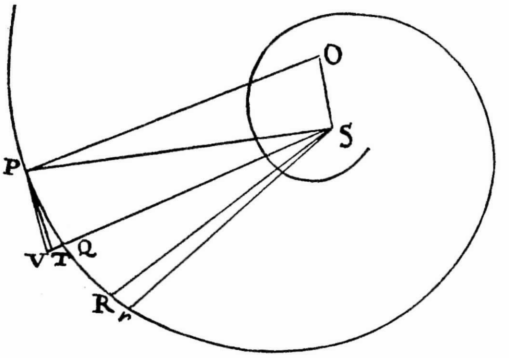
COROLÁRIO IX – E embora estes movimentos, tornando-se excêntricos, devam ser realizados em espirais que se aproximam de uma figura oval, ainda assim, assumindo que as várias revoluções destas espirais estejam nas mesmas distâncias umas das outras, e que se aproximam do centro pelos mesmos graus como a espiral descrita acima, também podemos entender como os movimentos dos corpos podem ser realizados em espirais deste tipo.

PROPOSIÇÃO XVI. TEOREMA XIII

Se a densidade do meio em cada um dos lugares for inversamente como a distância dos lugares ao centro imóvel, e a força centrípeta for inversamente

como qualquer potência da mesma distância, afirmo que o corpo pode girar numa espiral que intersecta todos os raios traçados deste centro num ângulo dado.

Isto é demonstrado da mesma forma que a Proposição precedente. Pois se a força centrípeta em P for inversamente como qualquer potência SP^{n+1} da distância SP cujo índice é $n + 1$, conclui-se, como acima, que o tempo no qual o corpo descreve qualquer arco PQ será como $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; e a resistência em P como $\frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP^n}$, ou como $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) \cdot VQ}{PQ \cdot SP^n \cdot SQ}$ e, portanto, como $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) \cdot OS}{OP \cdot SP^{n+1}}$, isto é (já que $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) \cdot OS}{OP}$ é uma quantidade dada), inversamente como SP^{n+1}. Portanto, como a velocidade é inversamente como $SP^{\frac{1}{2}n}$, a densidade em P será reciprocamente como SP.



Corolário I – A resistência está para a força centrípeta como $(1 - \frac{1}{2}\ n) \times OS$ está para OP.

Corolário II – Se a força centrípeta for inversamente como SP^3, $1 - \frac{1}{2}\ n$ será = 0; e, portanto, a resistência e densidade do meio serão nulas, como na Proposição 9, Livro I.

Corolário III – Se a força centrípeta for inversamente como qualquer potência do raio SP, cujo índice é maior do que o número 3, a resistência positiva vai ser mudada para uma negativa.

Escólio

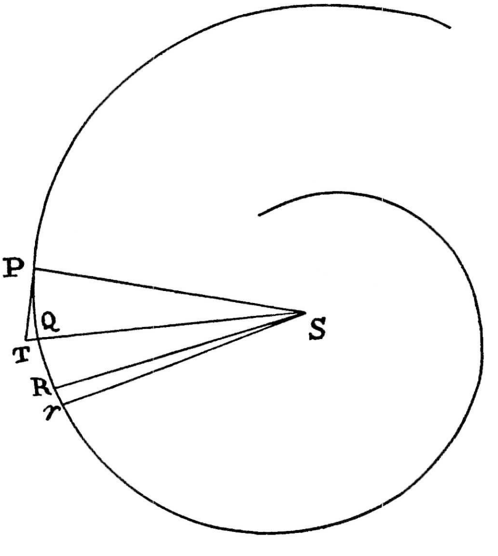
Esta Proposição e a anterior, que se relacionam a meios de densidades desiguais, devem ser entendidas como aplicadas apenas ao movimento

de corpos que são tão pequenos, que a maior densidade do meio em um lado do corpo sobre aquela do outro lado não precisa ser levada em conta. Suponho também que a resistência, o restante permanecendo igual, é proporcional à sua densidade. Portanto, em meios cuja força de resistência não é como a densidade, a densidade deve ser tão aumentada ou diminuída que, ou o excesso da resistência possa ser removido, ou a falta suprida.

Proposição XVII. Problema IV

Achar a força centrípeta e a força de resistência do meio por meio das quais um corpo vai girar numa dada espiral, sendo dada a lei de velocidade.

Seja a espiral PQR. A partir da velocidade com a qual o corpo se move no arco muito pequeno PQ, o tempo será dado; e a partir da altitude TQ, que é como a força centrípeta, e o quadrado do tempo, esta força vai ser dada. Então, a partir da diferença RS*r* das áreas PSQ e QSR descritas em iguais intervalos de tempo, a retardação do corpo será dada e a partir da retardação, será encontrada a força de resistência e a densidade do meio.



Proposição XVIII. Problema V

Sendo dada a lei da força centrípeta, achar a densidade do meio em cada um dos lugares por meio da qual o corpo possa descrever uma espiral dada.

A partir da força centrípeta deve ser encontrada a velocidade em cada lugar; então, a partir da retardação da velocidade, é encontrada a densidade do meio, como na Proposição precedente.

O método pelo qual estes Problemas devem ser tratados, no entanto, estão explicados na décima Proposição e no segundo Lema deste Livro, e não vou deter o leitor por mais tempo nestas investigações complicadas. Vou agora adicionar algumas observações relacionadas às forças dos corpos progressivos e sobre a densidade e resistência dos meios nos quais são realizados os movimentos discutidos até aqui e aqueles similares a eles.

» SEÇÃO V

A densidade e compressão dos fluidos; hidrostática

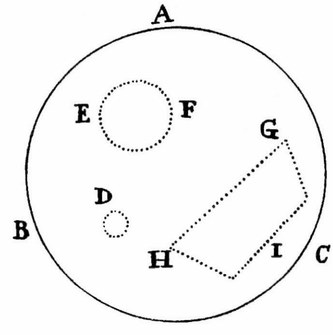
A DEFINIÇÃO DE UM FLUIDO

Um fluido é qualquer corpo cujas partes cedem a qualquer força impressa sobre ele e, ao ceder, são movimentadas facilmente entre si.

PROPOSIÇÃO XIX. TEOREMA XIV

Todas as partes de um fluido homogêneo e imóvel no interior de qualquer recipiente imóvel e comprimido em todos os lados (desprezando-se a condensação, gravidade e todas as forças centrípetas), serão igualmente pressionadas em todos os lados e permanecerão em seus lugares sem qualquer movimento surgido desta pressão.

CASO 1 – Seja um fluido incluído no recipiente esférico ABC e comprimido uniformemente em todos os lados. Afirmo que nenhuma parte dele será movida por esta pressão. Pois se qualquer parte, como D, for movida, todas as partes semelhantes à mesma distância do centro em todos os lados serão necessariamente movidas ao mesmo tempo por um movimento simi-



lar, já que a pressão delas todas é similar e igual; sendo excluído todo outro movimento que não surge desta pressão. Mas se todas estas partes aproximam-se do centro, o fluido deve ser condensado em direção ao centro, o que é contrário à suposição. Se elas se afastam dele, o fluido deve ser condensado em direção à circunferência, o que também é contrário à suposição. Também não podem elas se mover em qualquer direção mantendo suas distâncias do centro, já que, pelo mesmo motivo, elas podem mover-se numa direção contrária; mas a mesma parte não pode ser movida em direções contrárias ao mesmo tempo. Portanto, nenhuma parte do fluido vai ser deslocada de seu lugar. Q.E.D.

CASO 2 – Afirmo agora que todas as partes esféricas deste fluido são igualmente pressionadas em todos os lados. Pois seja EF uma parte esférica do fluido; se ela não for igualmente pressionada em todos seus lados, aumente a pressão menor até que ela seja pressionada igualmente em todos os lados; e suas partes (pelo Caso 1) vão permanecer em seus lugares. Mas antes do aumento da pressão, elas iriam permanecer em seus lugares (pelo Caso 1); e pela adição de uma nova pressão, elas serão movidas destes lugares, pela definição de um fluido. Ora, estas duas conclusões se contradizem. Portanto era falso dizer que a esfera EF não era igualmente pressionada em todos os lados. Q.E.D.

CASO 3 – Afirmo, além disso, que partes esféricas diferentes sofrem pressões iguais, pois as partes esféricas adjacentes pressionam umas às outras mutuamente e igualmente no ponto de contato (pela Lei III). Mas (pelo Caso 2) elas são pressionadas em todos os lados com a mesma força. Portanto, quaisquer duas partes esféricas não adjacentes serão pressionadas com a mesma força, já que uma parte esférica intermediária pode tocar a ambas. Q.E.D.

CASO 4 – Afirmo agora que todas as partes do fluido são igualmente pressionadas em toda parte. Pois quaisquer duas partes podem ser tocadas por partes esféricas em quaisquer pontos; e elas vão pressionar igualmente estas partes esféricas (pelo Caso 3), e serão, por reação, igualmente pressionadas por elas (pela Lei III). Q.E.D.

CASO 5 – Como, portanto, qualquer parte GHI do fluido é cercada pelo restante do fluido como num recipiente, e é igualmente pressionada em todos os lados, e também suas partes pressionam igualmente umas às outras, e estão em repouso em relação a elas mesmas, é evidente que todas

as partes de qualquer fluido como GHI, que é pressionado igualmente em todos os lados, pressionam umas às outras mutuamente e igualmente, e estão em repouso entre si. Q.E.D.

CASO 6 – Portanto, se este fluido for colocado num recipiente feito de uma substância que pode ceder, ou que não é rígida, e não for igualmente pressionado em todos os lados, o mesmo vai ceder a uma pressão maior, pela definição da fluidez.

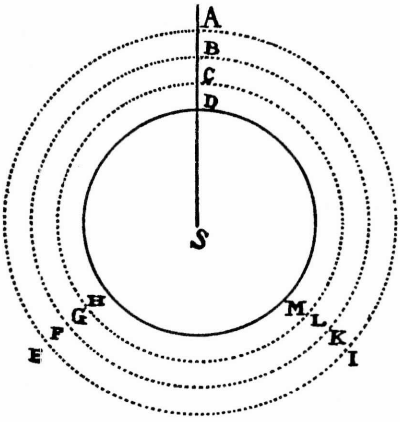
CASO 7 – E, portanto, num recipiente inflexível ou rígido, um fluido não vai suportar uma pressão maior em um lado do que sobre outro, mas vai ceder a ela, e isso num momento de tempo, já que o lado rígido do recipiente não segue o líquido que cede. Mas o fluido, ao ceder, vai pressionar o lado oposto e, assim, a pressão vai tender em todos os lados para a igualdade. E como o fluido, tão logo se afaste da parte que é mais pressionada, é suportado pela resistência do recipiente no lado oposto, a pressão vai ser reduzida à igualdade em todos os lados, num momento de tempo, sem qualquer movimento localizado; e, portanto, as partes do fluido (pelo Caso 5) vão pressionar umas às outras mutuamente e igualmente, e vão ficar em repouso entre si. Q.E.D.

COROLÁRIO – Portanto, não vai ser alterado um movimento das partes do fluido entre si devido a uma pressão comunicada à superfície externa, exceto se a forma da superfície for modificada de alguma forma, ou se todas as partes do fluido, ao pressionarem umas às outras mais ou menos intensamente, possam escorrer entre elas mesmas com maior ou menor dificuldade.

PROPOSIÇÃO XX. TEOREMA XV

Se todas as partes de um fluido esférico, homogêneo a distâncias iguais do centro, depositadas sobre um fundo concêntrico esférico, gravitam em direção ao centro do todo, o fundo vai suportar o peso de um cilindro cuja base é igual à superfície do fundo e cuja altura é a mesma que a do fluido sobre ela.

Seja DHM a superfície do fundo, e AEI a superfície superior do fluido. Seja o fluido dividido em orbes concêntricos de espessura igual, pelas inumeráveis superfícies esféricas BFK e CGL; conceba que a força da gravidade aja apenas na superfície superior de cada orbe, as ações sendo iguais nas partes iguais das superfícies. Portanto, a superfície superior AE é pressionada apenas pela força de sua própria gravidade, pela qual todas as par-



tes do orbe superior, e a segunda superfície BFK serão (pela Proposição 19), de acordo com sua medida, igualmente pressionadas. A segunda superfície BFK é pressionada da mesma forma pela força de sua própria gravidade a qual, adicionada à força anterior, faz com que a pressão dobre. A terceira superfície CGL, de acordo com sua medida, sofre a ação desta pressão, além da força de sua própria gravidade, que faz com que sua pressão triplique. De maneira semelhante, a quarta superfície recebe uma pressão quádrupla, a quinta superfície uma quíntupla, e assim por diante. A pressão agindo sobre cada superfície, então, não é como a quantidade sólida do fluido, mas como o número de orbes até a superfície superior do fluido e, além disso, é igual à gravidade do orbe mais baixo multiplicado pelo número de orbes, isto é, à gravidade de um sólido cuja última razão para o cilindro mencionado acima (quando o número dos orbes é aumentado e suas espessuras diminuídas, *ad infinitum*, de forma que a ação da gravidade da superfície inferior para a superior possa tornar-se contínua) é a razão da igualdade. Portanto, a superfície inferior suporta o peso do cilindro. Q.E.D. E por um raciocínio similar a Proposição será evidente onde a gravidade do fluido diminui em qualquer razão determinada da distância a partir do centro, e também onde o fluido é mais rarefeito acima e mais denso embaixo. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, o fundo não é pressionado pelo peso total do fluido que está sobre ele, mas suporta apenas aquela parte que está descrita na Proposição; o restante do peso sendo suportado em arco pela forma esférica do fluido.

COROLÁRIO II – A quantidade da pressão é a mesma sempre a iguais distâncias do centro, seja a superfície pressionada paralela, perpendicular, ou oblíqua ao horizonte; ou se o fluido, continuando para cima a partir da superfície comprimida, sobe perpendicularmente numa direção retilínea, ou arrasta-se obliquamente através de cavidades e canais sinuosos, sejam estas passagens regulares ou irregulares, largas ou estreitas. Que a pressão não é alterada por quaisquer destas circunstâncias pode ser inferido ao se aplicar a demonstração deste Teorema aos vários casos de fluidos.

COROLÁRIO III – A partir da mesma demonstração também pode ser concluído (pela Proposição 19) que as partes de um fluido pesado não ad-

quirem movimento entre si pela pressão do fluido que jaz sobre elas, exceto aquele movimento que surge da condensação.

Corolário IV – Portanto, se um outro corpo da mesma gravidade específica, incapaz de condensação, for imerso neste fluido, ele não vai adquirir movimento algum pela pressão do peso que jaz sobre ele: ele não vai descer nem subir, nem mudar sua forma. Se ele for esférico, ele vai permanecer assim, apesar da pressão; se ele for quadrado, ele vai permanecer quadrado, seja ele macio ou fluido, se ele flutua livremente no fluido, ou se jaz no fundo. Pois qualquer parte interna de um fluido está no mesmo estado que o corpo submerso; e o caso de todos os corpos submersos que têm o mesmo tamanho, forma e gravidade específica, é similar. Se um corpo submerso, mantendo seu peso, fosse dissolvido e colocado na forma de um fluido, este corpo, se antes tivesse subido, descido, ou assumido uma nova forma por qualquer pressão, iria agora da mesma maneira subir, descer ou adquirir nova forma, e isto porque sua gravidade e as outras causas de seu movimento permaneceram as mesmas. Mas (pelo Caso 5, Proposição 19) ele agora vai ficar em repouso e manter sua forma, acontecendo o mesmo no caso anterior.

Corolário V – Assim, um corpo que é especificamente mais pesado do que um fluido contíguo a ele vai afundar, e aquele que é especificamente mais leve vai subir e alcançar tanto movimento e mudança de forma, quanto o excesso ou falta de gravidade é capaz de produzir. Pois este excesso ou falta é a mesma coisa que um impulso agindo sobre um corpo, o qual de outra maneira está em equilíbrio com as partes do fluido, e pode ser comparado com o excesso ou falta de um peso em um dos braços de uma balança.

Corolário VI – Os corpos colocados em um fluido, nesse sentido, têm uma dupla gravidade: uma verdadeira e absoluta, a outra aparente, comum e comparativa. A gravidade absoluta é a força local com a qual o corpo tende para baixo; a gravidade relativa e comum é o excesso da gravidade com a qual o corpo tende para baixo mais do que o fluido ambiente. Pelo primeiro tipo de gravidade as partes de todos os fluidos e corpos gravitam em seus lugares próprios e, portanto, seus pesos considerados conjuntamente compõem o peso do todo. Pois o todo considerado junto é pesado, como pode ser observado em recipientes cheios de líquido; e o peso do todo é igual ao peso de todas as partes, e é, portanto, composto delas. Pelo outro tipo de gravidade os corpos não gravitam em seus lugares, isto é, comparados uns com os outros, eles não preponderam mas, impedindo uns aos outros a tendência de descer, permanecem em seus próprios lugares como se eles não fossem pesados. As coisas que estão no ar, e que não preponderam,

são comumente consideradas como não pesadas. As que preponderam são comumente consideradas pesadas, visto que elas não são suportadas pelo peso do ar. Os pesos comuns não são nada mais do que o excesso dos pesos verdadeiros além do peso do ar. De onde também, comumente, as coisas são chamadas leves quando elas são menos pesadas e, ao ceder para o ar preponderante, sobem para cima. Mas estas são leves apenas comparativamente, e não de fato, já que elas descem no vácuo. Assim, na água, corpos que por sua maior ou menor gravidade sobem ou descem, são comparativa e aparentemente pesados ou leves; e sua gravidade ou leveza comparativa e aparente é o excesso ou falta pelo qual sua gravidade verdadeira ou excede a gravidade da água, ou é excedida por ela. Mas as coisas que não descem por preponderar nem sobem ao ceder para o fluido preponderante, embora por seu peso verdadeiro elas aumentem o peso do todo, ainda assim, comparativamente, e como entendido comumente, não gravitam na água. Pois estes casos são demonstrados de forma similar.

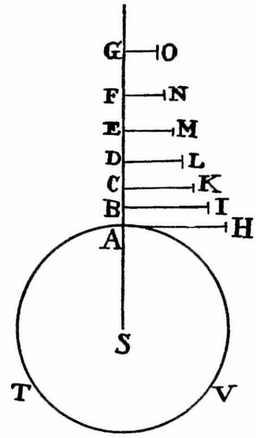
COROLÁRIO VII – Estas coisas que foram demonstradas no que concerne à gravidade também ocorrem com quaisquer outras forças centrípetas.

COROLÁRIO VIII – Portanto, se o meio no qual qualquer corpo se move sofrer a ação de sua própria gravidade ou de qualquer outra força centrípeta, e o corpo sofrer uma força maior pela mesma força, a diferença das forças é a própria força motriz que, na Proposição precedente, considerei como a força centrípeta. Mas se o corpo sofrer uma ação menor desta força, a diferença das forças torna-se uma força centrífuga, e é para ser considerada como tal.

COROLÁRIO IX – Mas como os fluidos não mudam suas formas externas ao pressionar os corpos que englobam, fica claro também (pelo Corolário, Proposição 19) que eles não vão modificar a situação de suas partes internas umas em relação às outras e, portanto, se animais forem imersos neles, e se toda sensação surgisse do movimento de suas partes, o fluido não danificaria os corpos imersos, nem excitaria qualquer sensação, exceto naqueles corpos que podem ser condensados pela compressão. E o caso é o mesmo de qualquer sistema de corpos envolvidos por um fluido compressor. Todas as partes do sistema vão ser agitadas com os mesmos movimentos como se elas fossem colocadas no vácuo, e manteriam apenas sua gravidade comparativa, salvo na medida em que o fluido possa, de alguma forma, resistir seus movimentos ou se ver obrigado a uni-los por compressão.

PROPOSIÇÃO XXI. TEOREMA XVI

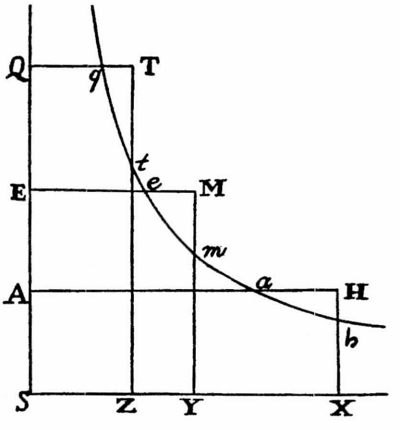
Seja a densidade de qualquer fluido proporcional à compressão, e suas partes atraídas para baixo por uma força centrípeta inversamente proporcional às distâncias ao centro. Afirmo que se estas distâncias forem consideradas continuamente proporcionais, as densidades do fluido às mesmas distâncias também serão continuamente proporcionais.



Seja ATV o fundo esférico do fluido, S o centro, SA, SB, SC, SD, SE, SF etc., distâncias continuamente proporcionais. Trace as perpendiculares AH, BI, CK, DL, EM, FN etc., que estarão como as densidades do meio nos lugares A, B, C, D, E, F; e as gravidades específicas nestes lugares serão como $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$ etc., ou, o que é igual, como $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$ etc. Suponha, em primeiro lugar, que estas gravidades sejam continuadas uniformemente de A até B, de B até C, de C até D etc., as diminuições nos pontos B, C, D etc., sendo efetuadas passo a passo. E estas gravidades multiplicadas pelas alturas AB, BC, CD etc., darão as pressões AH, BI, CK etc., pelas quais se age sobre o fundo ATV (pelo Teor. 15). Portanto, a partícula A suporta todas as pressões AH, BI, CK, DL etc., *in infinitum*, e a partícula B suporta todas as pressões, exceto a primeira AH, e a partícula C todas, exceto as duas primeiras AH e BI, e assim por diante. Portanto, a densidade AH da primeira partícula A está para a densidade BI da segunda partícula B como a soma de AH + BI + CK + DL, *in infinitum*, está para a soma de BI + CK + DL etc. E a densidade BI da segunda partícula B está para a densidade CK da terceira partícula C, como a soma de BI + CK + DL etc. está para a soma de CK + DL etc. Portanto, estas somas são proporcionais às suas diferenças AH, BI, CK etc. e, portanto, são continuamente proporcionais (pelo Lema 1 deste livro); assim, as diferenças AH, BI, CK etc., proporcionais às somas, também são continuamente proporcionais. Portanto, como as densidades nos lugares A, B, C etc. são como AH, BI, CK etc., elas também serão continuamente proporcionais. Proceda intermitentemente e, nas distâncias SA, SC, SE, continuamente proporcionais, as densidades AH, CK, EM serão continuamente proporcionais. Pelo mesmo raciocínio, a quaisquer distâncias SA, SD, SG, continuamente proporcionais, as densidades AH, DL,

GO serão continuamente proporcionais. Coincidindo os pontos A, B, C, D, E etc., de forma que a progressão das gravidades específicas a partir do fundo A até o topo do fluido seja contínua; e a quaisquer distâncias SA, SD, SG, continuamente proporcionais, as densidades AH, DL, GO, sendo todas continuamente proporcionais, vão ainda permanecer continuamente proporcionais. Q.E.D.

COROLÁRIO – Portanto, se for dada a densidade do fluido em dois lugares, como A e E, pode ser obtida sua densidade em qualquer outro lugar Q. Com o centro S, e as assíntotas retangulares SQ e SX, descreva uma hipérbole cortando as perpendiculares AH, EM, QT em *a*, *e*, e *q*, assim como as perpendiculares HX, MY e TZ, que incidem sobre a assíntota SX em *h*, *m* e *t*. Faça a área Y*mt*Z estar para a área dada Y*mh*X assim como a área dada E*eq*Q está para a área dada E*ea*A; e a linha Z*t* prolongada vai cortar a linha QT proporcional à densidade. Pois se as linhas SA, SE, SQ são continuamente proporcionais, as áreas E*eq*Q e E*ea*A serão iguais e, portanto, as áreas Y*mt*Z e X*hm*Y, proporcionais a elas, também serão iguais; e as linhas SX, SY e SZ, isto é, AH, EM e QT serão necessariamente continuamente proporcionais. E se as linhas SA, SE e SQ obtêm qualquer outra ordem na série das proporcionais contínuas, as linhas AH, EM e QT, devido às áreas hiperbólicas proporcionais, vão ter a mesma ordem numa outra série de quantidades continuamente proporcionais.

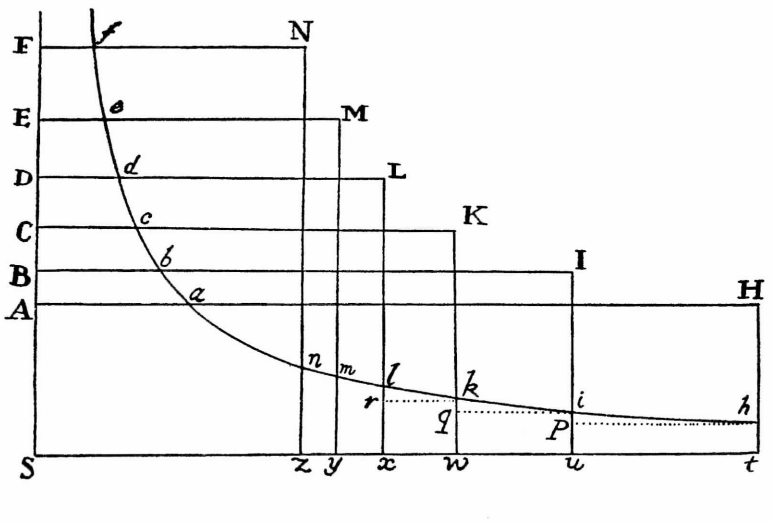


PROPOSIÇÃO XX. TEOREMA XVII

Seja a densidade de qualquer fluido proporcional à compressão, e suas partes atraídas para baixo por uma gravitação inversamente proporcional aos qua-

drados das distâncias ao centro. Afirmo que se as distâncias forem tomadas numa progressão harmônica, as densidades dos fluidos nestas distâncias estarão numa progressão geométrica.

Seja S o centro, e SA, SB, SC, SD, SE as distâncias em progressão geométrica. Trace as perpendiculares AH, BI, CK etc., que serão como as densidades do fluido nos lugares A, B, C, D, E etc., e as gravidades específicas nestes lugares serão como $\frac{AH}{SA^2}$, $\frac{BI}{SB^2}$, $\frac{CK}{SC^2}$ etc. Suponha serem estas gravidades uniformemente continuadas, a primeira de A até B, a segunda de B até C, a terceira de C até D etc., e multiplicadas pelas alturas AB, BC, CD, DE etc. ou, o que é a mesma coisa, pelas distâncias SA, SB, SC etc., proporcionais a estas alturas, resultarão em $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ etc., representando as pressões. Portanto, como as densidades são como as somas destas pressões, as diferenças AH – BI, BI – CK etc. das densidades serão como as diferenças destas somas $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ etc. Descreva com o centro S e as assíntotas SA e S*x* qualquer hipérbole, cortando as perpendiculares AH, BI, CK etc. em *a, b, c* etc., e as perpendiculares H*t*, I*u*, K*w*, incidindo sobre a assíntota S*x* em *h, i, k*; e as diferenças das densidades, *tu, uw* etc., estarão como $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, etc. E os retângulos *tu*x*th, uw*x*ui* etc. ou *tp, uq* etc., estarão como $\frac{AH \cdot th}{SA}$, $\frac{BI \cdot ui}{SB}$ etc., isto é, como A*a*, B*b* etc. Pois, pela natureza da



hipérbole, SA está para AH ou S*t* assim como *th* está para A*a* e, portanto, $\frac{AH \cdot th}{SA}$ é igual a A*a*. Por um raciocínio similar, $\frac{BI \cdot ui}{SB}$ é igual a B*b* etc. Mas A*a*, B*b*, C*c* etc., são continuamente proporcionais, e portanto proporcionais às suas diferenças A*a* - B*b*, B*b* - C*c* etc., portanto os retângulos *tp*, *uq* etc. são proporcionais a estas diferenças; assim como as somas dos retângulos *tp* + *uq* ou *tp* + *uq* + *wr* para as somas das diferenças A*a* - C*c* ou A*a* - D*d*. Suponha vários destes termos, e a soma de todas as diferenças, como A*a* - F*f*, será proporcional à soma de todos os retângulos, como *zthn*. Aumente o número de termos, e diminua as distâncias dos pontos A, B, C etc. *in infinitum*, e estes retângulos vão tornar-se iguais à área hiperbólica *zthn* e, portanto, a diferença A*a* - F*f* é proporcional a esta área. Considere agora quaisquer distâncias, como SA, SD, SF, em progressão harmônica, e as diferenças A*a* - D*d*, D*d* - F*f* serão iguais; e, portanto, as áreas *thlx*, *xlnz*, proporcionais a estas diferenças, serão iguais entre si, e as densidades S*t*, S*x*, S*z*, isto é, AH, DL, FN, serão continuamente proporcionais. Q.E.D.

Corolário – Portanto, se forem dadas quaisquer duas densidades do fluido, como AH e BI, a área *thiu*, correspondente à diferença entre elas *tu*, será dada; e, portanto, a densidade FN será encontrada em qualquer altura SF, ao tomar a área *thnz* para a área dada *thiu* como a diferença A*a* - F*f* está para a diferença A*a* - B*b*.

Escólio

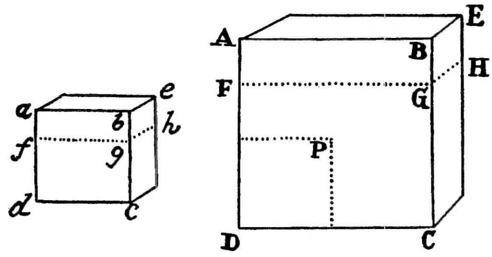
Por um raciocínio similar pode ser provado que se a gravidade das partículas de um fluido diminui como o cubo das distâncias ao centro, e os recíprocos dos quadrados das distâncias SA, SB, SC etc., (a saber, $\frac{SA^3}{SA^2}$, $\frac{SA^3}{SB^2}$, $\frac{SA^3}{SC^2}$) forem considerados numa progressão aritmética, as densidades AH, BI, CK etc., estarão numa progressão geométrica. E se a gravidade for diminuída como a quarta potência das distâncias, e os recíprocos dos cubos das distâncias (como $\frac{SA^4}{SA^3}$, $\frac{SA^4}{SB^3}$, $\frac{SA^4}{SC^3}$ etc.) forem considerados numa progressão aritmética, as densidades AH, BI, CK, etc., estarão numa progressão geométrica. E, assim, *in infinitum*. Novamente, se a gravidade das partículas do fluido for a mesma a todas as distâncias, e as distâncias estiverem numa

progressão aritmética, as densidades estarão numa progressão geométrica, como o Dr. Halley descobriu. Se a gravidade for como a distância, e os quadrados das distâncias estiverem numa progressão aritmética, as densidades estarão numa progressão geométrica. E, assim, *in infinitum.* Isso ocorrerá quando a densidade do fluido condensado pela compressão for como a força de compressão; ou, o que é a mesma coisa, quando o espaço possuído pelo fluido for inversamente como esta força. Podem ser supostas outras leis de condensação, como a de que o cubo da força de compressão pode ser como a quarta potência da densidade, ou o cubo da razão da força como a quarta potência da razão da densidade: neste caso, se a gravidade for inversamente como o quadrado da distância ao centro, a densidade vai ser inversamente como o cubo da distância. Suponha que o cubo da força compressora seja como a quinta potência da densidade; e se a gravidade for inversamente como o quadrado da distância, a densidade será inversamente como a 3/2ésima potência da distância. Suponha que a força compressora seja como o quadrado da densidade, e a gravidade inversamente como o quadrado da distância, então, a densidade será inversamente como a distância. Considerar todos os casos que podem ser oferecidos seria tedioso. Mas no que diz respeito ao nosso próprio ar, isto é provado por experimentos, que sua densidade é ou acuradamente, ou pelo menos muito aproximadamente, como a força compressora e, portanto, a densidade do ar na atmosfera da terra é como o peso de todo o ar que jaz sobre ele, isto é, como a altura do mercúrio no barômetro.

Proposição XXIII. Teorema XVIII

Se um fluido for composto de partículas que fogem umas das outras, e a densidade for como a compressão, as forças centrífugas das partículas serão inversamente proporcionais às distâncias de seus centros. E, inversamente, as partículas que fogem umas das outras com forças que são inversamente proporcionais às distâncias de seus centros, compõem um fluido elástico cuja densidade é como a compressão.

Suponha o fluido preenchendo um espaço cúbico ACE e então sendo reduzido a um espaço cúbico menor *ace* por compressão; e as distâncias das partículas entre si, mantendo uma situação similar em ambos espaços, serão como os lados AB e *ab* dos cubos; e as densidades dos meios serão inversamente como os espaços preenchidos AB^3 e ab^3. No lado plano do cubo



maior ABCD tome o quadrado DP igual ao lado plano *db* do cubo menor, e, pela suposição, a pressão com a qual o quadrado DP força o fluido incluído estará para a pressão com a qual o quadrado *db* força o fluido incluído como as densidades dos meios estão uma para a outra, isto é, como ab^3 está para AB^3. Mas a pressão com a qual o quadrado DB força o fluido incluído está para a pressão com a qual o quadrado DP força o mesmo fluido como o quadrado DB está para o quadrado DP, isto é, como AB^2 está para ab^2. Portanto, multiplicando os termos correspondentes das proporções, a pressão com a qual o quadrado DB força o fluido está para a pressão com a qual o quadrado *db* força o fluido assim como *ab* está para AB. Sejam os planos FGH e *fgh* traçados através do interior dos dois cubos, dividindo o fluido em duas partes. Estas partes vão pressionar uma à outra com as mesmas forças com as quais elas mesmas são pressionadas pelos planos AC e *ac*, isto é, na proporção de *ab* para AB, e, portanto, as forças centrífugas pelas quais estas pressões são mantidas estão na mesma razão. O número das partículas sendo igual, e a situação similar em ambos os cubos, as forças que todas as partículas exercem sobre todas, de acordo com os planos FGH e *fgh*, são como as forças que cada uma exerce sobre cada uma. Portanto, as forças que cada uma exerce sobre cada uma, de acordo com o plano FGH no cubo maior, estão para as forças que cada uma exerce sobre cada uma, de acordo com o plano *fgh* no cubo menor, assim como *ab* está para AB, isto é, inversamente como as distâncias das partículas entre si. Q.E.D.

E, inversamente, se as forças das partículas individuais são inversamente como as distâncias, isto é, inversamente como os lados dos cubos AB e *ab*, as somas das forças estarão na mesma razão, e as pressões dos lados DB e *db* estarão como as somas das forças; e a pressão do quadrado DP estará para a pressão do lado DB assim como ab^2 está para AB^2. E, multiplicando os termos correspondentes das proporções, obtém-se a pressão do quadrado DP para a pressão do lado *db* como ab^3 para AB^3; isto é, a força de compressão em um está para a força de compressão no outro assim como a densidade no primeiro está para a densidade no último. Q.E.D.

Escólio

Por um raciocínio similar, se as forças centrífugas das partículas são inversamente como o quadrado das distâncias entre os centros, os cubos das forças compressoras serão como a quarta potência das densidades. Se as forças centrífugas forem inversamente como a terceira ou quarta potência das distâncias, os cubos das forças compressoras serão como a quinta ou sexta potência das densidades. E, universalmente, se D representar a distância, e E a densidade do fluido comprimido, e as forças centrífugas forem inversamente como qualquer potência D^n da distância, cujo índice é o número n, as forças compressoras serão como as raízes cúbicas da potência E^{n+2}, cujo índice é o número $n + 2$; e inversamente. Isso se aplica às partículas cujas forças centrífugas terminam nas partículas que são próximas a elas, ou que não são muito difundidas. Temos um exemplo disto nos corpos magnéticos. A força atrativa deles é terminada aproximadamente nos corpos de seu próprio tipo que estão próximos a eles. A força do ímã é reduzida pela interposição de uma placa de ferro, quase terminando nela, pois corpos mais distantes não são tão atraídos pelo ímã quando através da placa de ferro. Se desta maneira partículas repelem outras de seu próprio tipo que estão próximas a elas, mas não exercem sua força sobre as mais remotas, tais partículas vão compor tais fluidos como os que são tratados nesta Proposição. Se a força de qualquer partícula difunde-se para todo lado *in infinitum*, vai ser necessária uma força maior para produzir uma condensação igual de uma quantidade maior do fluido. Mas, se os fluidos elásticos são realmente constituídos de partículas que repelem umas às outras, é uma questão física. Demonstramos aqui matematicamente a propriedade de fluidos que consistem de partículas deste tipo, de tal forma que os filósofos possam discutir esta questão.

» SEÇÃO VI

O movimento e a resistência dos corpos pendulares

Proposição XXIV. Teorema XIX

As quantidades de matéria nos corpos pendulares, cujos centros de oscilação estão igualmente distantes do centro de suspensão, estão numa razão composta da razão dos pesos e da razão quadrada dos tempos de oscilação no vácuo.

Pois a velocidade que uma força dada pode gerar numa matéria dada num tempo dado é diretamente como a força e o tempo, e inversamente como a matéria. Quão maior é a força ou o tempo, ou menor a matéria, maior é a velocidade gerada. Isto é manifesto a partir da Segunda Lei do Movimento. Agora, se os pêndulos têm o mesmo comprimento, as forças motrizes nos lugares igualmente distantes da perpendicular são como os pesos. Portanto, se dois corpos descrevem arcos iguais ao oscilar, e estes arcos são divididos em partes iguais; como os tempos em que os corpos descrevem cada uma das partes correspondentes dos arcos são como os tempos das oscilações completas, as velocidades nas partes correspondentes das oscilações estarão uma para a outra diretamente como as forças motrizes e os tempos completos das oscilações, e inversamente como as quantidades de matéria. Portanto, as quantidades de matéria são diretamente como as for-

ças e os tempos das oscilações, e inversamente como as velocidades. Mas as velocidades são inversamente como os tempos, e, portanto, os tempos são diretamente e as velocidades inversamente como os quadrados dos tempos. Portanto, as quantidades de matéria são como as forças motrizes e os quadrados dos tempos, isto é, como os pesos e os quadrados dos tempos. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, se os tempos são iguais, as quantidades de matéria em cada um dos corpos são como os pesos.

COROLÁRIO II – Se os pesos são iguais, as quantidades de matéria serão como os quadrados dos tempos.

COROLÁRIO III – Se as quantidades de matéria são iguais, os pesos serão inversamente como os quadrados dos tempos.

COROLÁRIO IV – Sendo os quadrados dos tempos, o restante permanecendo igual, como os comprimentos dos pêndulos, se os tempos e as quantidades de matéria forem iguais, os pesos serão como os comprimentos dos pêndulos.

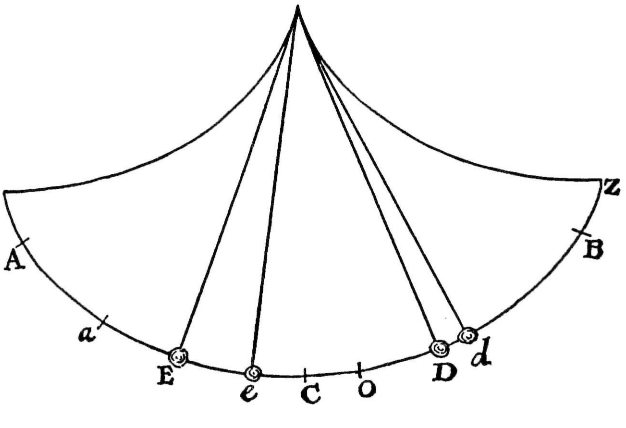
COROLÁRIO V – E, em geral, a quantidade de matéria em um corpo pendular é diretamente como o peso e o quadrado do tempo, e inversamente como o comprimento do pêndulo.

COROLÁRIO VI – Mas, num meio sem resistência, a quantidade de matéria no corpo pendular é diretamente como o peso comparativo e o quadrado do tempo, e inversamente como o comprimento do pêndulo. Pois o peso comparativo é a força motriz do corpo em qualquer meio pesado, como foi mostrado acima e, portanto, faz em tal meio sem resistência o mesmo que faz o peso absoluto no vácuo.

COROLÁRIO VII – E daqui surge um método de comparar corpos um com o outro em relação à quantidade de matéria em cada um; e de comparar os pesos do mesmo corpo em diferentes lugares e assim conhecer a variação de sua gravidade. E através de experiências realizadas com a maior precisão, sempre descobri que a quantidade de matéria nos corpos é proporcional a seus pesos.

PROPOSIÇÃO XXV. TEOREMA XX

Corpos pendulares que são resistidos, em qualquer meio, na razão dos momentos do tempo, e corpos pendulares que se movem num meio sem resistência de mesma gravidade específica, realizam suas oscilações numa ciclóide no mesmo tempo, e descrevem juntos partes proporcionais de arcos.



Seja AB o arco de uma ciclóide que um corpo D vai descrever em qualquer tempo ao oscilar num meio sem resistência. Divida este arco ao meio em C, de forma que C seja seu ponto mais baixo; e a força acelerativa com a qual o corpo é forçado em qualquer lugar D, ou *d*, ou E, será como o comprimento do arco CD, ou C*d*, ou CE. Seja esta força expressa por este mesmo arco e, como a resistência é como o momento do tempo, e, portanto, dada, seja ela representada pela parte dada CO do arco cicloidal. Considere o arco O*d* na mesma razão para o arco CD que o arco OB tem para o arco CB, e a força com a qual o corpo em *d* é forçado num meio com resistência, sendo o excesso da força C*d* acima da resistência CO, será expressa pelo arco O*d*, e, portanto, estará para a força com a qual o corpo D é forçado num meio sem resistência no lugar D, como o arco O*d* está para o arco CD; e, assim, também no lugar B, como o arco OB está para o arco CB. Portanto, se dois corpos D e *d* partem do lugar B e são forçados por estas forças; como as forças no início são como os arcos CB e OB, as velocidades iniciais e os arcos inicialmente descritos estarão na mesma razão. Sejam estes arcos BD e B*d*, e os arcos remanescentes CD e O*d* estarão na mesma razão. Portanto, as forças, sendo proporcionais a estes arcos CD e O*d*, permanecerão na mesma razão como no início e, portanto, os corpos vão continuar a descrever juntos os arcos na mesma razão. Portanto, as forças, velocidades e os arcos remanescentes CD e O*d* serão sempre como os arcos completos CB e OB, e, portanto, estes arcos remanescentes serão descritos juntos. Portanto, os dois corpos D e *d* vão chegar juntos nos lugares C e O, ou seja, aquele que se move no meio sem resistência, no lugar C, e o outro, no meio com resistência, no lugar O. Agora, como as velocidades em C e em O são como os arcos CB e OB, os arcos que os corpos descrevem quando eles vão mais longe estarão na mesma razão. Sejam estes arcos CE e O*e*. A força com a qual o corpo D é retardado num meio sem resistência em E é como CE, e a força

com a qual o corpo *d* é retardado no meio com resistência em *e*, é como a soma da força C*e* e a resistência CO, isto é, como O*e*; e, portanto, as forças com as quais os corpos são retardados são como os arcos CB e OB, proporcionais aos arcos CE e O*e*; e, portanto, as velocidades, retardadas nesta razão dada, permanecem na mesma razão dada. Por conseguinte as velocidades e os arcos percorridos com estas velocidades estão sempre um para o outro nesta razão dada dos arcos CB e OB e, portanto, se os arcos completos AB e *a*B são considerados na mesma razão, os corpos D e *d* vão descrever estes arcos juntos, e nos lugares A e *a* vão perder juntos todo seu movimento. Portanto, as oscilações completas são isócronas, ou são realizadas em tempos iguais; e quaisquer partes dos arcos, como BD e B*d* ou BE e B*e*, que são descritas juntas, são proporcionais aos arcos completos BA e B*a*. Q.E.D.

COROLÁRIO – Portanto, o movimento mais rápido num meio com resistência não acontece sobre o ponto mais baixo C, mas é encontrado neste ponto O em que é dividido ao meio o arco completo descrito B*a*. E o corpo, procedendo daí para *a*, é retardado na mesma razão com a qual ele foi acelerado antes em sua descida de B para O.

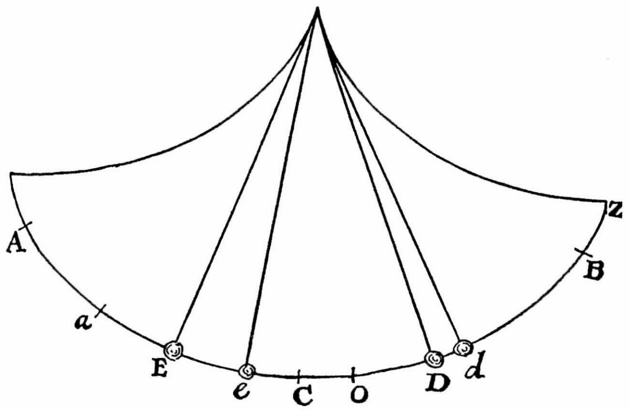
PROPOSIÇÃO XXVI. TEOREMA XXI

Corpos pendulares que são resistidos na razão da velocidade têm suas oscilações em uma ciclóide isócrona.

Pois se dois corpos, igualmente distantes de seus centros de suspensão, descrevem ao oscilar, arcos desiguais, e as velocidades nas partes correspondentes dos arcos estiverem uma para a outra como os arcos completos, as resistências, proporcionais às velocidades, estarão uma para a outra como os mesmos arcos. Portanto, se estas resistências forem subtraídas ou adicionadas às forças motrizes que surgem da gravidade que são como os mesmos arcos, as diferenças ou somas estarão uma para a outra na mesma razão dos arcos; e como os aumentos e diminuições das velocidades são como estas diferenças ou somas, as velocidades serão sempre como os arcos completos. Portanto, se as velocidades são em qualquer caso como os arcos completos, elas vão permanecer sempre na mesma razão. Mas no início do movimento, quando os corpos começam a descer e a percorrer estes arcos, as forças, que neste tempo são proporcionais aos arcos, vão gerar velocidades proporcionais aos arcos. Portanto, as velocidades serão sempre como os arcos completos a ser descritos e, assim, estes arcos vão ser descritos no mesmo tempo. Q.E.D.

PROPOSIÇÃO XXVII. TEOREMA XXII

Se corpos pendulares são resistidos como o quadrado de suas velocidades, as diferenças entre os tempos das oscilações num meio com resistência e os tempos das oscilações num meio sem resistência de mesma gravidade específica serão aproximadamente proporcionais aos arcos descritos ao oscilar.



Suponha que pêndulos iguais num meio com resistência descrevem os arcos desiguais A e B; e a resistência do corpo no arco A vai estar para a resistência do corpo na parte correspondente do arco B como o quadrado das velocidades, isto é, aproximadamente como AA está para BB. Se a resistência no arco B estivesse para a resistência no arco A como AB está para AA, os tempos nos arcos A e B seriam iguais (pela última Proposição). Portanto, a resistência AA no arco A, ou AB no arco B, causa um excesso de tempo no arco A além do tempo num meio sem resistência; e a resistência BB causa o excesso do tempo no arco B além do tempo num meio sem resistência. Mas estes excessos são aproximadamente como as forças ativas AB e BB, isto é, como os arcos A e B. Q.E.D.

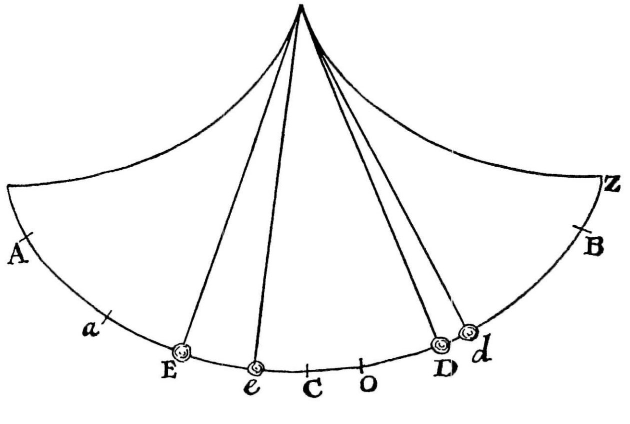
COROLÁRIO I – Portanto, a partir dos tempos de oscilação em arcos desiguais num meio com resistência, podem ser conhecidos os tempos de oscilação num meio sem resistência de mesma gravidade específica. Pois a diferença dos tempos vai estar para o excesso de tempo no arco menor além do tempo num meio sem resistência assim como a diferença dos arcos está para o arco menor.

COROLÁRIO II – As oscilações mais curtas são mais isócronas, e oscilações muito curtas são realizadas aproximadamente nos mesmos tempos como num meio sem resistência. Mas os tempos daquelas que são realizadas

em arcos maiores são um pouco maiores, pois a resistência na descida do corpo, pela qual o tempo é prolongado, é maior em proporção ao comprimento percorrido na descida do que a resistência na subida subseqüente, pela qual o tempo é diminuído. Mas o tempo das oscilações, tanto curtas quanto longas, parece ser aumentado em alguma medida pelo movimento do meio. Pois os corpos retardados são um pouco menos resistidos proporcionalmente à velocidade, e os corpos acelerados são um pouco mais resistidos do que aqueles que avançam uniformemente para a frente, pois o meio, devido ao movimento que ele recebeu dos corpos, ao ir para a frente da mesma forma que eles, é mais agitado no primeiro caso, e menos no último, cooperando, assim, mais ou menos com os corpos movidos. Portanto, ele resiste mais aos pêndulos em suas descidas, e menos em suas subidas, do que em proporção à velocidade; e a combinação destas duas causas prolonga o tempo.

Proposição XXVIII. Teorema XXIII

Se um corpo pendular, ao oscilar numa ciclóide, for resistido na razão dos momentos do tempo, sua resistência vai estar para a força da gravidade como o excesso do arco descrito em toda a descida além do arco descrito na subida subseqüente está para duas vezes o comprimento do pêndulo.

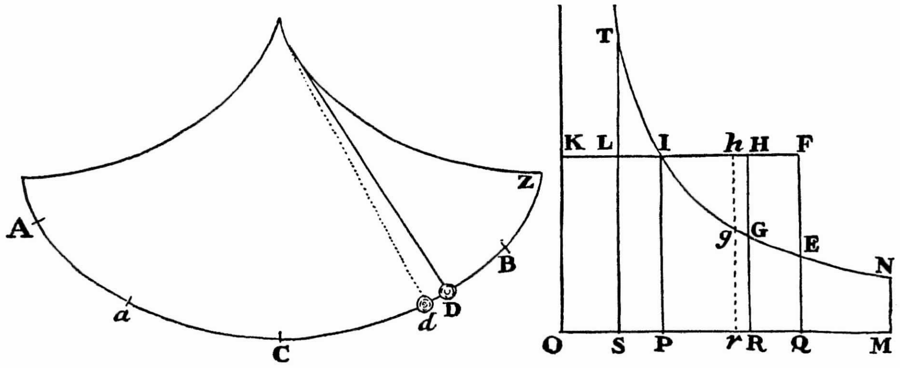


Represente por BC o arco descrito na descida, por C*a* o arco descrito na subida, e por A*a* a diferença dos arcos. Permanecendo o que foi elaborado e demonstrado na Proposição 25, a força com a qual o corpo oscilante é forçado em qualquer lugar D estará para a força de resistência assim como o arco CD está para o arco CO, que é metade da diferença A*a*. Portanto, a

força com a qual o corpo oscilante é forçado no início ou no ponto mais alto da ciclóide, isto é, a força da gravidade, estará para a resistência assim como o arco da ciclóide, entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo C, está para o arco CO; isto é (duplicando estes arcos), como o arco cicloidal completo, ou duas vezes o comprimento do pêndulo, está para o arco A*a*. Q.E.D.

Proposição XXIX. Problema VI

Supondo que um corpo oscilando numa ciclóide é resistido como o quadrado da velocidade, encontre a resistência em cada lugar.



Seja B*a* um arco descrito numa oscilação inteira, C o ponto mais baixo da ciclóide, e CZ metade do arco cicloidal completo, igual ao comprimento do pêndulo; e seja requerido encontrar a resistência do corpo em qualquer lugar D. Corte a linha reta indefinida OQ nos pontos O, S, P, Q, de tal forma que (traçando as perpendiculares OK, ST, PI, QE, e com o centro O, e as assíntotas OK e OQ, descrevendo a hipérbole TIGE cortando as perpendiculares ST, PI, QE em T, I e E, e através do ponto I traçando KF, paralela à assíntota OQ, encontrando a assíntota OK em K e as perpendiculares ST e QE em L e F) a área hiperbólica PIEQ esteja para a área hiperbólica PITS assim como o arco BC, descrito na descida do corpo, está para o arco C*a* descrito na subida; e que a área IEF esteja para a área ILT assim como OQ está para OS. Então, com a perpendicular MN corte a área hiperbólica PINM, estando esta área para a área hiperbólica PIEQ assim como o arco CZ está para o arco BC descrito na descida. E se a perpendicular RG corta a área hiperbólica PIGR, que estará para a área PIEQ como qualquer arco CD está para o arco BC descrito em toda a descida, a resis-

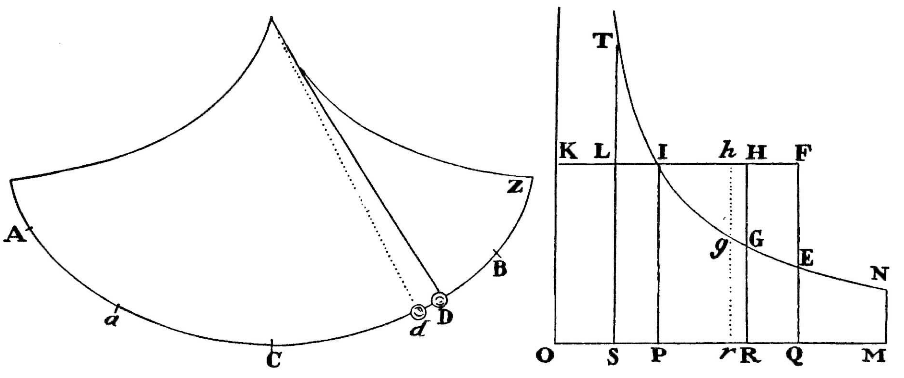
tência em qualquer lugar D vai estar para a força da gravidade como a área $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH está para a área PINM.

Pois como as forças decorrentes da gravidade que atuam sobre o corpo nos lugares Z, B, D e *a* são como os arcos CZ, CB, CD e C*a*, e estes arcos são como as áreas PINM, PIEQ, PIGR e PITS; faça com que estas áreas representem os arcos e as forças, respectivamente. Seja D*d* um espaço muito pequeno descrito pelo corpo na sua descida e seja ele expresso pela área muito pequena RG*gr*, compreendida entre as paralelas RG e *rg*; prolongue *rg* para *h*, de forma que GH*hg* e RG*gr* sejam as diminuições contemporâneas das áreas IGH e PIGR. E o aumento GH*hg* – $\frac{Rr}{OQ}$ IEF, ou R*r* · HG – $\frac{Rr}{OQ}$ IEF, da área $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH estará para a diminuição RG*gr*, ou R*r* · RG, da área PIGR, assim como HG - $\frac{IEF}{OQ}$ está para RG; e, portanto, como ORxHG - $\frac{OR}{OQ}$ IEF está para ORxGR ou OPxPI, isto é (devido às quantidades iguais ORxHG, ORxHR - ORxGR, ORHK - OPIK, PIHR e PIGR + IGH), como PIGR + IGH - $\frac{OR}{OQ}$ IEF está para OPIK. Portanto, se a área $\frac{OR}{OQ}$ IEF - IGH for chamada Y, e sendo dada RG*gr*, a diminuição da área PIGR, o aumento da área Y será como PIGR - Y.

Então, se V representa a força decorrente da gravidade, proporcional ao arco CD a ser descrito, pela qual o corpo sofre a ação em D, e R representa a resistência, V - R será a força total que age sobre o corpo em D. Portanto, o aumento da velocidade é como V - R e o intervalo de tempo no qual ele é gerado conjuntamente. Mas a própria velocidade é diretamente como o aumento contemporâneo do espaço descrito e inversamente como o mesmo intervalo de tempo. Portanto, como a resistência é, pela suposição, como o quadrado da velocidade, o aumento da resistência será (pelo Lema 2) como a velocidade e o aumento da velocidade, isto é, como o momento do espaço e V - R conjuntamente; e, portanto, se o momento do espaço for dado, como V – R, isto é, se no lugar da força V colocamos a expressão PIGR, e a resistência R for expressa por qualquer outra área Z, como PIGR - Z.

Portanto, a área PIGR diminuindo uniformemente pela subtração de momentos dados, a área Y aumenta em proporção a PIGR - Y, e a área Z em proporção a PIGR - Z. E, portanto, se as áreas Y e Z começam juntas, e no início são iguais, pela adição de momentos iguais, continuarão a ser iguais; e da mesma maneira diminuindo por momentos iguais, vão desapa-

recer juntas. E, inversamente, se elas começam e desaparecem juntas, elas terão momentos iguais, sendo sempre iguais. Pois, se a resistência Z for aumentada, então a velocidade junto com o arco C*a*, descrito na subida do corpo, diminuirão; e o ponto no qual cessa todo o movimento junto com a resistência, aproximando-se do ponto C, então, a resistência desaparecerá mais cedo do que a área Y. E o contrário vai acontecer quando a resistência é diminuída.



A área Z começa e termina onde a resistência é nula, isto é, no início do movimento onde o arco CD é igual ao arco CB, e a linha reta RG incide sobre a linha reta QE; e no final do movimento onde o arco CD é igual ao arco C*a*, e RG incide sobre a linha reta ST. E a área Y ou $\frac{OR}{OQ}$ IEF - IGH também começa e termina onde a resistência é nula e, portanto, onde $\frac{OR}{OQ}$ IEF e IGH são iguais; isto é (pela construção), onde a linha reta RG incide sucessivamente sobre as linhas retas QE e ST. Portanto, estas áreas começam e desaparecem juntas, sendo sempre iguais. Logo, a área $\frac{OR}{OQ}$ IEF - IGH é igual à área Z, pela qual é expressa a resistência, estando para a área PINM, pela qual é expressa a gravidade, como a resistência está para a gravidade. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, a resistência no lugar mais baixo C está para a força da gravidade assim como a área $\frac{OP}{OQ}$ IEF está para a área PINM.

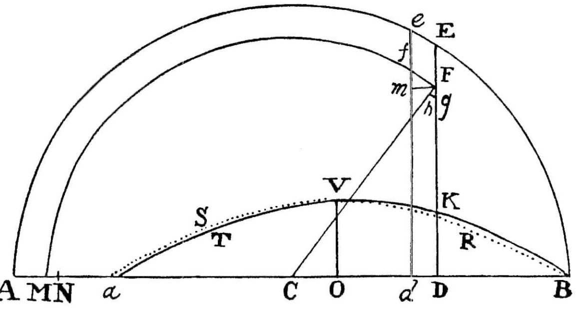
COROLÁRIO II – Mas ela torna-se a maior onde a área PIHR está para a área IEF assim como OR está para OQ. Pois, neste caso, seu momento (isto é, PIGR - Y) torna-se nulo.

COROLÁRIO III – Logo, também pode ser conhecida a velocidade em cada lugar, pois varia como a raiz quadrada da resistência e, no início do movimento, sendo igual à velocidade do corpo oscilando na mesma ciclóide sem qualquer resistência.

Contudo, devido à dificuldade do cálculo pelo qual são obtidas por esta Proposição a resistência e a velocidade, achamos adequado acrescentar a Proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO XXX. TEOREMA XXIV

Se uma linha reta aB *for igual ao arco de uma ciclóide que um corpo oscilando descreve, e em cada um de seus pontos* D *forem levantadas as perpendiculares* DK, *que devem estar para o comprimento do pêndulo assim como a resistência do corpo nos pontos correspondentes do arco está para a força da gravidade, afirmo que a diferença entre o arco descrito em toda a descida e o arco descrito em toda a subida subseqüente multiplicada pela metade da soma dos mesmos arcos será igual à área* BK*a que todas estas perpendiculares ocupam.*



Seja o arco da ciclóide, descrito em uma oscilação inteira, expresso pela linha reta *a*B, igual a ele, e o arco que teria sido descrito no vácuo pelo comprimento AB. Divida ao meio AB em C, e o ponto C vai representar o ponto mais baixo da ciclóide, e CD será como a força decorrente da gravidade com a qual o corpo é forçado em D na direção da tangente da ciclóide, tendo a mesma razão para o comprimento do pêndulo como a força em D tem para a força da gravidade. Seja esta força, portanto, expressa pelo comprimento CD, e a força da gravidade pelo comprimento do pêndulo; e, se em DE, você tomar DK na mesma razão para o comprimento do pêndulo

assim como a resistência está para a gravidade, DK será o expoente da resistência. A partir do ponto C descreva um semicírculo BE*e*A com o intervalo CA ou CB. Suponha que o corpo descreve, no tempo mínimo, o espaço D*d*; e, levantando as perpendiculares DE e *de*, encontrando a circunferência em E e em *e*, elas serão como as velocidades que o corpo ao descer num vácuo do ponto B iria adquirir nos lugares D e *d*. Isto aparece pela Proposição 52, Livro I. Portanto, sejam estas velocidades expressas por estas perpendiculares DE e *de* e seja DF a velocidade que ele adquire em D ao cair de B no meio com resistência. E, se a partir do centro C, com o intervalo CF, descrevermos o círculo F*f*M encontrando as linhas retas *de* e AB em *f* e em M, então M será o lugar para o qual ele iria subir desde então, sem mais resistência, e *df* a velocidade que ele iria adquirir em *d*. Logo, se F*g* representa o momento da velocidade que o corpo D perde devido à resistência do meio, ao descrever o espaço mínimo D*d*; e CN for considerado igual a C*g*, então N será o lugar para o qual o corpo iria subir, se não encontrasse mais resistência, e MN será a diminuição da subida decorrente da perda desta velocidade. Trace F*m* perpendicular a *df*, e a diminuição F*g* da velocidade DF gerada pela resistência DK estará para o aumento *fm* da mesma velocidade gerado pela força CD, assim como a força geradora DK está para a força geradora CD. Mas devido aos triângulos similares F*mf*, F*hg* e FDC, *fm* está para F*m* ou D*d* assim como CD está para DF; e, pela multiplicação dos termos correspondentes, F*g* está para D*d* assim como DK está para DF. Também F*h* está para F*g* assim como DF está para CF, e, novamente por multiplicação dos termos correspondentes, F*h* ou MN estão para D*d* assim como DK está para CF ou CM. Portanto, a soma de todo MNxCM será igual à soma de todo D*d*xDK. No ponto móvel M suponha sempre ser levantada uma ordenada retangular igual ao CM indeterminado, o qual é multiplicado pelo comprimento total A*a* por um movimento contínuo; e o trapézio descrito por este movimento, ou o retângulo A*a* x ½ *a*B, semelhante a ele, será igual à soma de todos MNxCM e, portanto, à soma de todos D*d*xDK, isto é, à área BKVT*a*. Q.E.D.

COROLÁRIO – Logo, pode ser derivada aproximadamente a proporção da resistência para a gravidade a partir da lei de resistência e da diferença A*a* dos arcos C*a* e CB.

Pois se a resistência DK for uniforme, a figura BKT*a* será um retângulo sob B*a* e DK e, portanto, o retângulo sob ½ B*a* e A*a* será igual ao retângulo sob B*a* e DK, e DK será igual a ½ A*a*. Portanto, como DK representa a resistência, e o comprimento do pêndulo representa a gravidade, a resistência estará para a gravidade assim como A*a*/2 está para o comprimento do pêndulo, como demonstrado na Proposição 28.

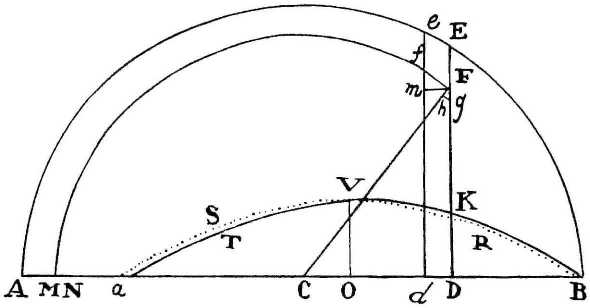
Se a resistência for como a velocidade, a figura BKT*a* será aproximadamente uma elipse. Pois se um corpo, num meio sem resistência, deve descrever o comprimento BA numa oscilação inteira, a velocidade em qualquer lugar D seria como a ordenada DE do círculo descrito sobre o diâmetro AB. Portanto, como B*a* no meio com resistência, e BA no meio sem resistência, são descritos aproximadamente nos mesmos tempos e, portanto, as velocidades em cada um dos pontos B*a* estão para as velocidades nos pontos correspondentes do comprimento BA aproximadamente como B*a* está para BA, a velocidade no ponto D no meio com resistência será como a ordenada do círculo ou elipse descritos sobre o diâmetro B*a*. Portanto, a figura BKVT*a* será aproximadamente uma elipse. Como a resistência é suposta proporcional à velocidade, suponha que OV representa a resistência no ponto médio O. Logo, uma elipse BRVS*a* descrita com o centro O e os semi-eixos OB e OV será aproximadamente igual à figura BKVT*a*, e ao seu retângulo igual A*a*xBO. Portanto, A*a*xBO está para OVxBO assim como a área desta elipse está para OVxBO, isto é, A*a* está para OV assim como a área do semicírculo está para o quadrado do raio, ou aproximadamente como 11 para 7 e, portanto, 7/11 A*a* está para o comprimento do pêndulo assim como a resistência do corpo oscilante em O está para sua gravidade.

Agora se a resistência DK varia como o quadrado da velocidade, a figura BKVT*a* será quase como uma parábola tendo V como seu vértice e OV como seu eixo e, portanto, será aproximadamente igual ao retângulo sob 2/3 B*a* e OV. Portanto, o retângulo sob ½B*a* e A*a* é igual ao retângulo 2/3 B*a*xOV, sendo OV igual a ¾ A*a*. Logo, a resistência feita ao corpo oscilante em O está para sua gravidade assim como ¾ A*a* está para o comprimento do pêndulo.

Considero estas conclusões precisas o suficiente para usos práticos. Pois como uma elipse ou parábola BRVS*a* coincide com a figura BKVT*a* no ponto médio V, esta figura, se maior em direção à parte BRV ou Vs*a*, é menor em direção à parte contrária, sendo, portanto, aproximadamente igual a ela.

Proposição XXXI. Teorema XXV

Se a resistência exercida em um corpo oscilante em cada uma das partes proporcionais dos arcos descritos for aumentada ou diminuída numa razão dada, a diferença entre o arco descrito na descida e o arco descrito na subida subseqüente será aumentada ou diminuída na mesma razão.



Pois esta diferença surge da retardação do pêndulo pela resistência do meio e, portanto, é como toda a retardação e a resistência retardante proporcional a ela. Na Proposição precedente o retângulo sob a linha reta ½*a*B e a diferença A*a* dos arcos CB e C*a* era igual à área BKT*a*. E esta área, se o comprimento *a*B permanece inalterado, é aumentada ou diminuída na razão das ordenadas DK, isto é, na razão da resistência, sendo, portanto, como o comprimento *a*B e a resistência conjuntamente. Logo, o retângulo sob A*a* e ½*a*B é como *a*B e a resistência conjuntamente e, portanto, A*a* é como a resistência. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Assim, se a resistência for como a velocidade, a diferença dos arcos no mesmo meio será como os arcos totais descritos, e inversamente.

COROLÁRIO II – Se a resistência varia como o quadrado da velocidade, esta diferença vai variar como o quadrado do arco total, e inversamente.

COROLÁRIO III – E geralmente, se a resistência varia como a terceira ou como qualquer outra potência da velocidade, a diferença irá variar como a mesma potência do arco total, e inversamente.

COROLÁRIO IV – Se a resistência varia parcialmente como a primeira potência da velocidade e parcialmente como o quadrado da mesma, a diferença irá variar parcialmente como a primeira potência e parcialmente como o quadrado do arco total, e inversamente. Portanto, a lei e razão da resistência será a mesma para a velocidade assim como a lei e razão desta diferença para o comprimento do arco.

COROLÁRIO V – E, portanto, se um pêndulo descreve sucessivamente arcos desiguais, e pode-se achar a razão do aumento ou da diminuição desta diferença para o comprimento do arco descrito, conheceremos também a razão do aumento ou da diminuição da resistência para uma velocidade maior ou menor.

Escólio Geral

A partir destas Proposições podemos encontrar a resistência dos meios utilizando-se pêndulos que neles oscilam. Encontrei a resistência do ar com as seguintes experiências. Suspendi num gancho firme com um fio fino uma bola ou globo de madeira pesando 57⁷⁄₂₂ onças *troy* e diâmetro de 6⅞ polegadas londrinas, de forma que a distância entre o gancho e o centro de oscilação do globo era 10½ pés. Marquei no fio um ponto distante 10 pés e uma polegada do centro de suspensão, colocando ainda junto a esse ponto uma régua dividida em polegadas, com ajuda da qual observei os comprimentos dos arcos percorridos pelo pêndulo. Numerei então as oscilações nas quais o globo perderia ⅛ parte de seu movimento. Se o pêndulo era afastado da perpendicular uma distância de 2 polegadas, e então solto, de forma que em toda sua descida ele percorria um arco de 2 polegadas, e na primeira oscilação completa, composta da descida e subida subseqüente, um arco de quase 4 polegadas, o pêndulo perde ⅛ parte de seu movimento em 164 oscilações, descrevendo um arco de 1¾ polegadas na sua última subida. Se na primeira descida ele descrevia um arco de 4 polegadas, ele perdia ⅛ parte de seu movimento em 121 oscilações, de modo que descrevia um arco de 3½ polegadas em sua última subida. Se na primeira descida ele descrevia um arco de 8, 16, 32 ou 64 polegadas, ele perdia ⅛ parte de seu movimento em 69, 35½, 18½, 9⅔ oscilações, respectivamente. Portanto, a diferença entre os arcos descritos na primeira descida e na última subida era no 1º, 2º, 3º, 4º, 5º e 6º casos, ¼ ½, 1, 2, 4 e 8 polegadas, respectivamente. Divida estas diferenças pelo número de oscilações em cada caso, e numa oscilação média, na qual era descrito um arco de 3¾, 7½, 15, 30, 60 e 120 polegadas, a diferença dos arcos percorridos na descida e subida subseqüente será $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$ e $\frac{24}{29}$ partes de uma polegada, respectivamente. Mas estas diferenças nas oscilações maiores são aproximadamente como os quadrados dos arcos descritos, mas nas oscilações menores serão um pouco maiores do que nesta razão. Portanto, (pelo Corolário II, Proposição 31 deste Livro) a resistência do globo, quando ele se move muito rapidamente, varia aproximadamente como o quadrado da velocidade; e quando ele se move lentamente, em uma razão um pouco maior.

Represente por V a maior velocidade em qualquer oscilação, e sejam A, B e C quantidades dadas, e suponhamos a diferença dos arcos ser $AV + BV^{3/2} + CV^2$. Como as maiores velocidades são na ciclóide como ½ dos arcos

descritos ao oscilar, e no círculo como ½ das cordas destes arcos, portanto, em arcos iguais são maiores na ciclóide do que no círculo na razão de ½ dos arcos para suas cordas. Porém, os tempos no círculo são maiores do que na ciclóide numa razão inversamente como a velocidade. Assim, é evidente que as diferenças dos arcos (que são como a resistência e o quadrado do tempo conjuntamente) são aproximadamente as mesmas em ambas as curvas, pois na ciclóide estas diferenças devem ser, por um lado, aumentadas com a resistência em aproximadamente a razão quadrada do arco para a corda, já que a velocidade aumenta na razão simples da mesma; e, por outro lado, diminuídas com o quadrado do tempo, na mesma razão quadrada. Portanto, para reduzir estas observações à ciclóide, temos de considerar as mesmas diferenças dos arcos que foram observados no círculo, e supor as maiores velocidades análogas à metade, ou aos arcos completos, isto é, aos números ½, 1, 2, 4, 8, 16. Portanto, no 2º, 4º e 6º casos coloque 1, 4 e 16 no lugar de V e as diferenças dos arcos no 2º caso vão tornar-se $\frac{1/2}{121} = A + B + C$; no 4º caso, $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$; no 6º caso, $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$. Estas equações resolvidas fornecem A = 0,0000916, B = 0,0010847 e C = 0,0029558. Portanto, a diferença dos arcos é como $0{,}0000916V + 0{,}0010847V^{3/2} + 0{,}0029558V^2$. Logo, como (pelo Corolário, Proposição 30, aplicado a este caso) a resistência do globo no meio do arco descrito ao oscilar, onde a velocidade é V, está para seu peso assim como $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{3/2} + \frac{3}{4}CV^2$ está para o comprimento do pêndulo, se no lugar de A, B e C você colocar os números encontrados, a resistência do globo estará para seu peso como $0{,}0000583V + 0{,}0007593V^{3/2} + 0{,}0022169V^2$ está para o comprimento do pêndulo entre o centro de suspensão e a régua, isto é, para 121 polegadas. Portanto, como V no segundo caso representa 1, no 4º caso, 4 e no 6º caso, 16, a resistência vai estar para o peso do globo, no 2º caso, como 0,0030345 está para 121; no 4º, como 0,041748 está para 121; no 6º, como 0,61705 está para 121.

O arco que o ponto marcado no fio descreveu no 6º caso foi de $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, ou $119\frac{5}{29}$ polegadas. E, portanto, como o raio media 121 polegadas, e o comprimento do pêndulo entre o ponto de suspensão e o centro do globo 126 polegadas, o arco que o centro do globo percorria media $124\frac{3}{31}$ polegadas. Como a maior velocidade do corpo oscilante, em razão da resistência do ar, não acontece no ponto mais baixo do arco descrito, mas próximo do ponto médio do arco completo, esta velocidade será aproximadamente a

mesma que se o globo em toda sua descida num meio sem resistência descrevesse $62\frac{3}{62}$ polegadas, a metade deste arco, e isso numa ciclóide à qual reduzimos acima o movimento do pêndulo. Portanto, esta velocidade será igual àquela que o globo iria adquirir ao cair perpendicularmente de uma altura igual ao seno verso deste arco. Mas este seno verso na ciclóide está para este arco $62\frac{3}{62}$ assim como o mesmo arco está para duas vezes o comprimento do pêndulo, 252, e, portanto, igual a 15,278 polegadas. Logo, a velocidade do pêndulo é a mesma que um corpo iria adquirir ao cair, descrevendo em sua descida um espaço de 15,278 polegadas. Portanto, com tal velocidade o globo encontra uma resistência que está para seu peso assim como 0,61705 está para 121, ou (se somente consideramos aquela parte da resistência que está na razão quadrada da velocidade) assim como 0,56752 está para 121.

Encontrei, por meio de uma experiência hidrostática, que o peso deste globo de madeira estava para o peso de um globo de água com o mesmo tamanho assim como 55 está para 97 e, portanto, como 121 está para 213,4 na mesma razão, a resistência feita a este globo de água, movendo-se para frente com a velocidade mencionada acima, estará para seu peso assim como 0,56752 está para 213,4, isto é, assim como 1 está para $376\frac{1}{50}$. Como o peso de um globo de água, no tempo em que o globo com uma velocidade uniformemente continuada descreve um comprimento de 30,556 polegadas, vai gerar toda a velocidade no globo que cai, é evidente que a força de resistência continuada uniformemente no mesmo tempo vai retirar uma velocidade que será menor do que a outra na razão de 1 para $376\frac{1}{50}$, isto é, a $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ parte da velocidade total. E, portanto, no tempo em que o globo, com a mesma velocidade uniformemente continuada, descreveria o comprimento de seu semidiâmetro, ou $3\frac{7}{16}$ polegadas, ele perderia a $\frac{1}{3342}$ parte de seu movimento.

Também contei as oscilações em que um pêndulo perdia $\frac{1}{4}$ parte de seu movimento. Na tabela seguinte os números superiores denotam o comprimento do arco descrito na primeira descida, expressos em polegadas e em partes de uma polegada; os números intermediários denotam o comprimento do arco descrito na última subida; abaixo estão os números de oscilações. Relato esta experiência por ser mais precisa do que aquela na qual apenas $\frac{1}{8}$ parte do movimento era perdido. Deixo os cálculos para aqueles que estão dispostos a realizá-los.

Primeira descida	2	4	8	16	32	64
Última subida	1½	3	6	12	24	48
Nº de oscilações	374	272	162½	83⅓	41⅔	22⅔

Suspendi depois um globo de chumbo com 2 polegadas de diâmetro, pesando 26¼ onças *troy* pelo mesmo fio, de tal forma que entre o centro do globo e o ponto de suspensão havia um intervalo de 10½ pés, e contei as oscilações nas quais uma parte dada do movimento era perdida. A primeira das tabelas seguintes exibe o número de oscilações em que ⅛ parte do movimento inteiro foi perdido; a segunda o número de oscilações em que foi perdido ¼ parte do mesmo.

Primeira descida	1	2	4	8	16	32	64
Última subida	⅞	7/4	3½	7	14	28	56
Nº de oscilações	226	228	193	140	90½	53	30
Primeira descida	1	2	4	8	16	32	64
Última subida	¾	1½	3	6	12	24	48
Nº de oscilações	510	518	420	318	204	121	70

Selecionando na primeira tabela a 3ª, 5ª e 7ª observações, e expressando as maiores velocidades nestas observações particularmente pelos números 1, 4 e 16, respectivamente, e, geralmente, pela quantidade V como acima, observa-se que na 3ª observação, $\frac{1/2}{193} = A + B + C$; na quinta observação, $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$; na sétima observação, $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Estas equações resolvidas fornecem A = 0,001414, B = 0,000297 e C = 0,000879. Logo, a resistência do globo ao mover-se com a velocidade V estará para seu peso 26¼ onças na mesma razão que $0{,}0009V + 0{,}000208V^{3/2} + 0{,}000659V^2$ tem para 121 polegadas, o comprimento do pêndulo. E se consideramos apenas aquela parte da resistência que é como o quadrado da velocidade, ela estará para o peso do corpo assim como $0{,}000659V^2$ está para 121 polegadas. Mas esta parte da resistência no primeiro experimento estava para o peso do globo de madeira de 57 7/22 onças assim como $0{,}002217V^2$ está para 121. Portanto, a resistência do globo de madeira está para a resistência do globo de chumbo (suas velocidades sendo iguais) assim como 57 7/22 por 0,002217 está para 26¼ por 0,000659, isto é, assim como 7⅓ está para 1. Os diâmetros dos dois globos eram 6⅞ e 2 polegadas, e os quadrados destes estão um para o outro assim como 47¼ e 4, ou 11 13/16 e 1, aproxi-

madamente. Portanto, as resistências destes globos igualmente velozes eram menores do que a razão quadrada dos diâmetros. Mas ainda não consideramos a resistência do fio, que certamente foi muito considerável, devendo ser subtraída da resistência dos pêndulos aqui encontrada. Não pude determiná-la precisamente, mas encontrei-a maior do que $\frac{1}{3}$ parte da resistência total do pêndulo menor. Logo, obtive que as resistências dos globos, quando era subtraída a resistência do fio, estão aproximadamente na razão quadrada dos diâmetros, pois a razão de $7\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ para 1 - $\frac{1}{3}$, ou $10\frac{1}{2}$ para 1 não é muito diferente do que a razão quadrada dos diâmetros $11\frac{13}{16}$ para 1.

Como a resistência do fio tem um momento menor nos globos maiores, também tentei a experiência com um globo cujo diâmetro media $18\frac{3}{4}$ polegadas. O comprimento do pêndulo entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação era $122\frac{1}{2}$ polegadas, e entre o ponto de suspensão e o nó no fio, $109\frac{1}{2}$ polegadas. O arco descrito pelo nó na primeira descida do pêndulo foi de 32 polegadas. O arco descrito pelo mesmo nó na última subida após cinco oscilações foi de 28 polegadas. A soma dos arcos, ou o arco inteiro descrito numa oscilação média, foi de 60 polegadas e a diferença dos arcos, 4 polegadas. A décima parte disto, ou a diferença entre a descida e subida numa oscilação média, é $\frac{2}{5}$ de polegada. Então, assim como o raio $109\frac{1}{2}$ está para o raio $122\frac{1}{2}$, assim está o arco inteiro de 60 polegadas descrito pelo nó numa oscilação média para o arco inteiro de $67\frac{1}{8}$ polegadas descrito pelo centro do globo numa oscilação média e assim está a diferença de $\frac{2}{5}$ para uma nova diferença de 0,4475. Se o comprimento do arco descrito permanecesse o mesmo, e o comprimento do pêndulo fosse aumentado na razão de 126 para $122\frac{1}{2}$, o tempo de oscilação seria aumentado e a velocidade do pêndulo seria diminuída como a raiz quadrada desta razão, de forma que a diferença 0,4475 dos arcos descritos na descida e subida subseqüente permaneceria a mesma. Então, se o arco descrito fosse aumentado na razão de $124\frac{3}{31}$ para $67\frac{1}{8}$ esta diferença de 0,4475 seria aumentada como a raiz quadrada desta razão, tornando-se 1,5295. Isso tudo ocorreria supondo-se que a resistência do pêndulo fosse como o quadrado da velocidade. Portanto, se o pêndulo descreve todo o arco de $124\frac{3}{31}$ polegadas, e seu comprimento entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação for de 126 polegadas, a diferença dos arcos descritos na descida e subida subseqüente seria de 1,5295 polegadas. E esta diferença multiplicada pelo peso do globo pendular, que era de 208 onças, resulta em 318,136. Novamente, no pêndulo mencionado acima, feito de um globo de madeira, quando seu centro de oscilação, estando a 126 polegadas do ponto de suspensão, descreve todo o arco de $124\frac{3}{31}$ polegadas, a diferença dos arcos descritos na descida e subida foi

de $\frac{126}{121}$ para $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Isto multiplicado pelo peso do globo, que era de 57 7/22 onças, resulta em 49,396. Mas multiplico estas diferenças pelos pesos dos globos, com o objetivo de calcular suas resistências, pois as diferenças surgem das resistências, e são diretamente como as resistências e inversamente como os pesos. Portanto, as resistências são como os números 318,136 e 49,396. Mas aquela parte da resistência do globo menor, que é como o quadrado da velocidade, estava para a resistência total assim como 0,56752 está para 0,61675, isto é, como 45,453 para 49,396, enquanto que aquela parte da resistência do globo maior é quase igual a toda sua resistência, e assim estas partes são aproximadamente como 318,136 e 45,453, isto é, como 7 e 1. Mas os diâmetros dos globos são 18¾ e 6⅞ e seus quadrados 351 9/16 e 47 17/64 são como 7,438 e 1, isto é, aproximadamente como as resistências dos globos 7 e 1. A diferença destas razões é ligeiramente maior do que pode surgir da resistência do fio. Portanto, estas partes das resistências que são, quando os globos são iguais, como os quadrados das velocidades, são também, quando as velocidades são iguais, como os quadrados dos diâmetros dos globos.

Mas o maior dos globos que utilizei nestas experiências não era perfeitamente esférico e, portanto, desprezei neste cálculo, por brevidade, algumas pequenas sutilezas, não me preocupando muito com um cálculo preciso numa experiência que não era muito precisa. Logo, eu desejaria que estas experiências fossem repetidas com outros globos, de um tamanho maior, mais numerosos, e de formas mais precisas, pois a demonstração de um vácuo depende disso. Se os globos forem considerados numa proporção geométrica, cujos diâmetros, vamos supor, são de 4, 8, 16, 32 polegadas, podemos inferir a partir da progressão observada nas experiências o que aconteceria se os globos fossem ainda maiores.

Com o objetivo de comparar as resistências de fluidos diferentes entre si, realizei as seguintes etapas. Obtive um recipiente de madeira com 4 pés de comprimento, 1 pé de largura e 1 pé de profundidade. Enchi este recipiente sem tampa com água de nascente e, após introduzir pêndulos nele, fiz com que eles oscilassem na água. E encontrei que um globo de chumbo pesando 166⅙ onças, e com um diâmetro de 3⅝ polegadas, movia-se nela como está apresentado na tabela seguinte, com o comprimento do pêndulo desde o ponto de suspensão até um certo ponto marcado no fio sendo de 126 polegadas, e ao centro de oscilação de 134⅜ polegadas.

O arco descrito na primeira descida por um ponto marcado no fio, em polegadas	64	32	16	8	4	2	1	½	¼
O arco descrito na última subida, em polegadas	48	24	12	6	3	1½	¾	⅜	3/16
Diferença dos arcos, proporcional ao movimento perdido, em polegadas	16	8	4	2	1	½	¼	⅛	1/18
O número de oscilações na água			29/60	1 1/5	3	7	11¼	12⅔	13⅓
O número de oscilações no ar	85½	287	535						

Nas experiências da quarta coluna existiram movimentos iguais perdidos em 535 oscilações feitas no ar, e 1⅕ na água. As oscilações no ar foram, de fato, um pouco mais rápidas do que aquelas na água. Mas se as oscilações na água fossem aceleradas numa tal razão que os movimentos dos pêndulos pudessem ser igualmente rápidos em ambos os meios, ainda haveria o mesmo número de 1⅕ oscilações na água e, portanto, a mesma quantidade de movimento seria perdida como antes, pois a resistência é aumentada e o quadrado do tempo diminuído na mesma razão quadrada. Com os pêndulos, portanto, tendo iguais velocidades, ocorreram movimentos iguais perdidos em 535 oscilações no ar, e 1⅕ na água. Logo, a resistência do pêndulo na água está para sua resistência no ar assim como 535 está para 1⅕. Esta é a proporção das resistências totais no caso da quarta coluna.

Agora, represente por $AV + CV^2$ a diferença dos arcos descritos na descida e subida subseqüente pelo globo movendo-se no ar com a maior velocidade V; e como a maior velocidade está no caso da quarta coluna para a maior velocidade no caso da primeira coluna assim como 1 está para 8; e esta diferença dos arcos no caso da quarta coluna está para a diferença no caso da primeira coluna assim como $\frac{2}{535}$ está para $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ou como 85½

para 4280; adote nestes casos 1 e 8 para as velocidades, e $85\frac{1}{2}$ e 4280 para as diferenças dos arcos, e A + C será = $85\frac{1}{2}$, e 8A + 64C = 4280 ou A + 8C = 535. Então, ao resolver estas equações, resultará que 7C = $449\frac{1}{2}$, C = $64\frac{3}{14}$ e A = $21\frac{2}{7}$. Portanto, a resistência, que é como $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, vai tornar-se como $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Portanto, no caso da quarta coluna, em que a velocidade era 1, a resistência total está para sua parte proporcional ao quadrado da velocidade assim como $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ ou $61\frac{12}{17}$ está para $48\frac{9}{56}$. Logo, a resistência do pêndulo na água está para esta parte da resistência no ar, que é proporcional ao quadrado da velocidade, e que nos movimentos rápidos é a única parte que merece consideração, assim como $61\frac{12}{17}$ está para $48\frac{9}{56}$ e 535 para $1\frac{1}{5}$ conjuntamente, isto é, como 571 para 1. Se todo o fio do pêndulo oscilando na água tivesse sido submerso, sua resistência teria sido ainda maior, de forma que a resistência do pêndulo oscilando na água, isto é, esta parte que é proporcional ao quadrado da velocidade, e que é a única que precisa ser considerada com corpos rápidos, está para a resistência do mesmo pêndulo inteiro, oscilando no ar com a mesma velocidade, como ao redor de 850 para 1, isto é, aproximadamente como a densidade da água está para a densidade do ar.

Neste cálculo também deveria ter sido considerada aquela parte da resistência do pêndulo na água que era como o quadrado da velocidade, mas descobri (o que talvez possa parecer estranho) que a resistência na água era maior do que a razão quadrada da velocidade. Ao procurar a causa, ponderei que o recipiente era muito estreito para o tamanho do globo pendular, e por sua estreiteza obstruía o movimento da água enquanto ela cedia ao globo oscilante. Pois quando submergi um globo pendular cujo diâmetro era de apenas uma polegada, a resistência era aumentada aproximadamente como o quadrado da velocidade. Experimentei isto fazendo um pêndulo de dois globos, dos quais o menor e mais baixo oscilava na água, e o maior e mais alto era preso ao fio logo acima da água e, ao oscilar no ar, ajudava o movimento do pêndulo e mantinha-o por mais tempo. As experiências feitas com este dispositivo resultaram na tabela seguinte.

Arco descrito na primeira descida	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arco descrito na última subida	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Diferença dos arcos, proporcional ao movimento perdido	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Número de oscilações	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Ao comparar as resistências dos meios entre si, também fiz com que pêndulos de ferro oscilassem no mercúrio. O comprimento do fio de ferro era aproximadamente 3 pés, e o diâmetro do globo pendular aproximadamente ⅓ de uma polegada. Logo acima do mercúrio foi fixado ao fio um outro globo de chumbo de uma grandeza suficiente para continuar o movimento do pêndulo por algum tempo. Um recipiente no qual cabia ao redor de 3 libras de mercúrio foi enchido sucessivamente com mercúrio e água comum, de forma que, ao fazer com que o pêndulo oscilasse sucessivamente nestes dois fluidos diferentes, eu pudesse encontrar a proporção de suas resistências. A resistência do mercúrio provou estar para a resistência da água como aproximadamente 13 ou 14 para 1, isto é, como a densidade do mercúrio está para a densidade da água. Quando utilizei um globo pendular alguma coisa maior, como um cujo diâmetro era aproximadamente ½ ou 2/3 de uma polegada, a resistência do mercúrio provou estar para a resistência da água como aproximadamente 12 ou 10 para 1. Mas a primeira experiência é mais confiável, já que na última o recipiente era muito estreito em proporção ao tamanho do globo imerso, pois o recipiente deveria ter sido aumentado junto com o globo. Pretendia repetir estas experiências com recipientes maiores, e em metais fundidos e outros líquidos tanto quentes quanto frios, mas nunca tive tempo livre suficiente para fazer todas elas. Além disso, do que já foi descrito, percebe-se suficientemente que a resistência dos corpos que movem-se rapidamente é aproximadamente proporcional às densidades dos fluidos onde se movem. Não digo precisamente, pois fluidos mais tenazes, de igual densidade, sem dúvida alguma, resistirão mais do que aqueles que são mais líquidos. Por exemplo, o óleo frio mais do que o quente, óleo quente mais do que a água de chuva, e água mais do que o espírito de vinho. Mas em líquidos que são perceptivelmente fluidos o bastante, como no ar, em água salgada e doce, em espírito de vinho, de terebintina e de sais, em óleo limpo de seus sedimentos pela destilação e aquecidos, em óleo de vitríolo, em mercúrio e em metais fundidos, e em quaisquer outros que são como esses, que são fluidos o suficiente para manterem por algum tempo o movimento impresso neles pela agitação do recipiente, e que ao serem derramados se distribuem facilmente em gotas, não duvido que a regra já estabelecida possa ser precisa o suficiente, especialmente se as experiências forem feitas com corpos pendulares maiores e movidos mais rapidamente.

Por último, como é a opinião de alguns que há um certo meio etéreo extremamente rarefeito e sutil, que preenche livremente os poros de todos os corpos, sendo que necessariamente deve surgir alguma resistência de tal meio que penetra livremente os poros dos corpos; com o objetivo de verifi-

car se a resistência que se observa nos corpos em movimento é feita apenas sobre suas superfícies externas, ou se suas partes internas encontram qualquer resistência considerável em suas superfícies, pensei na experiência seguinte. Suspendi uma caixa redonda de madeira de pinho por um fio de 11 pés de comprimento num gancho de aço, por meio de um anel do mesmo metal de forma a fazer um pêndulo com o comprimento acima. O gancho tinha uma extremidade afiada e côncava em sua parte superior, de modo que o arco superior do anel ao pressionar a borda pudesse mover-se o mais livremente possível; e o fio era preso ao arco mais baixo do anel. Estando o pêndulo assim preparado, afastei-o da perpendicular uma distância de aproximadamente 6 pés, e isso num plano perpendicular à borda do gancho, para evitar que o anel escorregasse para frente e para trás na borda do gancho enquanto o pêndulo oscilasse, pois o ponto de suspensão, onde o anel toca o gancho, tinha de permanecer imóvel. Portanto, marquei com precisão o lugar em que o pêndulo era trazido e solto, e marquei três outros lugares aos quais ele retornava no final das 1ª, 2ª e 3ª oscilações. Repeti isso muitas vezes para que pudesse encontrar esses lugares tão precisamente quanto possível. Enchi então a caixa com chumbo e com outros metais pesados que tinha em mãos. Mas, primeiro, pesei a caixa quando vazia, e aquela parte do fio que ia ao redor dela, e metade da parte remanescente, estendendo-se entre o gancho e a caixa suspensa; pois o fio assim estendido sempre age sobre o pêndulo, quando afastado da perpendicular, com metade de seu peso. A este peso adicionei o peso do ar contido na caixa. E este peso total era de aproximadamente 1/78 do peso da caixa quando cheia com os metais. Já que a caixa quando cheia de metais estica o fio com seu peso, aumentando o comprimento do pêndulo, encurtei então o fio de forma a fazer com que o comprimento do pêndulo, quando oscilando, fosse o mesmo de antes. Afastando então o pêndulo ao lugar que marquei primeiro, e, soltando-o, contei em torno de 77 oscilações antes da caixa retornar à segunda marca, e o mesmo tanto depois, até ele chegar na terceira marca, e o mesmo tanto até ele chegar na quarta marca. Disso eu concluo que toda a resistência da caixa, quando cheia, não tinha uma proporção para a resistência da caixa quando vazia superior a de 78 para 77. Pois se suas resistências fossem iguais, a caixa quando cheia tinha de ter continuado seu movimento oscilatório o mesmo tanto, em razão de sua inércia que era 78 vezes maior do que a inércia da mesma quando vazia e, portanto, ter retornado àquelas marcas no final de 78 oscilações. Mas ela retornou a elas ao final de 77 oscilações.

Portanto, represente por A a resistência da caixa sobre sua superfície externa, e por B a resistência da caixa vazia sobre sua superfície interna,

e se a resistência às partes internas dos corpos igualmente rápidos for como a matéria, ou como o número de partículas que são resistidas, então 78B será a resistência feita às partes internas da caixa quando cheia. Logo, a resistência total A + B da caixa vazia estará para a resistência total A + 78B da caixa cheia assim como 77 está para 78, e, por subtração, A + B está para 77B assim como 77 está para 1 e, portanto A + B está para B assim como 77x77 está para 1, e, por subtração, novamente, A está para B assim como 5928 está para 1. Portanto, a resistência da caixa vazia em suas partes internas será acima de 5000 vezes menor do que a resistência em sua superfície externa. Este raciocínio depende da suposição de que a maior resistência da caixa cheia não surge de qualquer outra causa latente, mas apenas da ação de algum fluido sutil sobre o metal incluído.

Esta experiência é relatada de memória, estando perdido o papel no qual a descrevi; de forma que fui obrigado a omitir algumas partes fracionais, das quais não me lembro; e não tenho tempo livre para repetí-la. A primeira vez que a realizei, sendo fraco o gancho, a caixa cheia era retardada mais cedo. Encontrei a causa para isto no fato de que o gancho não era forte o suficiente para agüentar o peso da caixa, de modo que, à medida em que ela oscilava para frente e para trás, o gancho dobrava-se algumas vezes neste sentido e algumas vezes no outro. Obtive então um gancho forte o suficiente para que o ponto de suspensão pudesse permanecer imóvel, e então todas as coisas aconteceram como está descrito acima.

» SEÇÃO VII

O movimento dos fluidos e a resistência feita aos corpos lançados

Proposição XXXII. Teorema XXVI

Suponha dois sistemas similares de corpos consistindo de um número igual de partículas, e sejam as partículas correspondentes semelhantes e proporcionais, cada uma num sistema a cada uma no outro, e que tenham uma situação semelhante entre si, e a mesma razão dada de densidade para cada uma; e suponha que elas começam a se mover entre si em tempos proporcionais, e com movimentos semelhantes (isto é, aquelas num sistema entre si, e aquelas no outro entre si). E se as partículas que estão num mesmo sistema não tocam uma à outra, exceto nos momentos de reflexão, nem atraem, nem repelem uma à outra, exceto com forças acelerativas que são inversamente como os diâmetros das partículas correspondentes, e diretamente como os quadrados das velocidades, afirmo que as partículas desses sistemas vão continuar a se mover entre si com movimentos semelhantes e em tempos proporcionais.

Diz-se que corpos semelhantes em situações semelhantes movem-se entre si com movimentos semelhantes e em tempos proporcionais, quando suas situações no final destes tempos são sempre encontradas iguais com respeito a cada um, como quando, por exemplo, comparamos as partículas

em um sistema com as partículas correspondentes no outro. Nesse sentido, os tempos serão proporcionais quando as partes similares e proporcionais de figuras similares forem descritas pelas partículas correspondentes. Portanto, supondo dois sistemas deste tipo, as partículas correspondentes, devido à similitude dos movimentos no começo, continuarão a se mover com movimentos semelhantes, enquanto elas moverem-se sem encontrar-se, pois se elas não sofrem qualquer força, prosseguirão uniformemente em linhas retas, pela primeira Lei. Mas se elas agitam umas às outras com certas forças, e estas forças são inversamente como os diâmetros das partículas correspondentes e diretamente como os quadrados das velocidades, então, como as partículas estão em situações semelhantes, e suas forças são proporcionais, as forças totais com as quais as partículas correspondentes são agitadas, e que são compostas de cada uma das forças agitadoras (pelo Corolário II das Leis), terão direções semelhantes e o mesmo efeito como se elas observassem centros situados igualmente entre as partículas. Estas forças totais estarão umas para as outras assim como as várias forças que as compõem, isto é, inversamente como os diâmetros das partículas correspondentes e diretamente como os quadrados das velocidades e, portanto farão com que as partículas correspondentes continuem a descrever figuras semelhantes. Isso ocorrerá (pelo Corolários I e VIII, Proposição 4, Livro I) se estes centros estão em repouso; mas se eles são movidos, ainda assim, devido à similitude das translações, suas situações entre as partículas do sistema permanecerão similares, de forma que as mudanças introduzidas nas figuras descritas pelas partículas ainda serão similares. Portanto, os movimentos das partículas correspondentes e similares continuarão similares até se encontrarem, quando surgirão colisões e reflexões similares, que novamente produzirão movimentos similares das partículas entre si (pelo que acabou de ser mostrado agora), até que elas caiam mutuamente umas sobre as outras de novo, e assim por diante *ad infinitum*. Q.E.D.

Corolário I – Logo, se quaisquer dois corpos que são similares e em situações semelhantes às partículas correspondentes dos sistemas, começam a se mover entre si de maneira semelhante e em tempos proporcionais, e seus tamanhos e densidades estiverem um para o outro assim como os tamanhos e densidades das partículas correspondentes, estes corpos vão continuar a se mover de maneira semelhante e em tempos proporcionais, pois o caso das partes maiores de ambos os sistemas e partículas é o mesmo.

Corolário II – E se todas as partes similares e similarmente situadas de ambos os sistemas estiverem em repouso entre si e duas delas que são maiores do que o restante, e mutuamente correspondentes em ambos os sis-

temas, começam a se mover em linhas igualmente posicionadas, com qualquer movimento similar, elas vão excitar movimentos similares nas partes restantes do sistema, e continuarão a se mover entre estas partes de maneira semelhante e em tempos proporcionais e , portanto, irão percorrer espaços proporcionais a seus diâmetros.

Proposição XXXIII. Teorema XXVII

O mesmo sendo suposto, afirmo que as partes maiores dos sistemas são resistidas numa razão composta do quadrado de suas velocidades, da razão ao quadrado de seus diâmetros, e da razão simples da densidade das partes dos sistemas.

Pois a resistência surge parcialmente das forças centrípetas ou centrífugas com que as partículas do sistema agem umas sobre as outras, e parcialmente das colisões e reflexões das partículas e das partes maiores. As resistências do primeiro tipo estão umas para as outras assim como as forças motrizes totais das quais elas surgem, isto é, como as forças acelerativas totais e as quantidades de matéria nas partes correspondentes, ou seja (pela suposição), diretamente como os quadrados das velocidades e inversamente como as distâncias das partículas correspondentes, e diretamente como as quantidades de matéria nas partes correspondentes. Portanto, como as distâncias das partículas em um sistema estão para as distâncias correspondentes das partículas no outro, assim como está o diâmetro de uma partícula ou parte no primeiro sistema para o diâmetro da partícula ou parte correspondente no outro, e como as quantidades de matéria são como as densidades das partes e os cubos dos diâmetros, as resistências estão uma para a outra assim como os quadrados das velocidades, os quadrados dos diâmetros e as densidades das partes dos sistemas. Q.E.D. As resistências do último tipo são como o número das reflexões correspondentes e as forças destas reflexões conjuntamente. Porém, o número das reflexões estão um para o outro diretamente como as velocidades das partes correspondentes e inversamente como os espaços entre suas reflexões. E as forças das reflexões são como as velocidades, os tamanhos e as densidades das partes correspondentes conjuntamente, isto é, como as velocidades, os cubos dos diâmetros e as densidades das partes. E, reunindo todas estas razões, as resistências das partes correspondentes estão uma para a outra como os quadrados das velocidades, os quadrados dos diâmetros e as densidades das partes conjuntamente. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, se esses sistemas são dois fluidos elásticos, como nosso ar, e suas partes estão em repouso entre si, e dois corpos similares proporcionais em tamanho e densidade às partes dos fluidos, e situados similarmente entre essas partes, são lançados de qualquer forma na direção de linhas posicionadas similarmente; e as forças acelerativas com que as partículas dos fluidos agem uma sobre a outra são inversamente como os diâmetros dos corpos lançados e diretamente como os quadrados de suas velocidades, estes corpos vão excitar movimentos similares nos fluidos em tempos proporcionais, percorrerendo espaços similares e proporcionais a seus diâmetros.

COROLÁRIO II – Portanto, no mesmo fluido um corpo lançado que se move rapidamente enfrenta uma resistência que é aproximadamente como o quadrado de sua velocidade. Pois, se as forças com que as partículas distantes agem umas sobre as outras fossem aumentadas como o quadrado da velocidade, o corpo lançado seria resistido precisamente na mesma razão ao quadrado e, portanto, num meio, cujas partes quando à distância não agem com qualquer força uma sobre a outra, a resistência é precisamente como o quadrado da velocidade. Considere, portanto, três meios A, B e C, consistindo de partes iguais e similares dispostas regularmente a distâncias iguais. Considere as partes dos meios A e B afastando-se uma da outra com forças que estão entre si como T e V; e considere as partes do meio C sendo inteiramente destituídas de quaisquer destas forças. E, se quatro corpos iguais D, E, F e G movem-se nestes meios, os dois primeiros D e E nos dois primeiros A e B, e os outros dois F e G no terceiro C; e se a velocidade do corpo D estiver para a velocidade do corpo E, e a velocidade do corpo F para a velocidade do corpo G, assim como a raiz quadrada da razão da força T para a força V; então a resistência do corpo D para a resistência do corpo E, e a resistência do corpo F para a resistência do corpo G, serão como o quadrado das velocidades e, portanto, a resistência do corpo D estará para a resistência do corpo F assim como a resistência do corpo E está para a resistência do corpo G. Sejam os corpos D e F igualmente rápidos, assim como também os corpos E e G. Aumentando as velocidades dos corpos D e F em qualquer razão, e diminuindo as forças das partículas do meio B como o quadrado da mesma razão, o meio B vai aproximar-se à vontade da forma e condição do meio C. Portanto, as resistências dos corpos iguais e igualmente rápidos E e G nesses meios vão aproximar-se continuamente à igualdade, de forma que sua diferença irá finalmente se tornar menor do que qualquer quantidade dada. Logo, como as resistências dos corpos D e F estão uma para a outra assim como as resistências dos corpos E e G, essas também de manei-

ra semelhante vão aproximar-se da razão de igualdade. Portanto, os corpos D e F, quando eles movem-se com uma rapidez muito grande, encontram resistências aproximadamente iguais; portanto, como a resistência do corpo F está na razão ao quadrado da velocidade, a resistência do corpo D estará aproximadamente na mesma razão.

COROLÁRIO III – Portanto, a resistência de um corpo movendo-se muito rapidamente num fluido elástico é quase a mesma como se as partes do fluido fossem destituídas de suas forças centrífugas e não se distanciassem uma da outra. Ma isso apenas se a elasticidade do fluido surgir das forças centrífugas das partículas e a velocidade for tão grande a ponto de não permitir às partículas tempo suficiente para agir.

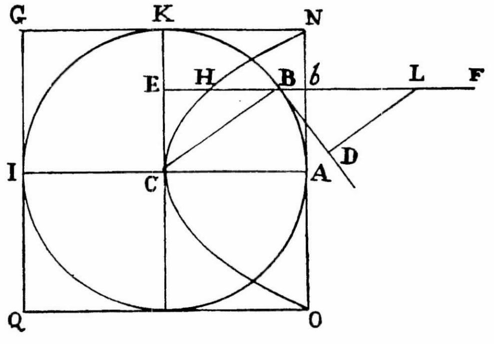
COROLÁRIO IV – Sendo as resistências de corpos similares e igualmente rápidos, num meio cujas partes distantes não fogem umas das outras, como os quadrados dos diâmetros, então as resistências feitas a corpos que se movem com velocidades muito grandes e iguais num fluido elástico serão aproximadamente como os quadrados dos diâmetros.

COROLÁRIO V – E como corpos similares, iguais e igualmente rápidos, movendo-se através de meios da mesma densidade, cujas partículas não fogem umas das outras, vão colidir contra uma quantidade igual de matéria em tempos iguais, sejam as partículas em que consiste o meio em maior quantidade e menores, ou em menor quantidade e maiores, e forneçam, portanto, a esta matéria uma quantidade igual de movimento e, em retorno, (pela terceira Lei do Movimento) sofram uma reação igual da mesma, isto é, são igualmente resistidos; também é evidente que em fluidos elásticos da mesma densidade, quando os corpos movem-se com extrema rapidez, suas resistências são aproximadamente iguais, tanto se os fluidos consistem de partes grandes, quanto de partes muito sutis. Pois a resistência dos projéteis movendo-se com velocidades extremamente grandes não é muito diminuída pela sutileza do meio.

COROLÁRIO VI – Tudo isso ocorre em fluidos cuja força elástica surge das forças centrífugas das partículas. Mas se esta força surge de alguma outra causa, como da expansão das partículas à maneira da lã, ou dos ramos das árvores, ou por qualquer outra causa, que impeça as partículas de se deslocarem livremente entre si, a resistência vai ser maior do que nos Corolários acima devido à menor fluidez do meio.

PROPOSIÇÃO XXXIV. TEOREMA XXVIII

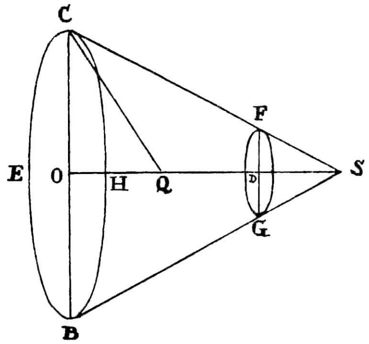
Se num meio rarefeito, consistindo de partículas iguais dispostas livremente a distâncias iguais entre si, um globo e um cilindro descritos em diâmetros iguais movem-se com velocidades iguais na direção do eixo do cilindro, a resistência do globo será a metade que a do cilindro.



Pois como a ação do meio sobre o corpo é a mesma (pelo Corolário V das Leis), tanto se o corpo move-se num meio parado, quando se as partículas do meio incidem com a mesma velocidade sobre o corpo parado, consideraremos o corpo como se ele estivesse parado e vamos ver com que força ele seria impelido pelo meio em movimento. Represente, portanto, por ABKI um corpo esférico descrito com o centro C e com o semidiâmetro CA, e suponha que as partículas do meio incidem com uma dada velocidade sobre o corpo esférico nas direções de linhas retas paralelas a AC; e seja FB uma destas linhas retas. Em FB considere LB igual ao semidiâmetro CB, e trace BD tocando a esfera em B. Trace as perpendiculares BE e LD sobre KC e BD; e a força com que uma partícula do meio, incidindo obliquamente sobre o globo na direção FB, golpearia o globo em B, estará para a força com que a mesma partícula, encontrando o cilindro ONGQ descrito ao redor do globo com o eixo ACI, o golpearia perpendicularmente em *b*, assim como LD está para LB, ou BE para BC. Igualmente, a eficácia desta força em mover o globo, de acordo com a direção de sua incidência FB ou AC, está para a eficácia da mesma em mover o globo de acordo com a direção de sua determinação, isto é, na direção da linha reta BC na qual ela impele o globo diretamente, assim como BE está para BC. E, ligando estas razões, a eficácia de uma partícula, incidindo sobre o globo obliquamente na direção da linha reta FB, para mover o globo na direção de sua incidência, está para a eficácia da mesma partícula incidindo na mesma linha perpendicularmente

sobre o cilindro, para movê-lo na mesma direção, assim como BE^2 está para BC^2. Portanto, se em *b*E, que é perpendicular à base circular do cilindro NAO, e igual ao raio AC, consideramos *b*H igual a $\frac{BE^2}{CB}$; então *b*H estará para *b*E assim como o efeito da partícula sobre o globo está para o efeito da partícula sobre o cilindro. E, portanto, o sólido que é formado por todas as linhas retas *b*H estará para o sólido formado por todas as linhas retas *b*E assim como o efeito de todas as partículas sobre o globo está para o efeito de todas as partículas sobre o cilindro. Mas o primeiro destes sólidos é um parabolóide cujo vértice é C, seu eixo CA e seu *latus rectum* CA, e o último sólido é um cilindro circunscrevendo o parabolóide. Sabe-se que um parabolóide é metade do seu cilindro circunscrito. Portanto, a força total do meio sobre o globo é metade de toda a força do mesmo sobre o cilindro. E, portanto, se as partículas do meio estão em repouso, e o cilindro e o globo movem-se com velocidades iguais, a resistência do globo será metade da resistência do cilindro. Q.E.D.

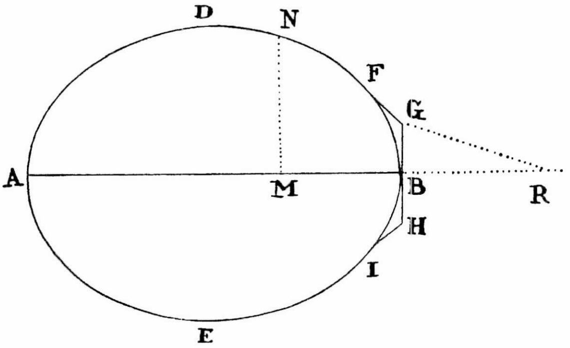
Escólio[1]



Pelo mesmo método outras figuras podem ser comparadas entre si no que diz respeito a suas resistências e pode-se encontrar aquelas que são mais aptas a continuar seus movimentos em meios com resistência. Como se sobre a base circular CEBH, a partir do centro O, com o raio OC e a altura OD, construíssemos um tronco CBGF de um cone, que deve encontrar com menos resistência do que qualquer outro tronco construído com a mesma base e altura, e deslocando-se para frente em direção a D na direção de seu eixo, divida ao meio a altura OD em Q, e prolongue OQ até S, de tal forma que QS possa ser igual a QC, e S será o vértice do cone cujo tronco se procura.

Incidentalmente, como o ângulo CSB é sempre agudo, conclui-se do que foi acima mencionado que, se o sólido ADBE for gerado pela circunvolução de uma figura elíptica ou oval ADBE ao redor de seu eixo AB, e a figu-

1. Apêndice, Nota 8.



ra gerada for tocada por três linhas retas FG, GH e HI, nos pontos F, B e I, de forma que GH seja perpendicular ao eixo no ponto de contato B, e FG e HI possam ser inclinadas em relação a GH nos ângulos FGB e BHI de 135 graus: o sólido resultante da circunvolução da figura ADFGHIE ao redor do mesmo eixo AB será menos resistido do que o sólido anterior, desde que ambos movam-se para frente na direção de seus eixos AB, e que a extremidade B de cada um esteja à frente. Creio que esta Proposição possa ser útil na construção de embarcações.

Se a figura DNFG for uma tal curva que, se a partir de qualquer ponto dela, como N, for traçada a perpendicular NM sobre o eixo AB, e, a partir do ponto dado G for traçada a linha reta GR paralela a uma linha reta tocando a figura em N, e cortando o eixo prolongado em R, MN estará para GR assim como GR^3 está para $4BR \times GB^2$, o sólido descrito pela revolução desta figura ao redor de seu eixo AB, movendo-se no meio rarefeito mencionado acima de A para B, será menos resistido do que qualquer outro sólido circular descrito com o mesmo comprimento e largura.

Proposição XXXV. Problema VII

Se um meio rarefeito consiste de partículas paradas muito pequenas de igual tamanho, e dispostas livremente a distâncias iguais entre si: achar a resistência de um globo movendo-se uniformemente para frente neste meio.

Caso 1 – Conceba um cilindro descrito com o mesmo diâmetro e altura movendo-se para a frente com a mesma velocidade na direção de seu eixo através do mesmo meio; e vamos supor que as partículas do meio, sobre as quais incidem o globo ou o cilindro, recuem com uma força de reflexão tão grande quanto possível. Então, como a resistência do globo (pela última

Proposição) é metade da resistência do cilindro, e como o globo está para o cilindro assim como 2 está para 3, e como o cilindro ao incidir perpendicularmente sobre as partículas, refletindo-as com a maior força, comunica a elas uma velocidade que é o dobro em relação à sua: segue-se que o cilindro, ao mover-se para a frente uniformemente a metade do comprimento de seu eixo, traansmitirá um movimento para as partículas que está para o movimento total do cilindro assim como a densidade do meio está para a densidade do cilindro; e que o globo, no tempo em que ele percorre um comprimento de seu diâmetro, ao mover-se uniformemente para a frente, comunica o mesmo movimento às partículas; e, no tempo em que ele percorre dois terços de seu diâmetro, comunica um movimento para as partículas que está para o movimento total do globo assim como a densidade do meio está para a densidade do globo. E, portanto, o globo encontra-se com uma resistência que está para a força com que todo seu movimento pode ser ou suprimido ou gerado no tempo em que ele percorre dois terços de seu diâmetro movendo-se uniformemente para a frente, assim como a densidade do meio está para a densidade do globo.

CASO 2 – Vamos supor que as partículas do meio incidindo sobre o globo ou cilindro não são refletidas. Então, o cilindro incidindo perpendicularmente sobre as partículas vai comunica sua própria velocidade simples a elas e, portanto, vai encontrar-se com uma resistência que é a metade do caso anterior, e o globo também vai encontrar-se com metade da resistência.

CASO 3 – Vamos supor que as partículas do meio recuem do globo com uma força que não é nem máxima, nem nula, mas com uma certa força média; então a resistência do globo estará na mesma razão média entre a resistência no primeiro caso e a resistência no segundo. Q.E.I.

COROLÁRIO I – Portanto, se o globo e as partículas são infinitamente duros, e destituídos de toda força elástica, e, portanto, de toda força de reflexão, a resistência do globo estará para a força com que todo seu movimento pode ser destruído ou gerado, no tempo em que o globo percorre quatro terços de seu diâmetro, assim como a densidade do meio está para a densidade do globo.

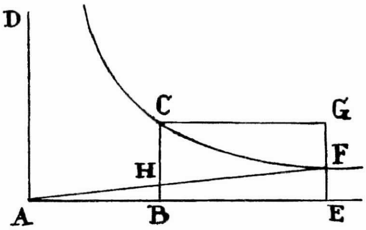
COROLÁRIO II – A resistência do globo, outras coisas sendo iguais, varia como o quadrado da velocidade.

COROLÁRIO III – A resistência do globo, outras coisas sendo iguais, varia como o quadrado do diâmetro.

COROLÁRIO IV – A resistência do globo, outras coisas sendo iguais, varia como a densidade do meio.

COROLÁRIO V – A resistência do globo varia juntamente como o qua-

drado da velocidade, como o quadrado do diâmetro e como a densidade do meio.



COROLÁRIO VI – O movimento do globo e sua resistência podem ser assim representados: Seja AB o tempo em que o globo pode perder todo seu movimento por sua resistência continuada uniformemente. Trace AD e BC perpendiculares a AB. Seja BC todo este movimento, e descreva a hipérbole CF através do ponto C, as assíntotas sendo AD e AB. Prolongue AB até qualquer ponto E. Trace a perpendicular EF encontrando a hipérbole em F. Complete o paralelogramo CBEG, e trace AF encontrando BC em H. Então, se o globo em qualquer tempo BE, com seu primeiro movimento BC continuado uniformemente, percorre num meio sem resistência o espaço CBEG, representado pela área do paralelogramo, o mesmo num meio com resistência vai percorrer o espaço CBEF, representado pela área da hipérbole; e seu movimento no final deste tempo será representado por EF, a ordenada da hipérbole, sendo perdida de seu movimento a parte FG. E sua resistência no final do mesmo tempo será representada pelo comprimento BH, sendo perdida de sua resistência a parte CH. Tudo isso deriva dos Corolários I e III, Proposição 5, Livro II.

COROLÁRIO VII – Portanto, se o globo no tempo T perde todo seu movimento M pela resistência R continuada uniformemente, o mesmo globo no tempo t num meio com resistência, em que a resistência R decresce como o quadrado da velocidade, vai perder de seu movimento M a parte $\frac{tM}{T+t}$, sobrando a parte $\frac{TM}{T+t}$; e vai percorrer um espaço que está para o espaço percorrido no mesmo tempo t, com o movimento uniforme M, assim como o logaritmo do número $\frac{T+t}{T}$ multiplicado pelo número 2,302585092994 está para o número $\frac{t}{T}$, porque a área hiperbólica BCFE está para o retângulo BCGE nesta proporção.

Escólio

Desmontei nesta Proposição a resistência e retardação de projéteis esféricos em meios que não são contínuos, e mostrei que esta resistência está

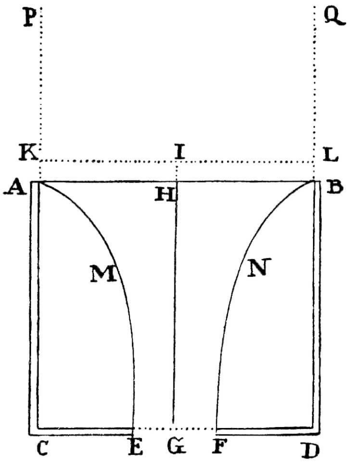
para a força com que todo o movimento do globo pode ser destruído ou produzido no tempo em que o globo percorre dois terços de seu diâmetro, com uma velocidade continuada uniformemente, assim como a densidade do meio está para a densidade do globo, desde que o globo e as partículas do meio sejam perfeitamente elásticos, e possuam a maior força de reflexão; e que esta força, quando o globo e as partículas do meio são infinitamente duros e desprovidos de qualquer força refletora, é diminuída pela metade. Mas em meios contínuos, como a água, óleo quente e mercúrio, o globo, à medida em que passa através deles, não colide imediatamente contra todas as partículas do fluido que geram a resistência feita a ele, mas pressiona apenas as partículas que estão próximas a ele, que pressionam as partículas além delas, que pressionam outras partículas, e assim por diante; e nestes meios a resistência é diminuída uma outra metade. Um globo nestes meios extremamente fluidos encontra com uma resistência que está para a força com que todo seu movimento pode ser destruído ou gerado no tempo em que ele pode percorrer, com este movimento continuado uniformemente, oito terços de seu diâmetro, assim como a densidade do meio está para a densidade do globo. Tentarei mostrar isto no que segue.

Proposição XXXVI. Problema VIII

Encontrar o movimento da água saindo de um recipiente cilíndrico através de um buraco feito no fundo.[2]

Seja ACDB um recipiente cilíndrico, AB sua boca, CD o fundo paralelo ao horizonte, EF um furo circular no meio do fundo, G o centro do furo, e GH o eixo do cilindro perpendicular ao horizonte. E suponha um cilindro de gelo APQB ser da mesma largura que a cavidade do recipiente e com o mesmo eixo, descendo continuamente com um movimento uniforme, e que suas partes, tão logo toquem a superfície AB, sejam fundidas convertendo-se em água e fluam para dentro do recipiente por seu peso, e que, em sua queda componham a catarata ou coluna de água ABNFEM, passando através do buraco EF preenchendo-o exatamente. Seja a velocidade uniforme do gelo que desce e da água adjacente no círculo AB aquela que a água iria adquirir ao cair através do espaço IH; e suponha que IH e HG estejam sobre uma mesma linha reta; e através do ponto I trace a linha reta KL

2. Apêndice, Nota 9.

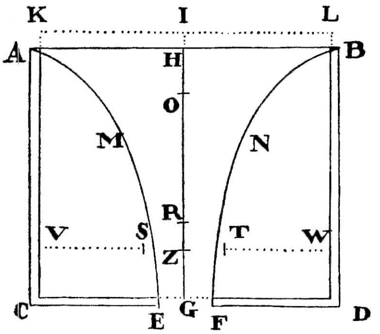


paralela ao horizonte e encontrando o gelo de ambos os lados em K e L. Então, a velocidade da água saindo do buraco EF será a mesma que ela iria adquirir ao cair de I através do espaço IG. Portanto, pelos teoremas de Galileu, IG estará para IH assim como o quadrado da velocidade da água que sai do buraco está para a velocidade da água no círculo AB, isto é, como o quadrado da razão do círculo AB está para o círculo EF; esses círculos sendo inversamente como as velocidades da água que, no mesmo tempo e em quantidades iguais passa através de cada um deles, e os preenche completamente. Estamos considerando agora a velocidade com que a água tende ao plano do horizonte. Mas o movimento paralelo ao mesmo, pelo qual as partes da água que cai aproximam-se uma da outra, não é considerado aqui, pois ele não é produzido pela gravidade, nem modifica em absoluto o movimento perpendicular ao horizonte produzido pela gravidade. Supomos, na verdade, que as partes da água ligam-se um pouco, de modo que por sua coesão elas possam, ao cair, aproximar-se umas das outras com movimentos paralelos ao horizonte para com isto formar uma única catarata, impedindo que se dividam em várias; mas o movimento paralelo ao horizonte decorrente desta coesão não é parte de nossas considerações presentes.

CASO 1 – Conceba agora toda a cavidade do recipiente que cerca a água que cai ABNFEM cheia de gelo, de forma que a água passe através do gelo como através de um funil. Se a água passa apenas muito perto do gelo, sem tocá-lo; ou, o que é a mesma coisa, se devido a uma perfeita lisura da superfície do gelo a água, embora tocando-o, escorrega sobre ele com a maior liberdade e sem a menor resistência; então a água vai passar através do buraco EF com a mesma velocidade de antes, e o peso total da coluna de água ABNFEM atuará como antes forçando a água e o fundo do recipiente vai suportar o peso do gelo ao redor desta coluna.

Considere agora que o gelo do recipiente se funde em água. O fluxo de água permanece o mesmo de antes, no que diz respeito à sua velocidade. Ele não vai ser menor já que o gelo agora dissolvido vai tentar descer; ele não vai ser maior já que o gelo, agora transformado em água, não pode descer sem impedir a descida de outra água igual à sua própria descida. A mesma força tem sempre de gerar a mesma velocidade no fluxo de água.

Mas o buraco no fundo do recipiente, devido aos movimentos oblíquos das partículas do fluxo de água, deve ser um pouco maior do que antes. Pois agora nem todas as partículas da água atravessam o buraco perpendicularmente, mas, fluindo para baixo sobre todas as partes a partir dos lados do recipiente, e convergindo em direção ao buraco, o atravessam com movimentos oblíquos; e, ao tender para baixo, elas encontram-se num fluxo cujo diâmetro é um pouco menor abaixo do buraco do que no próprio buraco; seu diâmetro estando para o diâmetro do buraco assim como 5 está para 6, ou muito aproximadamente como $5\frac{1}{2}$ para $6\frac{1}{2}$, se medi estes diâmetros corretamente. Obtive uma placa plana fina com um buraco feito no meio, sendo de cinco oitavas partes de uma polegada o diâmetro do buraco circular. E, para que o fluxo da água corrente não fosse acelerado ao cair e se tornasse mais estreito por esta aceleração, fixei esta placa não no fundo mas no lado do recipiente, de forma a fazer com que a água saísse na direção de uma linha paralela ao horizonte. Então, quando o recipiente estava cheio de água, abri o buraco para deixá-la sair; e o diâmetro do fluxo, medido com a maior precisão à distância de aproximadamente meia polegada do buraco, era $\frac{21}{40}$ de polegada. Portanto o diâmetro deste buraco circular estava para o diâmetro do fluxo, muito aproximadamente assim como 25 está para 21. De forma que a água, ao passar através do buraco converge por todos os lados, e, após ela ter saído do recipiente, torna-se menor ao convergir desta forma, e ao tornar-se menor é acelerada até alcançar a distância de meia polegada do buraco, e nesta distância flui num fluxo menor e com uma velocidade maior do que no próprio buraco, e isto numa razão de 25x25 para 21x21, ou muito aproximadamente, 17 para 12, isto é, aproximadamente na razão de $\sqrt{2}$ para 1. Ora, é certo a partir das experiências que a quantidade de água que passa através de um buraco circular feito no fundo do recipiente em um tempo dado é igual à quantidade que, fluindo livremente com a velocidade acima, iria passar no mesmo tempo através de um outro buraco circular cujo diâmetro está para o diâmetro anterior assim como 21 está para 25. E, portanto, esta água corrente, ao passar através do próprio buraco tem uma velocidade para baixo, aproximadamente igual àquela que um corpo pesado iria adquirir ao cair através de metade da altura da água parada no recipiente. Mas, após ela ter saído, ela ainda é acelerada ao convergir, até que ela chega a uma distância do buraco que é aproximadamente igual ao seu diâmetro, e adquire uma velocidade maior do que a outra aproximadamente na razão de $\sqrt{2}$ para 1, velocidade que um corpo iria aproximadamente adquirir ao cair livremente através da altura total da água parada no recipiente.



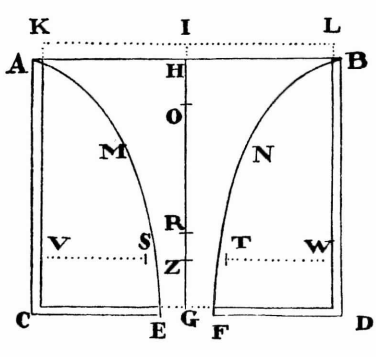
Portanto, no que segue o diâmetro do fluxo será representado pelo buraco menor que chamaremos EF. E imagine um outro plano VW acima do buraco EF, e paralelo ao seu plano, colocado a uma distância igual ao diâmetro do mesmo buraco, e sendo furado com um buraco maior ST, de tal tamanho que um fluxo que vai preencher completamente o buraco mais baixo EF possa passar através dele; o diâmetro deste buraco estará portanto para o diâmetro do buraco mais baixo aproximadamente como 25 está para 21. Desta forma a água vai fluir para fora perpendicularmente no buraco mais baixo; e a quantidade de água fluindo para fora será, de acordo com o tamanho deste último furo, muito aproximadamente a mesma que requer a solução deste Problema. O espaço incluído entre os dois planos e o fluxo que cai pode ser considerado como o fundo do recipiente. Mas para tornar a solução mais simples e matemática, é melhor considerar apenas o plano inferior como o fundo do recipiente, e supor que a água que fluiu através do gelo como através de um funil, e que saiu do recipiente através do buraco EF feito no plano inferior, preserva seu movimento continuamente, e que o gelo continua em repouso. Portanto, no que segue, seja ST o diâmetro de um furo circular descrito a partir do centro Z, e suponha que o fluxo flui para fora do recipiente através deste buraco, quando a água no recipiente era toda fluida. E seja EF o diâmetro do furo que o fluxo ao cair preenche exatamente, tanto se a água sai do recipiente pelo buraco superior ST, ou se flui através do meio do gelo no recipiente, como através de um funil. E esteja o diâmetro do buraco superior ST para o diâmetro do inferior EF como ao redor de 25 para 21, e seja a distância perpendicular entre os planos dos buracos igual ao diâmetro do furo menor EF. Então, a velocidade da água para baixo, ao fluir para fora do recipiente através do buraco ST, será neste buraco a mesma que um corpo pode adquirir ao cair livremente da metade da altura IZ; e a velocidade de ambos os fluxos correntes será no buraco EF a mesma que um corpo iria adquirir ao cair livremente da altura total IG.

CASO 2 – Se o buraco EF não estiver no meio do fundo do recipiente, mas em alguma outra parte dele, a água ainda vai sair com a mesma velocidade de antes, se o tamanho do buraco for o mesmo. Pois, embora um corpo pesado leve mais tempo ao descer à mesma profundidade por uma linha oblíqua do que por uma linha perpendicular, ainda assim em ambos os casos ele adquire na sua descida a mesma velocidade; como Galileu demonstrou.

CASO 3 – A velocidade da água é a mesma quando ela sai através de um buraco no lado do recipiente. Pois se o furo for pequeno, de forma que o intervalo entre as superfícies AB e KL desapareça, e o fluxo de água saindo horizontalmente possa formar uma figura parabólica; a partir do *latus rectum* desta parábola pode-se ver que a velocidade da água fluindo é aquela que um corpo pode adquirir ao cair da altura IG ou HG da água parada no recipiente. Pois encontrei, ao realizar uma experiência, que se a altura da água parada acima do buraco era de 20 polegadas, e a altura do buraco acima de um plano paralelo ao horizonte era também de 20 polegadas, um fluxo de água saindo de lá caía sobre o plano a uma distância de aproximadamente 37 polegadas, a partir de uma perpendicular incidindo sobre este plano a partir do buraco. Pois sem resistência o fluxo teria caído sobre o plano à distância de 40 polegadas, o *latus rectum* da corrente parabólica sendo de 80 polegadas.

CASO 4 – Se o fluxo de água tende para cima, vai continuar saindo com a mesma velocidade. Pois o pequeno fluxo de água saindo para cima, sobe com um movimento perpendicular para GH ou GI, a altura da água parada no recipiente, exceto no que sua subida é um pouco impedida pela resistência do ar e, portanto, ele sai com a mesma velocidade que iria adquirir ao cair desta altura. Toda partícula da água parada é igualmente pressionada por todos os lados (pela Proposição 19, Livro II), e, cedendo à pressão, tende sempre com uma força igual, tanto se ela desce através de um buraco no fundo do recipiente, ou se sai numa direção horizontal através de um buraco no lado, ou se passa num canal e sai de lá através de um pequeno buraco feito na parte superior do canal. E pode-se inferir não apenas a partir do raciocínio, mas também é manifesto a partir das experiências bem conhecidas que acabamos de mencionar, que a velocidade com que a água sai é precisamente a mesma que é exposta nesta Proposição.

CASO 5 – A velocidade do fluxo de água é o mesmo, quer a forma do buraco seja circular, ou quadrada, ou triangular, ou de qualquer outra forma igual à circular pois a velocidade do fluxo de água não depende da forma do buraco, mas da profundidade do buraco abaixo do plano KL.



CASO 6 – Se a parte inferior do recipiente ABDC for imersa em água parada e a altura da água parada acima do fundo do recipiente for GR, a velocidade com que a água que está no recipiente vai sair no buraco EF para dentro da água parada será a mesma que a água iria adquirir ao cair da

altura IR, pois o peso de toda a água no recipiente, que está abaixo da superfície da água parada, será mantido em equilíbrio pelo peso da água parada e, portanto, não vai de todo acelerar o movimento da água que desce no recipiente. Este caso também vai se tornar evidente a partir de experiências que meçam os tempos de saída da água.

COROLÁRIO I – Portanto, se a profundidade da água CA for prolongada para K, de forma que AK possa estar para CK assim como o quadrado da razão da área de um buraco feito em qualquer parte do fundo para a área do círculo AB, a velocidade do fluxo de água será igual à velocidade que a água iria adquirir ao cair livremente da altura KC.

COROLÁRIO II – E a força com que todo o movimento do fluxo de água pode ser gerado é igual ao peso de uma coluna cilíndrica de água cuja base é o buraco EF e sua altura 2GI ou 2CK. Pois o fluxo de água pode adquirir, no tempo em que ele se torna igual a esta coluna ao cair por seu próprio peso da altura GI, uma velocidade igual àquela com que ele sai.

COROLÁRIO III – O peso de toda a água no recipiente ABDC está para aquela parte do peso que é empregada em forçar a água para fora assim como a soma dos círculos AB e EF está para duas vezes o círculo EF. Pois seja IO uma média proporcional entre IH e IG, e a água fluindo para fora do buraco EF vai tornar-se, no tempo em que uma gota caindo de I iria percorrer a altura IG, igual a um cilindro cuja base é o círculo EF e sua altura 2IG, isto é, a um cilindro cuja base é o círculo AB e cuja altura é 2IO. Pois o círculo EF está para o círculo AB assim como a raiz quadrada da razão da altura IH está para a altura IG, isto é, na razão simples da proporcional média IO para a altura IG. Além disto, no tempo em que uma gota caindo de I pode percorrer a altura IH, a água que flui para fora terá ficado igual a um cilindro cuja base é o círculo AB e sua altura 2IH; e no tempo em que uma gota percorre HG, a diferença das alturas, caindo de I através de H para G, o fluxo de água, isto é, a água contida dentro do sólido ABNFEM, será igual à diferença dos cilindros, isto é, a um cilindro cuja base é AB e sua altura 2HO. E, portanto, toda água contida no recipiente ABDC está para toda água que cai, contida no sólido mencionado ABNFEM, assim como HG está para 2HO, isto é, assim como HO + OG está para 2HO, ou IH + IO para 2IH. Mas o peso de toda água no sólido ABNFEM é empregada para forçar a água para fora e, portanto, o peso de toda água no recipiente está para esta parte do peso que é empregada em forçar a água para fora assim como IH + IO está para 2IH e, portanto, como a soma dos círculos EF e AB está para duas vezes o círculo EF.

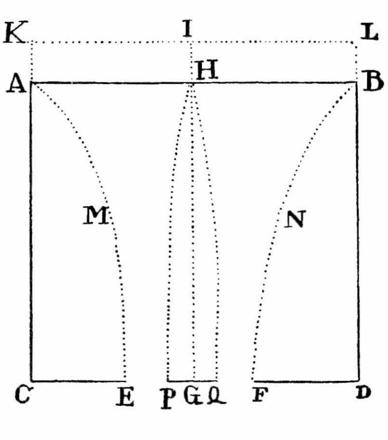
COROLÁRIO IV – E, portanto, o peso de toda a água no recipiente ABDC está para a outra parte do peso que é sustentado pelo fundo do reci-

piente assim como a soma dos círculos AB e EF está para a diferença dos mesmos círculos.

Corolário V – E esta parte do peso que o fundo do recipiente suporta está para a outra parte do peso empregada em forçar a água para fora assim como a diferença dos círculos AB e EF está para duas vezes o círculo menor EF ou como a área do fundo para duas vezes o buraco.

Corolário VI – Esta parte do peso que pressiona sobre o fundo está para o peso total da água que jaz perpendicularmente sobre ele assim como o círculo AB está para a soma dos círculos AB e EF ou como o círculo AB está para o excesso de duas vezes o círculo AB acima da área do fundo. Pois esta parte do peso que pressiona sobre o fundo está para o peso de toda a água no recipiente assim como a diferença dos círculos AB e EF está para a soma dos mesmos círculos (pelo Corolário IV); e o peso de toda a água no recipiente está para o peso de toda a água que jaz perpendicularmente sobre o fundo assim como o círculo AB está para a diferença dos círculos AB e EF. Portanto, multiplicando os termos correspondentes das duas proporções, aquela parte do peso que pressiona sobre o fundo está para o peso de toda a água que jaz perpendicularmente sobre ele assim como o círculo AB está para a soma dos círculos AB e EF ou o excesso de duas vezes o círculo AB acima do fundo.

Corolário VII – Se no meio do buraco EF for colocado o pequeno círculo PQ descrito ao redor do centro G, e paralelo ao horizonte, o peso da água que este pequeno círculo suporta é maior do que o peso de uma terceira parte de um cilindro de água cuja base é este pequeno círculo e sua altura GH. Pois seja ABNFEM a catarata ou coluna de água corrente cujo eixo é GH, como acima, e suponha estar congelada toda água cuja fluidez não é necessária para a descida pronta e rápida da água, tanto aquela ao redor da catarata, quanto acima do pequeno círculo. E seja PHQ a coluna de água congelada acima do pequeno círculo, cujo vértice é H e sua altura GH. E suponha que esta catarata caia com seu peso total, sem apoiar-se nem pressionar em absoluto PHQ, mas escorregando livremente sobre ele sem qualquer atrito, a não ser talvez no próprio vértice do gelo, onde a catarata no início de sua caída possa tender para uma figura côncava. E assim como a água congelada AMEC e BNFD



que está ao redor da catarata é convexa em suas superfícies internas AME e BNF em direção da catarata que cai, da mesma forma esta coluna PHQ será convexa em direção da catarata e, portanto, será maior do que um cone cuja base é este pequeno círculo PQ e sua altura GH isto é, maior do que a terceira parte de um cilindro descrito com a mesma base e altura. Este círculo pequeno suporta o peso desta coluna, isto é, um peso maior do que o peso do cone ou uma terça parte do cilindro.

COROLÁRIO VIII – O peso da água que o círculo PQ suporta, quando muito pequeno, parece ser menor do que o peso de 2/3 de um cilindro de água cuja base é este pequeno círculo e sua altura HG. Pois, estando as coisas como supostas acima, imagine a metade de um esferóide descrito cuja base é aquele pequeno círculo e seu semi-eixo ou altura HG. Esta figura será igual a 2/3 deste cilindro, compreendendo dentro dela a coluna de água congelada PHQ, cujo peso é sustentado por este pequeno círculo. Pois, embora o movimento da água tenda diretamente para baixo, as superfícies externas desta coluna têm ainda de encontrar a base PQ num ângulo um tanto agudo, pois a água em sua queda é acelerada continuamente e em virtude desta aceleração torna-se mais estreita. Portanto, como este ângulo é menor do que um reto, esta coluna nas partes mais baixas dele estará dentro do hemisferóide. Nas partes superiores ele também vai ser agudo ou pontudo; pois para deixá-lo de outra forma, o movimento horizontal da água deveria ser no vértice infinitamente mais rápido do que seu movimento em direção ao horizonte. E quão menor for este círculo PQ, mais agudo será o vértice desta coluna; e o círculo sendo diminuído *in infinitum*, o ângulo PHQ será diminuído *in infinitum*, e portanto a coluna vai ficar dentro do hemisferóide. Portanto esta coluna é menor do que este hemisferóide ou do que duas terças partes do cilindro cuja base é aquele pequeno círculo e sua altura GH. Agora o pequeno círculo suporta uma força de água igual ao peso desta coluna, o peso da água ambiente sendo empregado em causar seu efluxo para fora do buraco.

COROLÁRIO IX – O peso da água que o pequeno círculo PQ suporta, quando ele é muito pequeno, é muito aproximadamente igual ao peso de um cilindro de água cuja base é este pequeno círculo e sua altura ½ GH, pois este peso é uma média aritmética entre os pesos do cone e do hemisferóide mencionados acima. Mas se este pequeno círculo não for muito pequeno, mas ao contrário aumentado até que ele se torne igual ao buraco EF, ele suportará o peso de toda a água que jaz perpendicularmente sobre ele, isto é, o peso de um cilindro de água cuja base é este pequeno círculo e sua altura GH.

COROLÁRIO X – E (tanto quanto posso julgar) o peso que este pequeno círculo suporta está sempre para o peso de um cilindro de água cuja base é este pequeno círculo e sua altura ½ GH, assim como EF^2 está para EF^2 - ½ PQ^2 ou muito aproximadamente como o círculo EF está para o excesso deste círculo acima de metade do pequeno círculo PQ.

LEMA IV

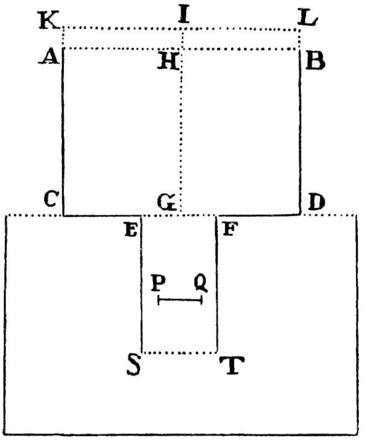
Se um cilindro se move uniformemente para frente na direção de seu comprimento, a resistência feita a ele não é de todo alterada aumentando-se ou diminuindo-se seu comprimento, sendo portanto a mesma que a resistência de um círculo descrito com o mesmo diâmetro e movendo-se para frente com a mesma velocidade na direção de uma linha reta perpendicular a seu plano.

Pois os lados não se opõem em absoluto ao movimento e um cilindro torna-se um círculo quando seu comprimento é diminuído *in infinitum*.

PROPOSIÇÃO XXXVII. TEOREMA XXIX

Se um cilindro se move uniformemente para frente num fluido comprimido, infinito e inelástico, na direção de seu comprimento, a resistência decorrente do tamanho de sua seção transversal está para a força pela qual todo seu movimento pode ser destruído ou gerado, no tempo em que percorre quatro vezes seu comprimento, aproximadamente assim como a densidade do meio está para a densidade do cilindro.

Pois suponha que o recipiente ABDC toque a superfície da água parada com seu fundo CD, e suponha que a água sai deste recipiente para dentro da água parada através do canal cilíndrico EFTS perpendicular ao horizonte; coloque o pequeno círculo PQ paralelo ao horizonte em qualquer lugar no meio do canal e prolongue CA para K, de forma que AK possa estar para CK assim como o quadrado da razão que o excesso do orifício do canal EF acima do pequeno círculo PQ tem para o círculo AB. É então evidente (pelo Caso 5, Caso 6, e Corolário I, Proposição 36) que a velocidade da água passando através do espaço anelar entre o pequeno círculo e os lados do recipiente será a mesma que aquela que a água iria adquirir ao cair, percorrendo em sua queda a altura KC ou IG.



E (pelo Corolário X, Proposição 36) se a largura do recipiente for infinita, de tal forma que a linha curta HI desapareça e as alturas IG e HG tornem-se iguais, a força da água que flui para baixo e pressiona sobre o círculo estará muito aproximadamente para o peso de um cilindro cuja base é este pequeno círculo e a altura ½ IG, assim como EF^2 está para $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$. Pois a força da água fluindo para baixo uniformemente através de todo o canal será a mesma sobre o pequeno círculo PQ em qualquer parte do canal que ele for colocado.

Sejam fechados agora os orifícios do canal EF e ST e suponha que o pequeno círculo suba no fluido comprimido por todo lado e ao subir obrigue a água que está sobre ele a descer através do espaço anelar entre o pequeno círculo e os lados do canal. Então, a velocidade do círculo pequeno que sobe estará para a velocidade da água que desce assim como a diferença dos círculos EF e PQ está para o círculo PQ; e a velocidade do círculo pequeno que sobe estará para a soma das velocidades, isto é, para a velocidade relativa da água que desce com que ela passa pelo pequeno círculo em sua subida, assim como a diferença dos círculos EF e PQ está para o círculo EF, ou como $EF^2 - PQ^2$ para EF^2. Seja esta velocidade relativa igual à velocidade com que foi mostrado acima que a água passaria através do espaço anelar, se o círculo permanecesse imóvel, isto é, à velocidade que a água iria adquirir ao cair percorrendo a altura IG; e a força da água sobre o círculo que sobe será a mesma que antes (pelo Corolário V das Leis do Movimento), isto é, a resistência do pequeno círculo que sobe estará para o peso de um cilindro de água cuja base é este pequeno círculo e sua altura ½ IG, aproximadamente assim como EF^2 está para $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$. Mas a velocidade do pequeno círculo estará para a velocidade que a água adquire ao cair percorrendo a altura IG, assim como $EF^2 - PQ^2$ está para EF^2.

Seja a largura do canal aumentada *in infinitum* e as razões entre $EF^2 - PQ^2$ e EF^2, e entre EF^2 e $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$, tornar-se-ão finalmente razões de igualdade. E, portanto, a velocidade do pequeno círculo será agora a mesma que a água iria adquirir ao cair percorrendo a altura IG e a resistência vai tornar-se igual ao peso de um cilindro cuja base é este círculo pequeno e sua altura metade da altura IG, a partir da qual o cilindro tem de cair para adquirir a velocidade do círculo que sobe; e com esta velocidade o cilindro no tempo

de sua queda vai percorrer quatro vezes seu comprimento. Mas a resistência do cilindro movendo-se para frente com esta velocidade na direção de seu comprimento é a mesma que a resistência do círculo pequeno (pelo Lema 4), sendo portanto aproximadamente igual à força pela qual seu movimento pode ser gerado enquanto ele percorre quatro vezes seu comprimento.

Se o comprimento do cilindro for aumentado ou diminuído, seu movimento e o tempo em que ele percorre quatro vezes seu comprimento, serão aumentados ou diminuídos na mesma razão e, portanto, a força pela qual o movimento, assim aumentado ou diminuído, pode ser destruído ou gerado, permanecerá a mesma, já que o tempo é aumentado ou diminuído na mesma proporção. Portanto, esta força ainda permanece igual à resistência do cilindro, já que (pelo Lema 4) esta resistência também permanecerá a mesma.

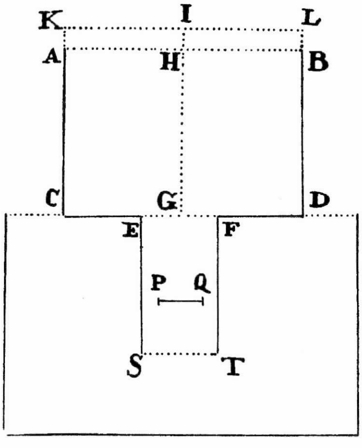
Se a densidade do cilindro for aumentada ou diminuída, seu movimento e a força pela qual seu movimento pode ser gerado ou destruído no mesmo tempo, serão aumentados e diminuídos na mesma razão. Portanto, a resistência de qualquer cilindro estará para a força pela qual todo seu movimento pode ser gerado ou destruído, no tempo durante o qual ele move-se quatro vezes seu comprimento, aproximadamente assim como a densidade do meio está para a densidade do cilindro. Q.E.D.

Um fluido tem de ser comprimido para tornar-se contínuo; ele tem de ser contínuo e inelástico para que toda a pressão surgindo de sua compressão possa ser propagada num instante; e assim, agindo igualmente sobre todas as partes do corpo movido, não produza mudança alguma de resistência. A pressão decorrente do movimento do corpo é gasta ao gerar um movimento nas partes do fluido, e isto cria a resistência. Mas a pressão decorrente da compressão do fluido, por forte que seja, se ela for propagada num instante, não gera movimento nas partes de um fluido contínuo e não produz mudança alguma do movimento e, portanto, nem aumenta nem diminui a resistência. É certo que a ação do fluido decorrente da compressão não pode ser mais forte nas partes traseiras do corpo movido do que em suas partes dianteiras e, portanto, não pode diminuir a resistência descrita nesta Proposição. E se sua propagação for infinitamente mais rápida do que o movimento do corpo pressionado, ela não será mais forte nas partes dianteiras do que nas partes traseiras. Mas a ação será infinitamente mais rápida e propagada num instante, se o fluido for contínuo e não elástico.

Corolário I – As resistências feitas a cilindros que se movem uniformemente para frente na direção de seus comprimentos através de meios infinitos contínuos estão numa razão composta do quadrado da razão das ve-

locidades e do quadrado da razão dos diâmetros, e da razão da densidade dos meios.

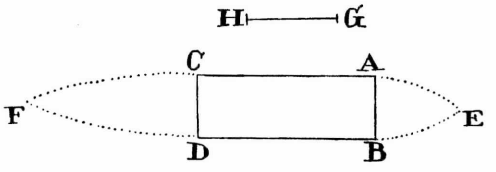
COROLÁRIO II – Se a largura do canal não for aumentada infinitamente, mas o cilindro for para frente na direção de seu comprimento através de um meio parado incluído, com seu eixo coincidindo sempre com o eixo do canal, sua resistência estará para a força com que todo seu movimento pode ser gerado ou destruído no tempo em que ele percorre quatro vezes seu comprimento, numa razão composta da razão de EF^2 para $EF^2 - PQ^2/2$, e do quadrado da razão de EF^2 para $EF^2 - PQ^2$, e da razão da densidade do meio para a densidade do cilindro.



COROLÁRIO III – O mesmo sendo suposto, e que um comprimento L esteja para quatro vezes o comprimento do cilindro numa razão composta da razão $EF^2 - PQ^2/2$ para EF^2, e do quadrado da razão de $EF^2 - PQ^2$ para EF^2, a resistência do cilindro estará para a força pela qual todo seu movimento pode ser destruído ou gerado no tempo em que ele percorre o comprimento L, assim como a densidade do meio está para a densidade do cilindro.

Escólio

Nesta Proposição investigamos apenas a resistência que surge do tamanho da seção transversa do cilindro, desprezando a parte da mesma que pode surgir da inclinação dos movimentos. Pois, assim como no Caso 1 da Proposição 36, a inclinação dos movimentos com que as partes da água no recipiente convergiam por todo lado para o buraco EF retardava o fluxo da água através do buraco, da mesma forma nesta Proposição a inclinação dos movimentos com que as partes da água pressionadas pela extremidade antecedente do cilindro cedem à pressão e divergem por todos os lados, retardam suas passagens através dos lugares que estão ao redor desta extremidade antecedente, em direção às partes traseiras do cilindro, e fazem com que o fluido seja movido até uma distância maior, o que aumenta a resistência quase na mesma razão em que ela diminuía o fluxo da água para fora do recipiente, isto é, aproximadamente na razão quadrada de 25 para 21. E, assim como no Caso 1 daquela Proposição, fizemos com que as partes da



água atravessassem o buraco EF plena e perpendicularmente, supondo congelada toda a água no recipiente ao redor da catarata e permanecendo sem movimento a parte da água cujo movimento era oblíquo e inútil, da mesma forma nesta Proposição, para que a inclinação dos movimentos possa ser retirada e as partes da água possam dar a passagem mais livre ao cilindro, cedendo a ele com o movimento mais direto e rápido possível, de forma que apenas sobre a quantidade de resistência que surge do tamanho da seção transversal e que como tal é incapaz de diminuição a não ser diminuindo o diâmetro do cilindro, temos de conceber estas partes do fluido cujos movimentos são oblíquos e inúteis e que produzem resistência, estando em repouso entre si em ambas extremidades do cilindro, lá aderindo-se e ficando ligadas ao cilindro. Seja ABCD um retângulo, e AE e BE dois arcos parabólicos descritos com o eixo AB e com um *latus rectum* que está para o espaço HG, que deve ser percorrido pelo cilindro ao cair para adquirir a velocidade com que se move, assim como HG está para ½ AB. Sejam CF e DF dois outros arcos parabólicos descritos com o eixo CD e um *latus rectum* quatro vezes o anterior e suponha que pela revolução da figura ao redor do eixo EF seja gerado um sólido cuja parte do meio ABDC é o cilindro de que estamos falando e cujas partes extremas ABE e CDF contêm as partes do fluido em repouso entre si e cimentadas em dois corpos duros, aderindo-se ao cilindro em cada extremidade como uma cabeça e um rabo. Então, se este sólido EACFDB move-se na direção do comprimento de seu eixo FE em direção às partes além de E, a resistência vai ser aproximadamente a mesma que aquela que determinamos nesta Proposição, isto é, ela vai ter a mesma razão para a força com que todo o movimento do cilindro pode ser destruído ou gerado no tempo em que ele está percorrendo o comprimento 4AC com este movimento uniforme, aproximadamente assim como a densidade do fluido tem para a densidade do cilindro. E (pelo Corolário VII, Proposição 36) a resistência deve estar para esta força na razão de 2 para 3, pelo menos.

Lema V

Se um cilindro, uma esfera, e um esferóide, de larguras iguais, forem colocados sucessivamente no meio de um canal cilíndrico, de forma que seus eixos possam coincidir com o eixo do canal, estes corpos impedirão igualmente a passagem da água através do canal.

Pois os espaços que estão entre os lados do canal e o cilindro, a esfera e o esferóide, através do qual passa a água, são iguais; e a água vai passar igualmente através de espaços iguais.

Isto é verdadeiro com a suposição de que está congelada toda a água acima do cilindro, esfera ou esferóide, cuja fluidez não é necessária para tornar a passagem da água a mais rápida possível, como foi explicado acima no Corolário VII, Proposição 36.

Lema VI

Mantendo a mesma suposição, os corpos mencionados anteriormente sofrem ações iguais da água fluindo através do canal.

Isto deriva do Lema 5 e da Terceira Lei, pois a água e os corpos agem mutuamente e igualmente um sobre o outro.

Lema VII

Se a água estiver em repouso no canal, e estes corpos movem-se com velocidade igual e em direções opostas através do canal, suas resistências serão iguais entre si.

Isto deriva do último Lema, pois os movimentos relativos permanecem os mesmos entre si.

Escólio

O caso é o mesmo para todos os corpos convexos e redondos, cujos eixos coincidem com o eixo do canal. Algumas diferenças podem surgir

devido a um atrito maior ou menor; mas nestes Lemas supomos os corpos perfeitamente lisos, o meio livre de toda tenacidade e atrito e que as partes do meio que podem perturbar, impedir e retardar o fluxo da água através do canal por seus movimentos inclinados e supérfluos, estão em repouso entre si, fixas como água congelada e aderindo-se às partes dianteiras e traseiras dos corpos na maneira explicada no Escólio da última Proposição, pois no que segue consideramos a menor resistência que corpos redondos descritos com as maiores seções transversas dadas podem possivelmente encontrar.

Corpos deslocando-se em fluidos, quando eles movem-se em linha reta para frente, fazem com que o fluido suba em suas partes da frente e desça em suas partes traseiras, especialmente se eles são de uma forma obtusa. Portanto, eles encontram com um pouco mais de resistência do que se eles fossem agudos na cabeça e no rabo. E corpos movendo-se em fluidos elásticos, se eles são obtusos atrás e na frente, condensam o fluido um pouco mais nas suas partes da frente e o relaxam o mesmo tanto em suas partes traseiras. Portanto, também, encontram com um pouco mais de resistência do que se eles fossem agudos na cabeça e no rabo. Mas nestes Lemas e Proposições não estamos tratando de fluidos elásticos, mas de inelásticos, e nem de corpos flutuando na superfície do fluido, mas imersos profundamente nele. E quando a resistência dos corpos em fluidos inelásticos for conhecida, podemos então aumentar um pouco esta resistência em fluidos elásticos, como nosso ar; e nas superfícies de fluidos parados, como lagos e mares.

Proposição XXXVIII. Teorema XXX

Se um globo move-se uniformemente para frente num fluido comprimido, infinito e inelástico, sua resistência está para a força com que todo seu movimento pode ser destruído ou gerado no tempo em que ele percorre oito terças partes de seu diâmetro, muito aproximadamente assim como a densidade do fluido está para a densidade do globo.

Pois o globo está para seu cilindro circunscrito assim como 2 está para 3 e, portanto, a força que pode destruir todo o movimento do cilindro, enquanto o mesmo cilindro está percorrendo o comprimento de quatro de seus diâmetros, destruirá todo o movimento do globo enquanto o globo está percorrendo ⅔ de seu comprimento, isto é, oito terças partes de seu próprio diâmetro. Agora a resistência do cilindro está para esta força muito aproxi-

madamente assim como a densidade do fluido está para a densidade do cilindro ou do globo (pela Proposição 37), e a resistência do globo é igual à resistência do cilindro (pelos Lemas 5, 6 e 7). Q.E.D.

COROLÁRIO I – As resistências dos globos em meios infinitos comprimidos estão numa razão composta da razão ao quadrado da velocidade e da razão ao quadrado do diâmetro e da razão da densidade dos meios.

COROLÁRIO II – A maior velocidade com que um globo pode descer por seu peso comparativo através de um fluido com resistência é a mesma que aquela que ele pode adquirir ao cair com o mesmo peso, e sem qualquer resistência, percorrendo um espaço que está para quatro terças partes de seu diâmetro assim como a densidade do globo está para a densidade do fluido. Pois o globo no tempo de sua queda, movendo-se com a velocidade adquirida ao cair, percorrerá um espaço que estará para oito terças partes de seu diâmetro assim como a densidade do globo está para a densidade do fluido; e a força de seu peso que gera este movimento estará para a força que pode gerar o mesmo movimento no tempo que o globo percorre oito terças partes de seu diâmetro com a mesma velocidade assim como a densidade do fluido está para a densidade do globo e, portanto, (por esta Proposição) a força do peso será igual à força de resistência, logo não pode acelerar o globo.

COROLÁRIO III – Se for dada a densidade do globo e sua velocidade no início do movimento, e a densidade do fluido comprimido em repouso no qual o corpo se move, também será dada em qualquer tempo a velocidade do globo e sua resistência, e o espaço percorrido por ele (pelo Corolário VII, Proposição 35).

COROLÁRIO IV – Um globo movendo-se num fluido comprimido em repouso da mesma densidade que ele mesmo vai perder metade de seu movimento antes de ele ter percorrido o comprimento de dois de seus diâmetros (pelo mesmo Corolário VII).

PROPOSIÇÃO XXXIX. TEOREMA XXXI

Se um globo move-se uniformemente para frente através de um fluido encerrado e comprimido num canal cilíndrico, sua resistência está para a força com que todo seu movimento pode ser gerado ou destruído no tempo em que ele percorre oito terças partes de seu diâmetro, numa razão composta da razão do orifício do canal para o excesso deste orifício acima de metade do maior círculo do globo; e da razão ao quadrado do orifício do canal para o excesso

deste orifício acima do maior círculo do globo; e da razão da densidade do globo para a densidade do fluido, aproximadamente.

Isto decorre do Corolário II, Proposição 37, e a demonstração procede na mesma maneira que na Proposição anterior.

Escólio

Nas duas últimas Proposições supomos (como foi feito antes no Lema 5) que está congelada toda a água que precede o globo e cuja fluidez aumenta a resistência do mesmo. Agora, se esta água tornar-se fluida, ela irá aumentar um pouco a resistência. Mas nestas Proposições este aumento é tão pequeno que ele pode ser desprezado, já que a superfície convexa do globo produz quase o mesmo efeito que o congelamento da água.

Proposição XL. Problema IX

Obter por experiência a resistência de um globo que se move através de um meio comprimido perfeitamente fluido.

Seja A o peso do globo no vácuo, B seu peso no meio com resistência, D o diâmetro do globo, F um espaço que está para ⅓ D assim como a densidade do globo está para a densidade do meio, isto é, assim como A está para A - B, G o tempo em que o globo caindo com o peso B percorre sem resistência o espaço F, e H a velocidade que o corpo adquire por esta queda. Então H será a maior velocidade com que o globo pode possivelmente descer com o peso B no meio com resistência, pelo Corolário II, Proposição 38; e a resistência com que o globo encontra-se ao descer com esta velocidade, será igual a seu peso B; e a resistência que ele encontra-se com qualquer outra velocidade estará para o peso B assim como o quadrado da razão desta velocidade está para a maior velocidade H, pelo Corolário I, Proposição 38.

Esta é a resistência que surge da inatividade da matéria do fluido. A resistência que surge da elasticidade, tenacidade e atrito de suas partes, pode então ser investigada.

Deixe o corpo cair de forma que desça no fluido pelo peso B; e seja P o tempo de queda, e seja este tempo expresso em segundos, se o tempo G for dado em segundos. Encontre o número absoluto N concordando

com o logaritmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, e seja L o logaritmo do número $\frac{N+1}{N}$, e a velocidade adquirida ao cair será $\frac{N-1}{N+1}$ H, e a altura percorrida será $\frac{2PF}{G}$ - 1,3862943611F + 4,605170186LF. Se o fluido tiver uma profundidade suficiente, podemos desprezar o termo 4,605170186LF e $\frac{2PF}{G}$ - 1,3862943611F será aproximadamente a altura percorrida. Isto decorre da Proposição 9, Livro II, e seus Corolários, e são verdadeiras com a suposição de que o globo não se encontra com outra resistência que aquela que surge da inatividade da matéria. Mas se ele de fato encontra-se com qualquer resistência de outro tipo, a descida será mais lenta, e da quantidade desta retardação será conhecida a quantidade desta nova resistência.

Os tempos P	Velocidades do corpo caindo no fluido	Os espaços percorridos ao cair no fluido	Os espaços percorridos com o maior movimento	Os espaços percorridos ao cair no vácuo
0,001G	99999 $\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,02F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	99999999 $\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

Para que a velocidade e descida de um corpo caindo num fluido possam ser conhecidas mais facilmente, compus a tabela anterior, na qual a primeira coluna denota os tempos de descida; a segunda mostra as velocidades adquiridas ao cair, a maior velocidade sendo 100 000 000; a terceira exibe os espaços percorridos ao cair nesses tempos, 2F sendo o espaço que o corpo percorre no tempo G com a maior velocidade; e a quarta fornece os espaços percorridos no tempo G com a maior velocidade nos mesmos tempos. Os números na quarta coluna são $\frac{2P}{G}$, e ao subtrair o número 1,3862944 - 4,6051702L, são encontrados os números na terceira coluna; e estes números devem ser multiplicados pelo espaço F para obter os espaços percorridos ao cair. Uma quinta coluna é adicionada a todas estas, contendo os espaços percorridos nos mesmos tempos por um corpo caindo no vácuo com a força B, seu peso comparativo.

Escólio

Para investigar as resistências dos fluidos por meio de experiências obtive um recipiente quadrado de madeira cujo comprimento e largura internos eram 9 polegadas de medida inglesa e sua profundidade 9½ pés. Preenchi-o com água de chuva e, tendo obtido globos feitos de cera com chumbo incluído neles, observei os tempos das descidas destes globos, sendo de 112 polegadas a altura que eles desciam. Um pé cúbico sólido de água de chuva, medida inglesa, pesa 76 onças *troy*; uma polegada sólida contém o peso de $^{19}/_{36}$ libras *troy*, ou 253⅓ grãos; e um globo de água com uma polegada de diâmetro contém 132,645 grãos no ar, ou 132,8 grãos no vácuo; e qualquer outro globo será como o excesso de seu peso no vácuo acima de seu peso na água.

EXPERIÊNCIA 1 – Um globo que pesava 156¼ grãos no ar e 77 grãos na água percorreu toda a altura de 112 polegadas em 4 segundos. E, se ao repetir a experiência, o globo gastou novamente o mesmo tempo de 4 segundos ao cair.

O peso deste globo no vácuo é $156^{13}/_{38}$ grãos e o excesso deste peso acima do peso do globo na água é $79^{13}/_{38}$ grãos. Portanto, se depreende que o diâmetro do globo é 0,84224 partes de polegada. Assim como este excesso está para o peso do globo no vácuo, também é a densidade da água para a densidade do globo, e assim está ⅔ partes do diâmetro do globo (a saber, 2,24597 polegadas) para o espaço 2F, que será, portanto, 4,4256 polegadas. Agora, um globo caindo no vácuo com seu peso total de $156^{13}/_{38}$ grãos em um segundo de tempo percorre 193⅓ polegadas e, ao cair na água no mes-

mo tempo, com o peso de 77 grãos sem resistência, percorrerá 95,219 polegadas. No tempo G, que está para um segundo de tempo como a raiz quadrada da razão do espaço F, ou de 2,2128 polegadas para 95,219 polegadas, percorrerá 2,2128 polegadas, adquirindo a maior velocidade H com a qual ele é capaz de descer na água. Portanto, o tempo G é 0,15244 segundos. E neste tempo G o globo vai descrever o espaço 2F, igual a 4,4256 polegadas, com a maior velocidade H; e, portanto, em 4 segundos descreverá um espaço de 116,1245 polegadas. Subtraia o espaço 1,3862944xF, ou 3,0676 polegadas, e vai sobrar um espaço de 113,0569 polegadas, que o globo vai descreverá em 4 segundos ao cair através da água num recipiente muito largo. Mas devido à estreiteza do recipiente de madeira mencionado anteriormente, este espaço deve ser diminuído numa razão composta da raiz quadrada da razão do orifício do recipiente para o excesso deste orifício acima da metade do círculo máximo do globo, e da razão simples do mesmo orifício para seu excesso acima do círculo máximo do globo, isto é, numa razão de 1 para 0,9914. Feito isto, temos um espaço de 112,08 polegadas, que um globo ao cair através da água neste recipiente de madeira num tempo de 4 segundos descreveria aproximadamente por esta teoria, embora tenha descrito 112 polegadas pela experiência.

Experiência 2 – Três globos iguais, cada um pesando $76\frac{1}{3}$ grãos no ar e $5\frac{1}{16}$ grãos na água, foram soltos sucessivamente; e cada um atravessou a água num tempo de 15 segundos, percorrendo em sua queda uma altura de 112 polegadas.

Por cálculo, o peso de cada globo no vácuo é $76\frac{5}{12}$ grãos; o excesso deste peso acima do peso na água é $71\frac{17}{48}$ grãos; o diâmetro do globo é 0,81296 de polegada; $\frac{8}{3}$ partes deste diâmetro 2,16789 polegadas; o espaço 2F é 2,3217 polegadas; o espaço que um globo de $5\frac{1}{16}$ grãos de peso percorreria em um segundo sem resistência, 12,808 polegadas, e o tempo G 0,301056 segundos. Portanto, o globo vai percorrer no tempo 0,301056 segundos o espaço 2,3217 polegadas com a maior velocidade que ele é capaz de receber de um peso de $5\frac{1}{16}$ grãos em sua descida através da água e em 15 segundos o espaço de 115,678 polegadas. Subtraia o espaço 1,3862944F, ou 1,609 polegadas, e restará o espaço de 114,069 polegadas que, portanto, o globo teria de percorrer no mesmo tempo se o recipiente fosse muito largo. Mas como nosso recipiente era estreito, o espaço deve ser diminuído por aproximadamente 0,895 de polegada. E assim vai sobrar o espaço 113,174 polegadas, que um globo ao cair neste recipiente teria de percorrer aproximadamente em 15 segundos. Mas pela experiência ele percorreu 112 polegadas. A diferença não é apreciável.

EXPERIÊNCIA 3 – Três globos iguais, cada um pesando 121 grãos no ar, e 1 grama na água, foram soltos sucessivamente caindo através da água nos tempos de 46 segundos, 47 segundos e 50 segundos e percorrendo uma altura de 112 polegadas.

Pela teoria, estes globos deveriam ter caído em aproximadamente 40 segundos. Mas não sei com certeza se sua queda mais lenta foi ocasionada pela consideração de que em movimentos lentos a resistência que surge da força de inatividade tem de fato uma proporção menor para a resistência que surge de outras causas; ou se é para ser atribuída a pequenas bolhas que poderiam haver se aderido aos globos, ou à rarefação da cera pelo calor do tempo ou da mão que os soltou; ou, por último, se ela provém de alguns erros imperceptíveis ao pesar os globos na água. Portanto, para que a experiência possa ser certa e confiável, o peso do globo na água deve ser de vários grãos.

EXPERIÊNCIA 4 – Comecei as experiências já mencionadas para investigar as resistências dos fluidos antes de conhecer a teoria estabelecida nas Proposições imediatamente precedentes. Com o objetivo de examinar a teoria após sua descoberta, obtive um recipiente de madeira cuja largura no lado interno era de 8⅔ polegadas e sua profundidade 15⅓ pés. Fiz então quatro globos de cera, com chumbo por dentro, cada um pesando 139¼ grãos no ar, e 7⅛ grãos na água. Soltei-os, medindo os tempos de suas quedas na água com um pêndulo que oscilava cada meio segundo. Os globos estavam frios e tinham permanecido assim por algum tempo, quando foram pesados e quando foram soltos, já que o calor rarefaz a cera e com isto diminui o peso do globo na água e a cera quando rarefeita não retorna instantaneamente pelo frio à sua densidade anterior. Antes de eles serem soltos, foram totalmente submersos na água, para evitar que pelo peso de qualquer parte deles que poderia por acaso estar acima da água, suas descidas fossem aceleradas no início. Quando após suas imersões eles estavam perfeitamente em repouso, foram soltos então com o maior cuidado para que não recebessem qualquer impulso da mão que os soltou. E caíram sucessivamente nos tempos de 47½, 48½, 50 e 51 oscilações, percorrendo uma altura de 15 pés e 2 polegadas. Mas o tempo estava um pouco mais frio do que quando os globos foram pesados e, portanto, repeti a experiência um outro dia. Então os globos caíram nos tempos de 49, 49½, 50 e 53; e numa terceira tentativa nos tempos de 49½, 50, 51 e 53 oscilações. E ao realizar a experiência várias outras vezes, encontrei que os globos caíam na maior parte das vezes nos tempos de 49½ e 50 oscilações. Quando eles caíram mais lentamente, suspeitei que tivessem sido retardados ao bater contra os lados do recipiente.

Agora, calculando pela teoria, o peso do globo no vácuo é 139⅖ grãos; o excesso deste peso acima do peso do globo na água, 132 11/40 grãos; o diâmetro do globo, 0,99868 de polegada; ⅜ partes do diâmetro, 2,66315 polegadas; o espaço 2F, 2,8066 polegadas; o espaço que um globo pesando 7⅛ grãos descreve caindo sem resistência no tempo de um segundo, 9,88164 polegadas; e o tempo G, 0,376843 segundos. Portanto, o globo com a maior velocidade com que ele é capaz de descer através da água pela força de um peso de 7⅛ grãos descreverá um espaço de 2,8066 polegadas no tempo de 0,376843 segundos, e no tempo de um segundo um espaço de 7,44766 polegadas, e no tempo de 25 segundos, ou em 50 oscilações, o espaço de 186,1915 polegadas. Subtraia o espaço 1,386294F, ou 1,9454 polegadas, e restará o espaço de 184,2461 polegadas que o globo vai percorrer neste tempo num recipiente muito largo. Como nosso recipiente era estreito, diminua este espaço numa razão composta da raiz quadrada da razão do orifício do recipiente para o excesso deste orifício acima da metade do círculo máximo do globo, e da razão simples do mesmo orifício para seu excesso acima do círculo máximo do globo. Teremos então o espaço de 181,86 polegadas, que o globo teria de percorrer pela teoria neste recipiente no tempo de 50 oscilações, aproximadamente. Mas ele percorreu o espaço de 182 polegadas pela experiência, em 49½ ou 50 oscilações.

Experiência 5 – Quatro globos pesando 154⅜ grãos no ar e 21½ grãos na água, sendo soltos várias vezes, caíram percorrendo uma altura de 15 pés e 2 polegadas nos tempos de 28½, 29, 29½ e 30, e, algumas vezes, de 31, 32 e 33 oscilações.

Pela teoria eles deveriam ter caído no tempo de 29 oscilações, aproximadamente.

Experiência 6 – Cinco globos, pesando 212⅜ grãos no ar e 79½ na água, sendo soltos várias vezes, caíram percorrendo uma altura de 15 pés e 2 polegadas nos tempos de 15, 15½, 16, 17 e 18 oscilações.

Pela teoria eles deveriam ter caído no tempo de 15 oscilações, aproximadamente.

Experiência 7 – Quatro globos, pesando 293⅜ grãos no ar e 35⅞ grãos na água, sendo soltos várias vezes, caíram percorrendo uma altura de 15 pés e 1½ polegadas nos tempos de 29½, 30, 30½, 31, 32 e 33 oscilações.

Pela teoria eles deveriam ter caído no tempo de 28 oscilações, aproximadamente.

Ao procurar pela causa que fez com que estes globos de mesmo peso e tamanho caíssem alguns mais rápido e outros mais devagar, descobri o seguinte: que os globos, quando eles foram inicialmente soltos e começaram a cair, oscilaram ao redor de seus centros, com o lado mais pesado descen-

do primeiro, produzindo um movimento oscilatório. Ora, ao oscilar assim, o globo comunica um maior movimento à água do que se ele descesse sem quaisquer oscilações e, por esta comunicação, perde parte de seu próprio movimento com o qual ele devia descer. Portanto, quão maior ou menor for esta oscilação, ele será mais ou menos retardado. Além disto, o globo sempre se afasta do seu próprio lado que está descendo na oscilação, aproximando-se dos lados do recipiente, de forma a até mesmo colidir contra eles algumas vezes. E quanto mais pesados forem os globos, mais forte será a oscilação; e quão maiores sejam, mais a água será agitada por ela. Portanto, para diminuir esta oscilação dos globos, fiz outros novos de chumbo e cera, aderindo o chumbo em um lado do globo muito próximo de sua superfície; e soltei o globo de forma que, tão próximo quanto possível, o lado mais pesado pudesse estar mais baixo no início da descida. Logo, as oscilações tornaram-se muito menores do que antes e os tempos em que os globos caíam não eram tão desiguais, como nas experiências seguintes.

EXPERIÊNCIA 8 – Quatro globos pesando 139 grãos no ar e $6\frac{1}{2}$ na água foram soltos várias vezes, caindo geralmente num tempo de 51 oscilações, nunca em mais do que 52 ou em menos do que 50, percorrendo uma altura de 182 polegadas.

Pela teoria eles deveriam ter caído no tempo aproximado de 52 oscilações.

EXPERIÊNCIA 9 – Quatro globos pesando $273\frac{1}{4}$ grãos no ar e $140\frac{3}{4}$ na água, sendo soltos várias vezes, nunca caíram em menos do que 12 oscilações e nunca em mais do que 13, percorrendo uma altura de 182 polegadas.

Pela teoria estes globos deveriam ter caído no tempo de $11\frac{1}{3}$ oscilações, aproximadamente.

EXPERIÊNCIA 10 – Quatro globos pesando 384 grãos no ar e $119\frac{1}{2}$ na água, sendo soltos várias vezes, caíram nos tempos de $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ e 19 oscilações, percorrendo uma altura de $181\frac{1}{2}$ polegadas. E quando eles caíram no tempo de 19 oscilações, ouvi algumas vezes eles colidindo contra os lados do recipiente antes de atingirem o fundo.

Pela teoria eles deveriam ter caído no tempo de $15\frac{5}{9}$ oscilações, aproximadamente.

EXPERIÊNCIA 11 – Três globos iguais, pesando 48 grãos no ar e $3\frac{29}{32}$ na água, sendo soltos várias vezes, caíram nos tempos de $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 e 46 oscilações, e geralmente em 44 e 45, percorrendo uma altura de $182\frac{1}{2}$ polegadas, aproximadamente.

Pela teoria eles deveriam ter caído no tempo de $46\frac{5}{9}$ oscilações, aproximadamente.

EXPERIÊNCIA 12 – Três globos iguais pesando 141 grãos no ar e $4\frac{3}{8}$ na água, sendo soltos várias vezes, caíram nos tempos de 61, 62, 63, 64 e 65 oscilações, percorrendo um espaço de 182 polegadas.

E pela teoria eles deveriam ter caído em $64\frac{1}{2}$ oscilações, aproximadamente.

A partir destas experiências é evidente que, quando os globos caem lentamente, como na segunda, quarta, quinta, oitava, décima primeira e décima segunda experiências, os tempos de queda são exibidos corretamente pela teoria, mas quando os corpos caem mais rapidamente, como na sexta, nona e décima experiências, a resistência era pouco maior do que o quadrado da velocidade. Pois os globos ao caírem oscilam um pouco. Nos globos que são leves e caem lentamente, esta oscilação termina logo pela fraqueza do movimento, mas em globos maiores e mais pesados, sendo forte o movimento, ela continua por mais tempo, não sendo reprimida pela água ambiente a não ser após várias oscilações. Além disto, quão mais rapidamente movem-se os globos, menos são pressionados pelo fluido em suas partes traseiras e se a velocidade for aumentada continuamente, eles finalmente deixarão um espaço vazio atrás deles, a não ser que a compressão do fluido seja aumentada ao mesmo tempo. Pois a compressão do fluido deve ser aumentada (pelas Proposições 32 e 33) como o quadrado da velocidade, para manter a resistência na mesma razão ao quadrado. Mas como isto não é feito, os globos que se movem rapidamente não são tão pressionados em suas partes traseiras como os outros e pela falta desta pressão acontece de suas resistências serem um pouco maiores do que o quadrado de suas velocidades.

Portanto, a teoria concorda com as experiências de corpos que caem na água. Falta examinarmos as observações de corpos que caem no ar.

EXPERIÊNCIA 13 – Do topo da Igreja de São Paulo em Londres, em junho de 1710, dois globos de vidro foram soltos juntos, um cheio de mercúrio e o outro de ar e, em sua queda, eles percorreram uma altura de 220 pés ingleses. Uma mesa de madeira foi suspensa por dobradiças de ferro em um lado e o outro lado da mesa era suportado por um pino de madeira. Os dois globos que estavam sobre esta mesa foram soltos juntos removendo o pino por meio de um arame alcançando de lá até o solo, de forma que, removendo o pino, a mesa que não tinha outro suporte exceto as dobradiças de ferro, desceu e ao girar ao redor das dobradiças permitiu a caída dos globos. No mesmo instante, com o mesmo empurrão do arame que soltou o pino, um pêndulo oscilando em segundos foi solto e começou a oscilar. Os diâmetros e pesos dos globos e seus tempos de queda são mostrados na tabela seguinte:

Os globos cheios com mercúrio			Os globos cheios de ar		
Pesos	Diâmetros	Tempos de queda	Pesos	Diâmetros	Tempos de queda
grãos	*polegadas*	*segundos*	*grãos*	*polegadas*	*segundos*
908	0,8	4	510	5,1	8½
983	0,8	4 -	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8½
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Mas os tempos observados devem ser corrigidos, pois os globos de mercúrio (pela teoria de Galileu) percorrem 257 pés ingleses num tempo de 4 segundos, e 220 pés em apenas 3 segundos e 42 terços[3]. De forma que a mesa de madeira, quando o pino foi removido, não girou sobre suas dobradiças tão rapidamente quanto deveria ter feito e a lentidão desta revolução impediu a descida dos globos no início. Pois os globos estavam perto do meio da mesa e, na verdade, estavam bem mais próximos do eixo sobre o qual ela girou do que do pino. E, portanto, os tempos de queda foram prolongados em cerca de 18 terços[4] e portanto devem ser corrigidos subtraindo este excesso, especialmente nos globos maiores que, devido à grandeza de seus diâmetros, permaneceram por mais tempo sobre a mesa que girava do que os outros. Sendo feito isto, os tempos em que os seis globos maiores caíram são 8 segundos e 12 terços, 7 segundos e 42 terços, 7 segundos e 42 terços, 7 segundos e 57 terços, 8 segundos e 12 terços, e 7 segundos e 42 terços.

Portanto, o quinto em ordem entre os globos que estavam cheios de ar, com 5 polegadas de diâmetro e 483 grãos de peso, caiu em 8 segundos e 12 terços, percorrendo um espaço de 220 pés. O peso de uma quantidade de água igual a este globo é 16 600 grãos; e o peso de uma quantidade igual de ar é $\frac{16\,600}{860}$ grãos, ou 19³⁄₁₀ grãos. Portanto, o peso do globo no vácuo é 502³⁄₁₀ grãos e este peso está para o peso de uma quantidade de ar igual ao globo assim como 502³⁄₁₀ está para 19³⁄₁₀; e assim está 2F para ⅔ do diâmetro do globo, isto é, para 13⅓ polegadas. Portanto, 2F torna-se 28 pés e 11 polegadas. Um globo, caindo no vácuo com seu peso total de 502³⁄₁₀ grãos, percorre no tempo de um segundo, 193⅓ polegadas como acima e com o peso

3. Apêndice, Nota 10.
4. Apêndice, Nota 10.

de 483 grãos percorre 185,905 polegadas; e com este peso de 483 grãos no vácuo percorrerá o espaço F, ou 14 pés e 5½ polegadas, no tempo de 57 terços e 58 quartos, adquirindo a maior velocidade com que é capaz de descer no ar. Com esta velocidade o globo percorre 245 pés e 5⅓ polegadas no tempo de 8 segundos e 12 terços. Subtraia 1,3863xF, ou 20 pés e ½ polegada, e restarão 225 pés e 5 polegadas. Este espaço, portanto, o globo que cai teria que percorrer pela teoria em 8 segundos e 12 terços. Mas pela experiência ele percorreu um espaço de 220 pés. A diferença não é apreciável.

Por cálculos análogos aplicados aos outros globos cheios de ar, compus a tabela seguinte:

Os pesos dos globos	Os diâmetros	Os tempos de queda de uma altura de 220 pés		Os espaços que eles teriam de percorrer pela teoria		Os excessos	
grãos	*polegadas*	*segundos*	*terços*	*pés*	*polegadas*	*pés*	*polegadas*
510	5,1	8	12	226	11	6	11
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	0
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Experiência 14 – No ano de 1719, no mês de julho, o Dr. Desaguliers fez novamente algumas experiências deste tipo, dando forma de orbes esféricos a bexigas de porco, servindo-se de uma esfera côncava de madeira onde foram introduzidas as bexigas, sendo antes bem umedecidas. Após isto, elas foram obrigadas a encher a cavidade esférica que as continha ao serem cheias de ar e, então, quando secas, foram removidas. Estas foram soltas da lanterna no topo da cúpula da mesma igreja, a saber, de uma altura de 272 pés e no mesmo instante foi solto um globo de chumbo, cujo peso era aproximadamente de 2 libras *troy*. Entrementes, algumas pessoas que estavam na parte superior da igreja onde os globos foram soltos observaram os tempos totais de queda e outras que estavam no solo observaram as diferenças dos tempos entre a queda do peso de chumbo e a queda da bexiga. Os tempos eram medidos por pêndulos que oscilavam a cada meio segundo. E um daqueles que estava no solo tinha uma máquina vibrando quatro vezes em um segundo; e um outro tinha uma outra máquina feita precisamente com um pêndulo também vibrando quatro vezes em um segundo. Também um daqueles que estava no topo da igreja tinha uma máquina similar. Estes instrumentos foram

construídos de forma que seus movimentos podiam ser parados ou renovados à vontade. O globo de chumbo caiu num tempo de aproximadamente 4¼ segundos e, da adição deste tempo à diferença de tempo de que falamos acima, foi obtido o tempo total em que a bexiga caiu. Os tempos que as cinco bexigas gastaram ao cair, após o globo de chumbo ter atingido o solo, foram, a primeira vez, 14¾ segundos, 12¾ segundos, 14⅝ segundos, 17¾ segundos e 16⅞ segundos; e a segunda vez, 14½ segundos, 14¼ segundos, 14 segundos, 19 segundos e 16¾ segundos. Adicione a estes 4¼ segundos, o tempo em que o globo de chumbo estava caindo, e os tempos totais em que as cinco bexigas caíram foram: a primeira vez, 19 segundos, 17 segundos, 18⅞ segundos, 22 segundos e 21⅛ segundos; e a segunda vez, 18¾ segundos, 18½ segundos, 18¼ segundos, 23¼ segundos e 21 segundos. Os tempos observados no topo da igreja foram: a primeira vez, 19⅜ segundos, 17¼ segundos, 18¾ segundos, 22⅛ segundos e 21⅝ segundos; e a segunda vez, 19 segundos, 18⅝ segundos, 18⅜ segundos, 24 segundos e 21¼ segundos. Mas as bexigas nem sempre caíram diretamente para baixo, algumas vezes esvoaçaram um pouco no ar e oscilaram para frente e para trás na sua descida. E por estes movimentos os tempos de suas quedas foram prolongados e aumentaram algumas vezes meio segundo e algumas vezes um segundo inteiro. A segunda e a quarta bexiga caíram mais diretamente na primeira vez, e a primeira e terceira na segunda vez. A quinta bexiga era enrugada e por seu enrugamento foi um pouco retardada. Encontrei seus diâmetros por meio de suas circunferências, medidas com um fio muito fino que lhes dava duas voltas. Na tabela seguinte comparei as experiências com a teoria, considerando a densidade do ar para a densidade da água de chuva assim como 1 está para 860, e calculando os espaços que, pela teoria, os globos deveriam percorrer ao cair:

Os pesos das bexigas	Os diâmetros	Os tempos de queda de uma altura de 272 pés	Os espaços que deveriam ser percorridos nestes tempos pela teoria		A diferença entre a teoria e as experiências	
grãos	*polegadas*	*segundos*	*pés*	*polegadas*	*pés*	*polegadas*
128	5,28	19	271	11	- 0	1
156	5,19	17	272	0½	+ 0	0½
137½	5,3	18	272	7	+ 0	7
97½	5,26	22	277	4	+ 5	4
99⅛	5	21⅛	282	0	+ 10	0

Portanto, nossa teoria exibe corretamente e muito aproximadamente toda a resistência que os globos encontram movendo-se no ar e na água,

demonstrando ser proporcional à densidade dos fluidos em globos de velocidades e tamanhos iguais.

No Escólio acrescentado à sexta Seção mostramos por experiências de pêndulos que as resistências de globos iguais e igualmente rápidos movendo-se no ar, água e mercúrio são como as densidades dos fluidos. Aqui provamos o mesmo, mais precisamente, por meio de experiências de corpos caindo no ar e na água. Pois os pêndulos em cada oscilação excitam um movimento no fluido sempre contrário ao movimento do pêndulo em seu retorno e a resistência que surge deste movimento, assim como a resistência do fio pelo qual é suspenso o pêndulo, tornam a resistência total de um pêndulo maior do que a resistência deduzida de experiências com corpos em queda. Pois pelas experiências de pêndulos descritas naquele Escólio um globo da mesma densidade que a água, ao percorrer no ar o comprimento de seu semidiâmetro, perde a $\frac{1}{3342}$ parte de seu movimento. Mas pela teoria fornecida nesta sétima Seção e confirmada por experiências de corpos em queda, o mesmo globo ao percorrer o mesmo comprimento, perderia apenas uma parte de seu movimento igual a $\frac{1}{4586}$, supondo a densidade da água estar para a densidade do ar assim como 860 está para 1. Portanto, encontraram-se resistências maiores por experiências de pêndulos (pelas razões que acabamos de mencionar) do que por experiências de corpos em queda; e isto numa razão ao redor de 4 para 3. Mas, como as resistências de pêndulos oscilando no ar, água e mercúrio são aumentadas de forma similar por causas similares, a proporção das resistências nestes meios vão ser corretamente exibidas pelas experiências dos pêndulos assim como pelas experiências de corpos em queda. E, portanto, pode-se concluir que as resistências dos corpos movendo-se em quaisquer fluidos, embora da mais extrema fluidez, são como as densidades dos fluidos, se o restante permanecer igual.

Logo, podemos determinar agora a parte de seu movimento que um globo qualquer lançado em qualquer fluido perderia aproximadamente num tempo dado. Seja D o diâmetro do globo, V sua velocidade no início de seu movimento e T o tempo em que um globo com a velocidade V pode percorrer no vácuo um espaço que está para o espaço $\frac{8}{3}$D assim como a densidade do globo está para a densidade do fluido; e o globo lançado neste fluido perderá a parte $\frac{tV}{T+t}$ em qualquer outro tempo *t*, sobrando a parte $\frac{TV}{T+t}$; e percorrerá um espaço que estará para aquele percorrido pelo mes-

mo tempo no vácuo com a velocidade uniforme V, assim como o logaritmo do número $\frac{T + t}{T}$ multiplicado pelo número 2,302585093 está para o número $\frac{t}{T}$ pelo Corolário VII, Proposição 35. Em movimentos lentos a resistência pode ser um pouco menor pois a forma de um globo é mais adaptada para o movimento do que a forma de um cilindro descrito com o mesmo diâmetro. Em movimentos rápidos a resistência pode ser um pouco maior, pois a elasticidade e compressão do fluido não aumentam como o quadrado da velocidade. Mas não considero estes pequenos detalhes.

E embora ar, água, mercúrio e os fluidos semelhantes possam ser tornados mais sutis pela divisão de suas partes *in infinitum*, tornando-se meios infinitamente fluidos, ainda assim a resistência que eles fariam a corpos lançados neles seria a mesma. Pois a resistência considerada nas Proposições precedentes surge da inatividade da matéria e a inatividade da matéria é essencial aos corpos e sempre proporcional à quantidade de matéria. Pela divisão das partes do fluido a resistência decorrente da tenacidade e atrito das partes pode ser de fato diminuída, mas a quantidade de matéria não será de forma alguma diminuída por esta divisão. Se a quantidade de matéria é a mesma, sua força de inatividade será a mesma e, portanto, a resistência de que aqui se fala será a mesma, sempre proporcional a esta força. Para diminuir esta resistência deve ser diminuída a quantidade de matéria nos espaços através dos quais o corpo se move. Portanto, os espaços celestiais através dos quais os globos dos planetas e cometas estão passando continuamente em direção a todas as partes com a maior liberdade e sem a menor diminuição perceptível de seu movimento, devem ser totalmente livres de quaisquer fluidos corpóreos, excetuando, talvez, alguns vapores extremamente rarefeitos e os raios de luz.

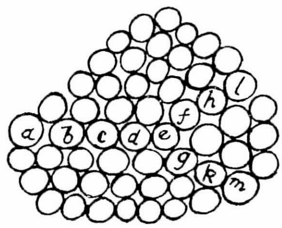
Os projéteis excitam um movimento nos fluidos à medida em que os atravessam e este movimento surge do excesso da pressão do fluido nas partes frontais do projétil acima da pressão do mesmo nas partes traseiras, a qual não pode ser menor em meios infinitamente fluidos do que no ar, na água e no mercúrio, em proporção à densidade de matéria em cada um deles. Agora este excesso de pressão excita, em proporção à sua quantidade, não apenas um movimento no fluido, mas também age sobre o projétil de forma a retardar seu movimento e, portanto, a resistência em todo fluido é como o movimento excitado pelo projétil no fluido, a qual não pode ser menor no éter mais sutil em proporção à densidade deste éter, do que ela é no ar, na água e no mercúrio, em proporção às densidades desses fluidos.

» SEÇÃO VIII

O movimento propagado através de fluidos

PROPOSIÇÃO XLI. TEOREMA XXXII

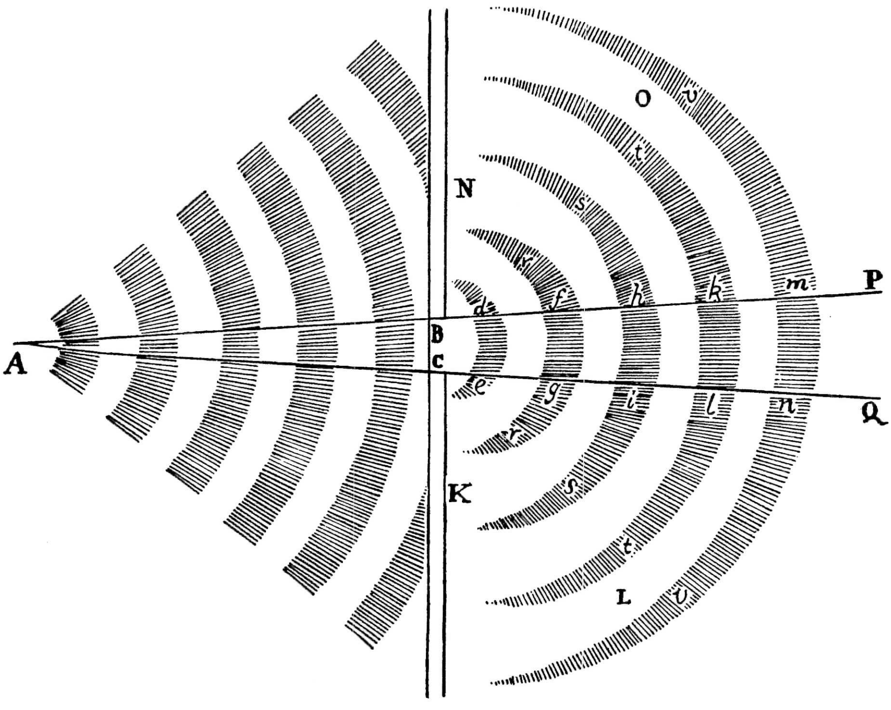
Uma pressão não é propagada através de um fluido em direções retilíneas exceto onde as partículas do fluido estão dispostas numa linha reta.



Se as partículas *a, b, c, d, e* estão dispostas numa linha reta, a pressão pode ser de fato propagada de *a* até *e,* mas então a partícula *e* vai forçar obliquamente as partículas *f* e *g* posicionadas obliquamente, e estas partículas *f* e *g* não suportarão esta pressão a não ser que estejam apoiadas pelas partículas *h* e *k* situadas além delas. Mas as partículas que as apoiam também são pressionadas por elas; e estas partículas não podem suportar a pressão sem serem apoiadas pelas partículas que se situam mais longe ainda, como *l* e *m,* às quais também pressionam, e assim por diante *in infinitum.* Portanto, a pressão, tão logo ela seja propagada a partículas que se situam fora das linhas retas, começa a se desviar em direção a um lado e a outro, sendo propagada obliquamente *in infinitum.* E após ter começado a ser propagada obliquamente, se ela atinge partículas mais distantes que se

situam fora da linha reta, será desviada novamente para um e outro lado toda vez que se encontrar com partículas que não se situam exatamente numa linha reta. Q.E.D.

COROLÁRIO – Se qualquer parte de uma pressão propagada através de um fluido a partir de um ponto dado for interceptada por qualquer obstáculo, a parte remanescente que não é interceptada desviará nos espaços atrás do obstáculo. Isto também pode ser demonstrado da seguinte maneira. Seja uma pressão propagada a partir de um ponto A em direção a toda parte e, se possível, em direções retilíneas; e sendo perfurado o obstáculo NBCK em BC, seja toda a pressão interceptada exceto a parte coniforme APQ que passa através do buraco circular BC. Seja o cone APQ dividido em troncos pelos planos transversais *de*, *fg*, *hi*. Então, enquanto o cone ABC, propagando a



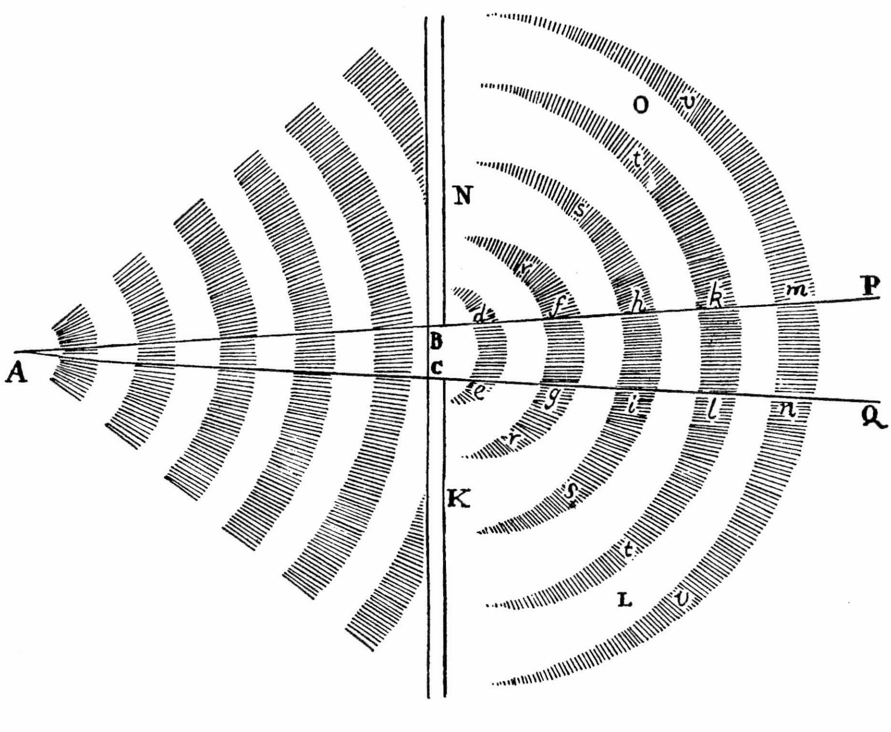
pressão, impulsiona o tronco cônico *degf* situado além dele sobre a superfície *de*, e este tronco impulsiona o próximo tronco *fgih* sobre a superfície *fg*, e este tronco impulsiona um terceiro tronco, e assim *in infinitum*, é evidente (pela terceira Lei) que o primeiro tronco *defg* é tanto impulsionado e pressionado na superfície *fg* pela reação do segundo tronco *fghi*, quanto impulsiona e pressiona este segundo tronco. Portanto, o tronco *degf* é comprimi-

do por ambos os lados, isto é, entre o cone A*de* e o tronco *fhig* e, portanto, (pelo Caso 6, Proposição 19) não pode preservar sua forma, a não ser que seja comprimido com a mesma força por todos os lados. Portanto, com a mesma força com que ele é pressionado nas superfícies *de* e *fg*, ele vai tentar irromper nos lados *df* e *eg*; e lá (não sendo em absoluto tenaz ou duro, mas perfeitamente fluido) ele sairá, expandindo-se, a não ser que haja um fluido ambiente opondo-se a esta tendência. Portanto, pelo esforço que ele faz para sair, ele pressionará o fluido ambiente nos lados *df* e *eg* com a mesma força que ele exerce sobre o tronco *fghi*. Logo, a pressão será tanto propagada desde os lados *df* e *eg* para dentro dos espaços NO e KL em ambos os lados, quanto é propagada da superfície *fg* em direção a PQ. Q.E.D.

Proposição XLII. Teorema XXXIII

Todo movimento propagado através de um fluido diverge de um progresso retilíneo em direção aos espaços imóveis.

Caso 1 – Seja um movimento propagado do ponto A através do buraco BC e, se possível, suponha que ele prossiga no espaço cônico BCQP de



acordo com linhas retas que divergem do ponto A. E inicialmente suponhamos que este movimento seja semelhante ao de ondas na superfície da água parada; e sejam *de, fg, hi, kl,* etc., os topos das várias ondas, divididas uma da outra pelo mesmo tanto de vales ou buracos intermediários. Então, como a água nos cumes das ondas é mais alta do que nas partes imóveis do fluido KL e NO, ela desce dos topos dos cumes *e, g, i, l,* etc., *d, f, h, k,* etc., de ambos os lados em direção a KL e NO; e como a água é mais funda nos vales das ondas do que nas partes imóveis do fluido KL e NO, ela desce para estes vales a partir das partes imóveis. Pelo primeiro defluxo os cumes das ondas irão dilatar-se em ambos os lados e serão propagados em direção a KL e NO. E como o movimento das ondas de A em direção a PQ é mantido por um defluxo contínuo dos cumes das ondas para os vales próximos a elas e, portanto, não podem ser mais rápidos do que na proporção da rapidez da descida; e a descida da água em cada lado em direção a KL e NO deve ser realizada com a mesma velocidade, segue-se que a dilatação das ondas em cada lado em direção a KL e NO será propagada com a mesma velocidade que as próprias ondas deslocam-se para a frente diretamente de A para PQ. E, portanto, todo o espaço de ambos os lados em direção a KL e NO será cheio pelas ondas dilatadas *rfgr, shis, tklt, vmnv,* etc. Q.E.D. Esses resultados qualquer um pode encontrar ao realizar a experiência em água parada.

CASO 2 – Vamos supor que *de, fg, hi, kl, mn* representem pulsos propagados sucessivamente do ponto A através de um meio elástico. Conceba que os pulsos são propagados por condensações e rarefações sucessivas do meio, de forma que a parte mais densa de cada pulso possa ocupar uma superfície esférica descrita ao redor do centro A e que intervalos iguais estendam-se entre os pulsos sucessivos. Represente pelas linhas *de, fg, hi, kl,* etc., as partes mais densas dos pulsos, propagadas através do buraco BC; e como é mais denso lá do que nos espaços em ambos os lados em direção a KL e NO, ele irá dilatar-se tanto em direção a estes espaços KL e NO, quanto em direção aos intervalos rarefeitos entre os pulsos e, portanto, o meio, tornando-se sempre mais rarefeito próximo aos intervalos e mais denso próximo aos pulsos, compartilhará de seu movimento. E como o movimento progressivo dos pulsos surge da relaxação contínua das partes mais densas em direção aos intervalos rarefeitos antecedentes; e como os pulsos relaxam-se em ambos os lados em direção às partes em repouso do meio KL e NO com aproximadamente a mesma rapidez, segue-se que os pulsos irão dilatar-se sobre todos os lados em direção às partes imóveis KL e NO com quase a mesma velocidade com que eles são propagados diretamente a partir do centro A, preenchendo, portanto, todo o espaço KLON. Q.E.D. E também

obtemos o mesmo pela experiência com sons que são ouvidos através de uma montanha interposta. Se eles entram num quarto através da janela, dilatam-se para todas as partes do quarto, sendo ouvidos em todo canto, não como refletidos das paredes opostas, mas sim diretamente propagados da janela, tanto quanto nossos sentidos podem julgar.

Caso 3 – Suponhamos, por último, que um movimento de qualquer tipo é propagado de A através do buraco BC. Então, como a causa desta propagação é que as partes do meio que estão mais próximas do centro A perturbam e agitam aquelas que estão mais longe dele, e como as partes que são forçadas são fluidas, elas afastam-se para todos os lados em direção aos espaços onde elas são menos pressionadas. Conseqüentemente elas afastam-se em direção a todas as partes do meio em repouso, tanto em direção às partes dos dois lados como KL e NO, quanto em direção àquelas bem na frente como PQ. Desta forma, todo o movimento, tão logo atravesse o buraco BC, começa a dilatar-se e assim, tanto de seu princípio e centro, será propagado diretamente para todo lado. Q.E.D.

Proposição XLIII. Teorema XXXIV

Todo corpo vibrante num meio elástico propaga o movimento dos pulsos para diante, em todas as direções, mas num meio inelástico gera um movimento circular.

Caso 1 – As partes de um corpo vibrante, indo e voltando alternadamente, ao ir forçam e empurram as partes do meio que estão mais próximas, e por este impulso as comprimem e condensam, e ao voltar faz com que as partes comprimidas retrocedam e se expandam. Portanto, as partes do meio que estão mais próximas do corpo vibrante movem-se para frente e para trás alternadamente, da mesma forma que fazem as partes do corpo vibrante. Pelo mesmo motivo que as partes deste corpo agitam estas partes do meio, sendo elas agitadas por tremores similares agitam por sua vez outras partes próximas a elas próprias, e estas outras, agitadas de maneira semelhante agitam outras que estão além delas, e assim por diante *in infinitum*. E da mesma forma que as primeiras partes do meio estavam condensadas ao ir e relaxadas ao voltar, também as outras partes estarão condensadas toda vez que forem e se expandirão toda vez que retornam. E, portanto, elas não vão e voltam ao mesmo tempo (pois neste caso elas sempre manteriam distâncias determinadas uma da outra e não poderia haver condensação e rarefa-

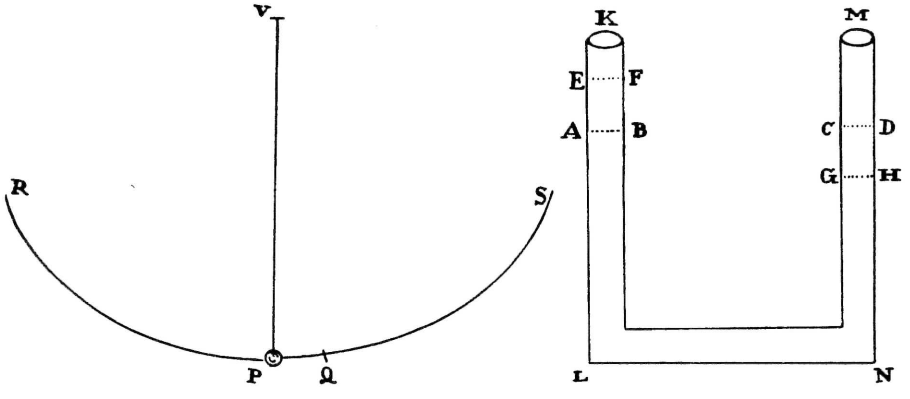
ção alternada). Mas como elas aproximam-se umas das outras nos lugares em que estão condensadas e afastam-se umas das outras nos lugares onde estão expandidas, então algumas delas estarão indo enquanto outras estarão voltando; e assim por diante *in infinitum*. As partes que estão indo assim condensadas são pulsos, devido ao movimento progressivo com que atingem obstáculos em seu caminho. Portanto, os pulsos sucessivos produzidos por um corpo vibrante serão propagados em direções retilíneas, a distâncias aproximadamente iguais um do outro, devido aos intervalos iguais de tempo em que o corpo produz os vários pulsos por suas várias vibrações. E embora as partes do corpo vibrante vão e voltam numa direção certa e determinada, o pulso propagado lá através do meio dilata-se em direção aos lados de acordo com a Proposição precedente, sendo propagado em todos os lados a partir do corpo vibrante, como a partir de um centro comum em superfícies aproximadamente esféricas e concêntricas, como em ondas excitadas ao balançar um dedo na água, que procedem não apenas para frente e para trás concordando com o movimento do dedo, mas espalham-se na forma de círculos concêntricos ao redor do dedo, sendo propagadas para todo lado. Pois a gravidade da água ocupa o lugar da força elástica.

CASO 2 – Se o meio não for elástico, como suas partes não podem ser condensadas pela pressão decorrente das partes vibrantes do corpo que vibra, o movimento será propagado num instante em direção às partes onde o meio cede mais facilmente, isto é, em direção às partes que o corpo vibrante deixaria vazia de outra forma. É o mesmo caso de um corpo lançado num meio qualquer. Um meio cedendo aos projéteis não afasta-se *in infinitum*, mas com um movimento circular dá uma volta até os espaços que o corpo deixa atrás de si. Portanto, cada vez que um corpo vibrante tende para qualquer parte, o meio cedendo a ele dá a volta num círculo para as partes deixadas pelo corpo, e cada vez que o corpo retorna ao primeiro lugar, o meio será deslocado do lugar onde tinha circundado retornando a seu lugar original. E embora o corpo vibrante não seja firme e duro, mas flexível em todos os sentidos, se ele continuar com uma certa magnitude não pode impelir o meio por suas vibrações em todo lado sem ceder a ele em algum outro lugar. Portanto o meio ao afastar-se das partes do corpo onde é pressionado sempre retornará em círculo para as partes que cedem a ele. Q.E.D.

COROLÁRIO – Portanto, é um erro pensar que a agitação das partes da chama conduzem à propagação de uma pressão em direções retilíneas através de um meio ambiente. Tal pressão origina-se não apenas da agitação das partes da chama, mas da dilatação do todo.

Proposição XLIV. Teorema XXXV

Se a água sobe e desce alternadamente nos tubos levantados KL e MN de um canal ou cano, e se for construído um pêndulo cujo comprimento entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação é igual a metade do comprimento da água no canal, afirmo que a água vai subir e descer nos mesmos tempos em que o pêndulo oscila.



Meço o comprimento da água ao longo dos eixos do canal e seus tubos, e tornando-o igual à soma destes eixos. Também não considero a resistência da água que surge de seu atrito com os lados do canal. Represente, portanto, por AB e CD a altura média da água nos dois tubos, e quando a água no tubo KL sobe para a altura EF, a água desce no tubo MN para a altura GH. Seja P um corpo pendular, VP o fio, V o ponto de suspensão, RPQS a ciclóide que o pêndulo percorre, P seu ponto mais baixo e PQ um arco igual à altura AE. A força com que o movimento da água é alternadamente acelerado e retardado é o excesso do peso da água num tubo acima do peso no outro. Portanto, quando a água no tubo KL sobe para EF e no outro tubo desce para GH, esta força é duas vezes o peso da água EABF e, portanto, está para o peso de toda a água assim como AE ou PQ está para VP ou PR. Também a força com que o corpo P é acelerado ou retardado em qualquer lugar de uma ciclóide, como Q, está (pelo Corolário, Proposição 51, Livro I) para seu peso total assim como sua distância PQ do lugar mais baixo P está para o comprimento PR da ciclóide. Portanto, as forças motrizes da água e do pêndulo, percorrendo os espaços iguais AE e PQ, são como os pesos a serem movidos. Portanto, se a água e o pêndulo estão inicialmente em repouso, estas forças vão movê-los em tempos iguais, fazendo com que vão e voltem juntos num movimento recíproco. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, as alternações da água em subir e descer são todas realizadas em tempos iguais, seja o movimento mais ou menos intenso ou remisso.

COROLÁRIO II – Se o comprimento de toda a água no canal for de 6⅑ pés de medida francesa, a água descerá no tempo de um segundo, e subirá num outro segundo, e assim por diante alternadamente *in infinitum*, pois um pêndulo de 3 1/18 pés de comprimento oscilará num tempo de um segundo.

COROLÁRIO III – Mas se o comprimento da água for aumentado ou diminuído, o tempo da alternação será aumentado ou diminuído como a raiz quadrada do comprimento.

PROPOSIÇÃO XLV. TEOREMA XXXVI

A velocidade das ondas varia como a raiz quadrada das larguras.

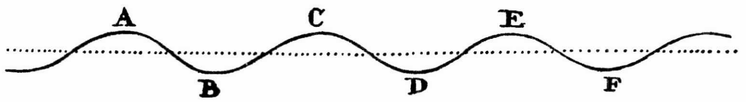
Isto segue da construção da Proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO XLVI. PROBLEMA X

Achar a velocidade das ondas.

Seja construído um pêndulo cujo comprimento entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação é igual à largura das ondas e, no tempo em que o pêndulo realiza uma única oscilação, as ondas avançam aproximadamente um espaço igual a suas larguras.

O que chamo a largura das ondas é a medida transversal que existe entre a parte mais funda dos vales ou entre os topos dos cumes. Represente por ABCDEF a superfície da água estagnada subindo e descendo em ondas sucessivas. Sejam A, C, E, etc., os topos das ondas; e sejam B, D, F, etc., os vales intermediários. Como o movimento das ondas obedece à subida e descida sucessiva da água, de forma que suas partes que estão mais altas num instante, como A, C, D, etc., tornam-se as mais baixas imediatamente depois; e como a força motriz pela qual as partes mais altas descem e as mais baixas sobem é o peso da água elevada, esta subida e descida alternada será análoga ao movimento recíproco da água no canal, observando-se as mesmas leis em relação aos tempos de subida e descida. Portanto (pela Proposição 44), se as distâncias entre os pontos mais altos das ondas A, C, E e os mais baixos



B, D, F for igual a duas vezes o comprimento de qualquer pêndulo, as partes mais altas A, C, E vão tornar-se as mais baixas no tempo de uma oscilação e no tempo de uma outra oscilação subirão de novo. Portanto, com a passagem de cada onda ocorrerá o tempo de duas oscilações, isto é, a onda vai percorrer sua largura no tempo que o pêndulo oscila duas vezes; mas um pêndulo com quatro vezes este comprimento e, portanto, igual à largura das ondas, vai oscilar apenas uma vez naquele tempo. Q.E.I.

COROLÁRIO I – Portanto, ondas cuja largura é igual a $3\frac{1}{18}$ pés franceses avançam um espaço igual à sua largura no tempo de um segundo, num minuto atravessam um espaço de $183\frac{1}{3}$ pés e numa hora um espaço de 11.000 pés, aproximadamente.

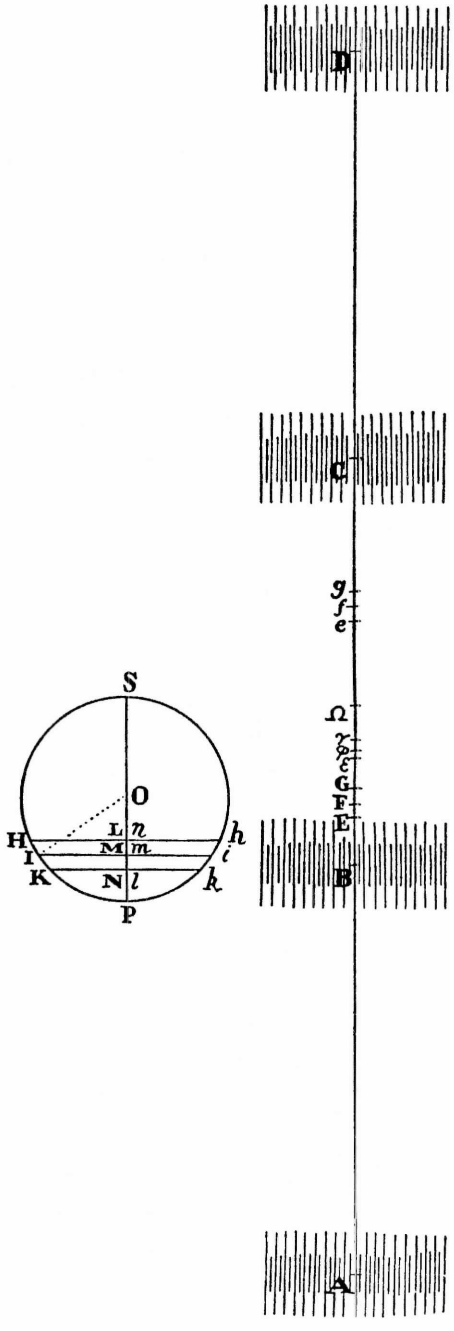
COROLÁRIO II – E a velocidade de ondas maiores ou menores será aumentada ou diminuída como a raiz quadrada de suas larguras.

Isto é válido com a suposição de que as partes da água sobem e descem numa linha reta. Mas, na verdade, esta subida e descida é mais de caráter circular. Portanto, considero o tempo definido por esta Proposição como apenas aproximado.

PROPOSIÇÃO XLVII. TEOREMA XXXVII

Se pulsos são propagados num fluido, as várias partículas do fluido, indo e voltando com o movimento recíproco mais curto, são sempre aceleradas ou retardadas de acordo com a lei do pêndulo oscilante.

Represente por AB, BC, CD, etc., distâncias iguais de pulsos sucessivos; ABC a linha de direção do movimento dos pulsos sucessivos propagados de A até B; E, F e G três pontos físicos do meio imóvel situados na linha reta AC a distâncias iguais um do outro; E*e*, F*f*, G*g* espaços iguais extremamente pequenos nos quais esses pontos vão e voltam com um movimento recíproco em cada vibração; ε, φ, γ quaisquer lugares intermediários dos mesmos pontos; EF e FG linhas físicas curtas, ou partes lineares do meio situadas entre eses pontos, e transferidas sucessivamente aos lugares εφ, φγ, e *ef*, *fg*. Trace a linha reta PS igual à linha reta E*e*. Divida ao meio a mesma em O, e descreva o círculo SIP*i* com centro O e raio OP. Represente o tempo total



de uma vibração, com suas partes proporcionais, pela circunferência inteira deste círculo e suas partes de forma que quando qualquer tempo PH ou PHS*h* for completado, se forem traçadas as perpendiculares HL ou *hl* a PS, e for considerado Eε igual a PL ou P*l*, o ponto físico E seja encontrado em ε. Um ponto como E, movendo-se de acordo com esta lei com um movimen-

to recíproco, indo de E através de ε para *e* e retornando de novo através de ε para E, realizará várias vibrações com os mesmos graus de aceleração e retardação que aqueles de um pêndulo oscilante. Vamos agora provar que os vários pontos físicos do meio serão agitados com tal tipo de movimento. Vamos supor, então, que um meio tem tal movimento excitado nele a partir de uma causa qualquer, e considerar o que resulta disto.

Na circunferência PHS*h* considere os arcos iguais HI e IK, ou *hi* e *ik*, tendo a mesma razão para a circunferência inteira assim como as linhas retas iguais EF e FG têm para BC, o intervalo inteiro dos pulsos. Trace as perpendiculares IM e KN, ou *im* e *kn*. Então, como os pontos E, F e G são agitados sucessivamente com movimentos similares e realizam suas vibrações completas compostas de suas idas e voltas, enquanto o pulso é transferido de B para C; se PH ou PHS*h* for o tempo transcorrido desde o início do movimento do ponto E, então PI ou PHS*i* será o tempo transcorrido desde o início do movimento do ponto F, e PK ou PHS*k* o tempo transcorrido desde o início do movimento do ponto G. Portanto, Eε, Fϕ e Gγ serão, respectivamente, iguais a PL, PM e PN, enquanto os pontos estão indo, e a P*l*, P*m* e P*n* quando os pontos estão retornando. Portanto, εγ ou EG + Gγ – Eε será igual a EG - LN quando os pontos estão indo, e em seu retorno igual a EG + *ln*. Mas εγ é a largura ou expansão da parte EG do meio no lugar εγ; e, portanto, a expansão desta parte na sua ida está para sua expansão média assim como EG - LN está para EG; e em sua volta, assim como EG + *ln* ou EG + LN está para EG. Portanto, como LN está para KH assim como IM está para o raio OP, e KH para EG assim como a circunferência PHS*h*P está para BC; isto é, se representamos por V o raio de um círculo cuja circunferência é igual a BC, o intervalo dos pulsos, assim como OP está para V; e, multiplicando os termos correspondentes das proporções, obtemos que LN está para EG assim como IM está para V; a expansão da parte EG, ou do ponto físico F no lugar εγ, está para a expansão média da mesma parte em seu primeiro lugar EG, assim como V - IM está para V na ida, e como V + *im* está para V em sua volta. Portanto, a força elástica do ponto F no lugar εγ está para sua força elástica média no lugar EG assim como $\frac{1}{V - IM}$ está para $\frac{1}{V}$ em sua ida, e como $\frac{1}{V + im}$ está para $\frac{1}{V}$ em sua volta. E, pelo mesmo raciocínio, as forças elásticas dos pontos físicos E e G ao ir estão como $\frac{1}{V - HL}$ e $\frac{1}{V - KN}$ está para $\frac{1}{V}$; e a diferença das forças está para a força elástica média do meio

assim como $\frac{HL - KN}{VV - V . HL - V . KN + HL . KN}$ está para $\frac{1}{V}$, isto é, assim como $\frac{HL - KN}{VV}$ está para $\frac{1}{V}$, ou como HL - KN está para V, supondo-se (devido à extensão muito curta das vibrações) HL e KN serem indefinidamente menores do que a quantidade V. Portanto, como a quantidade V é dada, a diferença das forças é como HL - KN, isto é (já que HL - KN é proporcional a HK, e OM a OI ou OP e sendo HK e OP dados), como OM; isto é, se F*f* for dividido ao meio em Ω, como Ωϕ. E pelo mesmo motivo a diferença das forças elásticas dos pontos físicos ε e γ, na volta da linha física curta εγ, é como Ωϕ . Mas esta diferença (isto é, o excesso da força elástica do ponto ε acima da força elástica do ponto γ) é a própria força com que a linha curta física interposta εγ do meio é acelerada ao ir e retardada ao voltar. Portanto, a força acelerativa da linha curta física εγ é como sua distância de Ω, o lugar médio da vibração. Portanto, (pela Proposição 38, Livro I) o tempo é representado corretamente pelo arco PI e a parte linear do meio εγ é movida de acordo com a lei mencionada acima, isto é, de acordo com a lei de um pêndulo oscilante. O mesmo é válido para todas as partes lineares que compõem o meio. Q.E.D.

COROLÁRIO – Disto se depreende que o número de pulsos propagados é o mesmo que o número das vibrações do corpo vibrante, e não é multiplicado em seus avanços. Pois a linha curta física εγ tão logo retorne ao seu lugar inicial, permanece em repouso; ela não vai mover-se de novo, a não ser que receba um novo movimento do impulso de um corpo vibrante ou dos pulsos propagados a partir deste corpo. Portanto, tão logo os pulsos cessem de ser propagados a partir do corpo vibrante, retornará para um estado de repouso e não se moverá mais.

PROPOSIÇÃO XLVIII.[1] TEOREMA XXXVIII

As velocidades dos pulsos propagados num fluido elástico estão diretamente numa razão composta da raiz quadrada da razão da força elástica, e inversamente como a raiz quadrada da razão da densidade, supondo a força elástica do fluido ser proporcional a sua condensação.

1. Apêndice, Nota 11.

CASO 1 – Se os meios forem homogêneos e as distâncias dos pulsos nestes meios forem iguais entre si, mas o movimento num meio for mais intenso do que no outro, as contrações e dilatações das partes correspondentes serão como estes movimentos, embora esta proporção não seja perfeitamente precisa. Contudo, se as contrações e dilatações não são excessivamente intensas, o erro não vai ser perceptível, podendo esta proporção ser considerada como fisicamente exata. Por sua vez, as forças elásticas motrizes são como as contrações e dilatações e as velocidades geradas no mesmo tempo em partes iguais são como as forças. Portanto, partes iguais e correspondentes de pulsos correspondentes vão e voltam juntas, através de espaços proporcionais a suas contrações e dilatações, com velocidades que são como estes espaços. Portanto, os pulsos, que no tempo de uma ida e volta avançam para frente um espaço igual a suas larguras, e estão sempre se sucedendo nos lugares dos pulsos que foram imediatamente antes deles, irão para frente em ambos os meios com velocidade igual, devido à igualdade das distâncias.

CASO 2 – Se as distâncias dos pulsos ou seus comprimentos são maiores num meio do que no outro, vamos supor que as partes correspondentes percorram cada vez, ao ir e voltar, espaços proporcionais às larguras dos pulsos. Neste caso suas contrações e dilatações serão iguais. Portanto, se os meios são homogêneos, as forças elásticas motrizes que os agitam com um movimento recíproco, também serão iguais. Por sua vez, a matéria a ser movida por estas forças é como a largura dos pulsos, e o espaço através do qual eles se movem cada vez que vão e voltam está na mesma razão. E, além disto, o tempo de uma ida e volta está numa razão composta da raiz quadrada da matéria e na raiz quadrada do espaço, sendo portanto como o espaço. Mas os pulsos avançam um espaço igual a suas larguras nos tempos de ir uma vez e voltar uma vez, isto é, eles atravessam espaços proporcionais aos tempos e, portanto, são igualmente rápidos.

CASO 3 – E, portanto, em meios de igual densidade e força elástica, todos os pulsos são igualmente rápidos. Por sua vez, se a densidade ou a força elástica do meio fossem aumentadas, então, dado que a força motriz é aumentada na razão da força elástica, e a matéria a ser movida é aumentada na razão da densidade, o tempo que é necessário para produzir o mesmo movimento como antes será aumentado como a raiz quadrada da razão da densidade, e será diminuído como a raiz quadrada da razão da força elástica. E, portanto, a velocidade dos pulsos estará numa razão composta da raiz quadrada da razão inversa da densidade do meio e da raiz quadrada da razão direta da força elástica. Q.E.D.

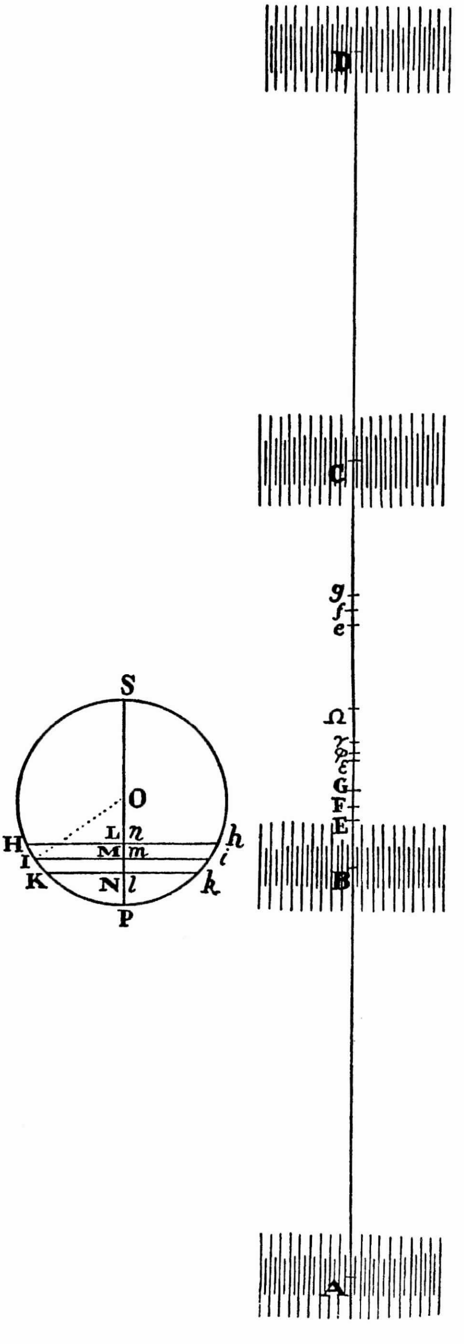
Esta Proposição ficará mais clara a partir da construção do Problema seguinte.

Proposição XLIX. Problema XI

Sendo dadas a densidade e força elástica do meio, encontrar a velocidade dos pulsos.

Suponha que o meio seja pressionado por um peso que repousa sobre ele do mesmo modo que em nosso ar. Seja A a altura de um meio homogêneo, cujo peso é igual ao peso incumbente, e cuja densidade é a mesma que a densidade do meio comprimido onde os pulsos são propagados. Suponha que seja construído um pêndulo cujo comprimento entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação seja A. No tempo em que este pêndulo realiza uma oscilação completa de sua ida e volta, o pulso será propagado diretamente para frente através de um espaço igual à circunferência de um círculo percorrido com o raio A.

Pois, respeitando as construções da Proposição XLVII, se qualquer linha física como EF, percorrendo o espaço PS em cada vibração, for forçada nas extremidades P e S de cada ida e volta que ela faz por uma força elástica que é igual a seu peso, ela realizará suas várias vibrações no tempo em que a mesma poderia oscilar numa ciclóide cujo perímetro total é igual ao comprimento PS, isto porque forças iguais impelirão corpúsculos iguais através de espaços iguais em tempos iguais. Portanto, como os tempos de oscilação são como a raiz quadrada dos comprimentos dos pêndulos, e o comprimento do pêndulo é igual a metade do arco da ciclóide inteira, o tempo de uma vibração estaria para o tempo de oscilação de um pêndulo cujo comprimento é A assim como a raiz quadrada do comprimento ½PS ou PO está para o comprimento A. Mas a força elástica com que a linha curta física EG é forçada, quando ela encontra-se em seus lugares extremos P e S, estava (na demonstração da Proposição XLVII) para sua força elástica total assim como HL - KN está para V, isto é (como o ponto K incide agora sobre P), assim como HK está para V. E toda esta força, ou, o que é a mesma coisa, o peso incumbente com que a linha curta EG é comprimida, está para o peso da linha curta assim como a altura do peso incumbente está para o comprimento da linha curta EG. Portanto, tomando o produto dos termos correspondentes, a força com que a linha curta EG é forçada nos lugares P e S está para o peso desta linha curta assim como HK · A está para V · EG, ou assim



como PO · A está para VV, já que HK estava para EG assim como PO estava para V. Portanto, como os tempos em que corpos iguais são impelidos através de espaços iguais estão inversamente como a raiz quadrada das forças, o tempo de uma vibração, produzida pela ação desta força elástica, estará para o tempo de uma vibração produzida pelo impulso do peso, assim como a

raiz quadrada da razão de VV para PO · A e, portanto, para o tempo da oscilação de um pêndulo cujo comprimento é A assim como a raiz quadrada da razão de VV para PO · A, e conjuntamente como a raiz quadrada da razão de PO para A, isto é, na razão inteira de V para A. Mas no tempo de uma vibração composta da ida e volta do pêndulo, o pulso será propagado diretamente para a frente através de um espaço igual à sua largura BC. Portanto, o tempo em que um pulso atravessa o espaço BC está para o tempo de uma oscilação composta da ida e volta do pêndulo assim como V está para A, isto é, assim como BC está para a circunferência de um círculo cujo raio é A. Mas o tempo em que o pulso vai atravessar o espaço BC está na mesma razão para o tempo em que ele vai atravessar um comprimento igual a esta circunferência. Portanto, no tempo de uma tal oscilação o pulso vai atravessar um comprimento igual a essa circunferência. Q.E.D.

COROLÁRIO I – A velocidade dos pulsos é igual àquela que os corpos pesados adquirem ao cair com um movimento igualmente acelerado percorrendo metade da altura A. Pois supondo-se que o pulso move-se com a velocidade adquirida por esta queda, no tempo desta queda ele vai atravessar um espaço igual a toda a altura A. Portanto, no tempo de uma oscilação composta de uma ida e volta, vai atravessar um espaço igual à circunferência de um círculo descrito com o raio A, pois o tempo da queda está para o tempo de uma oscilação assim como o raio de um círculo está para sua circunferência.

COROLÁRIO II – Portanto, como a altura A é diretamente como a força elástica do fluido e inversamente como a densidade do mesmo, a velocidade dos pulsos estará inversamente numa razão composta da raiz quadrada da razão da densidade e diretamente da raiz quadrada da razão da força elástica.

PROPOSIÇÃO L. PROBLEMA XII

Achar as distâncias dos pulsos.

Determine para qualquer tempo dado o número de vibrações do corpo cujo tremor produz os pulsos. Divida por este número o espaço que um pulso pode atravessar no mesmo tempo e a parte encontrada será a largura de um pulso. Q.E.I.

Escólio

As últimas Proposições dizem respeito aos movimentos da luz e dos sons, pois como a luz é propagada em linhas retas, é certo que ela não pode consistir apenas em ação (pelas Proposições 41 e 42). No que diz respeito aos sons, como eles surgem de corpos vibrantes, eles não podem ser nada mais do que pulsos do ar propagados através dele (pela Proposição 43). Isto é confirmado pelos tremores que os sons, se eles são altos e profundos, excitam nos corpos próximos a eles, como experimentamos no som dos tambores, pois tremores rápidos e curtos são excitados menos facilmente. Mas é bem conhecido que quaisquer sons, incidindo sobre cordas em uníssono com os corpos sonoros, excitam vibrações nestas cordas. Isto também é confirmado pela velocidade dos sons. Pois as gravidades específicas da água de chuva e do mercúrio estão uma para a outra como ao redor de 1 para 13⅔, e quando o mercúrio no barômetro está a uma altura de 30 polegadas de nossa medida, as gravidades específicas do ar e da água de chuva estão uma para a outra como ao redor de 1 para 870, ou seja, as gravidades específicas do ar e do mercúrio estão uma para a outra como 1 para 11 890. Portanto, quando a altura do mercúrio é 30 polegadas, uma coluna de ar uniforme, cujo peso seria suficiente para comprimir nosso ar à densidade em que o encontramos, deve ser igual a 356 700 polegadas, ou 29 725 pés de nossa medida, sendo esta a mesma altura do meio que chamei de A na construção da Proposição precedente. Um círculo cujo raio é 29 725 pés tem 186 768 pés de circunferência. E um pêndulo com um comprimento de 39⅕ polegadas completa uma oscilação composta de sua ida e volta num tempo de dois segundos, como é bem conhecido. Segue-se que um pêndulo com um comprimento de 29 725 pés, ou 356 700 polegadas, realiza uma oscilação similar em 190¾ segundos. Portanto, neste tempo um som move-se para frente 186 768 pés e, em um segundo, 979 pés.

Mas neste cálculo não levamos em consideração a espessura das partículas sólidas do ar por meio das quais o som é propagado instantaneamente. Como o peso do ar está para o peso da água assim como 1 para 870, e como os sais são quase duas vezes tão densos quanto a água, se supormos terem as partículas do ar ao redor da mesma densidade que as partículas da água ou do sal, e que a rarefação do ar surge dos intervalos entre as partículas, o diâmetro de uma partícula do ar estará para o intervalo entre os centros das partículas assim como 1 para 9 ou 10, e para o intervalo entre as próprias partículas assim como 1 para 8 ou 9. Portanto, para 979 pés, que, de acordo com o cálculo acima, o som avança no tempo de um segundo,

podemos adicionar $\frac{979}{9}$, ou ao redor de 109 pés, para compensar pela espessura das partículas do ar. Então o som vai avançar aproximadamente 1088 pés no tempo de um segundo.

Além disto, os vapores flutuando no ar, sendo de uma outra fonte e de um caráter diferente, dificilmente vão participar, se é que vão, do movimento do ar onde os sons são propagados. Por sua vez, se estes vapores permanecem imóveis, este movimento será propagado mais rapidamente através apenas do ar, e isto como a raiz quadrada da falta de matéria. Assim, se a atmosfera consiste de dez partes de ar e uma parte de vapores, o movimento dos sons será mais rápido como a raiz quadrada de 11 para 10, ou muito aproximadamente na razão inteira de 21 para 20 do que se ele fosse propagado através de 11 partes de ar. Portanto, o movimento dos sons descoberto acima deve ser aumentado nesta razão. Desta forma, o som vai atravessar 1142 pés no tempo de um segundo.

Isto é válido na primavera e no outono, quando o ar é rarefeito pelo calor suave destas estações, tornando-se desta forma um pouco mais intensa sua força elástica. Mas no inverno, quando o ar é condensado pelo frio, como sua força elástica é um pouco diminuída, o movimento dos sons será mais lento como a raiz quadrada da densidade e por outro lado, mais rápido no verão.

Mas as experiências realmente demonstram que os sons avançam no tempo de um segundo ao redor de 1142 pés de medida inglesa, ou 1070 pés de medida francesa.

Sendo conhecida a velocidade dos sons, os intervalos dos pulsos também são conhecidos. Pois o Sr. Sauveur, por algumas experiências que realizou, encontrou que um cano aberto com um comprimento ao redor de cinco pés de Paris fornece um som com o mesmo tom que uma corda de viola que vibra cem vezes num segundo. Portanto, há ao redor de 100 pulsos no espaço de 1070 pés de Paris que um som atravessa no tempo de um segundo. Portanto, um pulso preenche um espaço de aproximadamente $10\frac{7}{10}$ pés de Paris, isto é, ao redor de duas vezes o comprimento do cano. A partir disto é provável que as larguras dos pulsos, em todos os sons feitos em canos abertos, sejam iguais a duas vezes o comprimento dos canos.

Além disto, pelo Corolário da Proposição 47, se depreende a razão pela qual os sons cessam ao mesmo tempo que o movimento do corpo sonoro e pela qual não se ouvem tanto os sons quando estamos a uma grande distância dos corpos sonoros como se estivéssemos muito próximos deles. E além disto, a partir dos princípios precedentes, aparece plenamente como

acontece de os sons serem aumentados poderosamente em megafones, pois todo movimento recíproco tende a ser aumentado pela causa geradora em cada retorno. E em tubos que impedem a dilatação dos sons, o movimento decai mais lentamente, e se repete com maior força, sendo portanto mais aumentado pelo novo movimento impresso em cada retorno. E estes são os fenômenos principais dos sons.

» SEÇÃO IX

O movimento circular dos fluidos

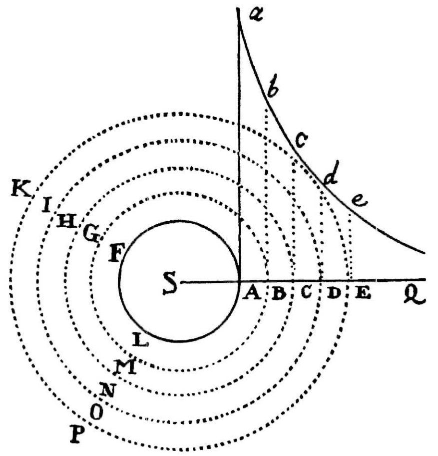
Hipótese

A resistência que surge da falta de lubricidade nas partes de um fluido é, o restante permanecendo igual, proporcional à velocidade com que as partes do fluido são separadas uma da outra.

Proposição LI. Teorema XXXIX

Se um cilindro sólido infinitamente longo, num fluido uniforme e infinito, girar com um movimento uniforme ao redor de um eixo de posição dada, e o fluido for forçado ao redor apenas por este impulso do cilindro, e toda parte do fluido continuar uniformemente seu movimento, afirmo que os tempos periódicos das partes do fluido são como suas distâncias a partir do eixo do cilindro.

Seja AFL um cilindro girando uniformemente ao redor do eixo S, e suponha que os círculos concêntricos BGM, CHN, DIO, EKP etc., dividam o fluido em inumeráveis orbes sólidos cilíndricos concêntricos da mesma es-



pessura. Então, como o fluido é homogêneo, as impressões que os orbes vizinhos fazem um sobre o outro serão (pela Hipótese) como suas translações mútuas e como as superfícies vizinhas sobre as quais são feitas as impressões. Se a impressão feita sobre qualquer orbe for maior ou menor sobre o lado côncavo do que sobre o convexo, a impressão mais forte vai prevalecer, acelerando ou retardando o movimento do orbe, conforme ela concordar ou contrariar o movimento do mesmo. Portanto, para que todo orbe possa continuar uniformemente em seu movimento, as impressões feitas sobre os dois lados devem ser iguais e suas direções contrárias. Portanto, como as impressões são como as superfícies vizinhas e como suas translações mútuas, as translações serão inversamente como as superfícies, isto é, inversamente como as distâncias das superfícies ao eixo. Mas as diferenças dos movimentos angulares ao redor do eixo são como estas translações aplicadas às distâncias, ou diretamente como as translações e inversamente como as distâncias, isto é, juntando estas razões, inversamente como os quadrados das distâncias. Portanto, se forem traçadas as linhas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* etc., perpendiculares às várias partes da linha reta infinita SABCDEQ, e inversamente proporcionais aos quadrados de SA, SB, SC, SD, SE etc., e se supormos que através das extremidades destas perpendiculares passa uma curva hiperbólica, as somas das diferenças, isto é, os movimentos angulares totais serão como as somas correspondentes das linhas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, isto é (se para constituir um meio uniformemente fluido o número dos orbes for aumentado e suas larguras diminuídas *in infinitum*), como as áreas hiperbólicas A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q etc., análogas às somas. E os tempos, inversamente proporcionais aos movimentos angulares, também serão inversamente proporcionais a estas áreas. Portanto, o tempo periódico de qualquer partí-

cula, como D, é inversamente como a área DdQ, isto é (como decorre dos métodos conhecidos de quadraturas de curvas), diretamente como a distância SD. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto os movimentos angulares das partículas do fluido são inversamente como suas distâncias ao eixo do cilindro, e as velocidades absolutas são iguais.

COROLÁRIO II – Se um fluido está contido num recipiente cilíndrico com um comprimento infinito e contém um outro cilindro dentro dele, e ambos cilindros giram ao redor de um eixo comum, e os tempos de suas revoluções forem como seus semidiâmetros, e toda parte do fluido continua em seu movimento, os tempos periódicos das várias partes serão como as distâncias ao eixo dos cilindros.

COROLÁRIO III – Se for adicionada ou removida qualquer quantidade comum de movimento angular do cilindro e do fluido movendo-se desta maneira, ainda assim como este novo movimento não vai alterar o atrito mútuo das partes do fluido, o movimento das partes entre si não será alterado, pois as translações das partes entre si dependem do atrito. Qualquer parte continuará neste movimento que, pelo atrito feito em ambos os lados com direções contrárias, não é mais acelerado do que retardado.

COROLÁRIO IV – Portanto, se for removido de todo este sistema dos cilindros e do fluido todo o movimento angular do cilindro externo, teremos o movimento do fluido num cilindro imóvel.

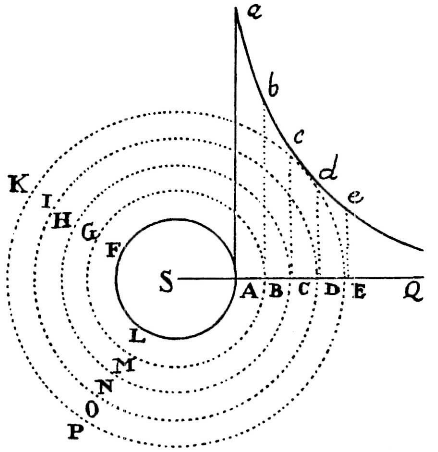
COROLÁRIO V – Portanto, se o fluido e cilindro externo estão em repouso, e o cilindro interno gira uniformemente, será comunicado um movimento circular ao fluido, que será propagado gradualmente através de todo o fluido, aumentando continuamente até o tempo em que as várias partes do fluido adquiram o movimento determinado no Corolário IV.

COROLÁRIO VI – E como o fluido insiste em continuar propagando seu movimento, seu impulso também levará o cilindro externo ao redor junto com ele, a não ser que o cilindro seja mantido em repouso de maneira forçada, e vai acelerar seu movimento até que os tempos periódicos de ambos os cilindros tornem-se iguais entre si. Mas se o cilindro externo for mantido em repouso à força, ele vai esforçar-se em retardar o movimento do fluido; e a não ser que o cilindro interno preserve seu movimento por meio de alguma força externa impressa sobre ele, irá fazer com que ele pare gradualmente.

Pode-se provar tudo isso ao realizar a experiência em água parada profunda.

Proposição LII. Teorema XL

Suponha que uma esfera sólida gire ao redor de um eixo dado com um movimento uniforme num fluido uniforme e infinito, que o fluido é forçado ao redor dela apenas por este impulso da esfera, e que cada parte do fluido continua uniformemente em seu movimento. Neste caso afirmo que os tempos periódicos das partes do fluido são como os quadrados de suas distâncias ao centro da esfera.



Caso 1 – Seja AFL um esfera girando uniformemente ao redor do eixo S, e suponha que os círculos concêntricos BGM, CHN, DIO, EKP, etc., dividam o fluido em orbes concêntricos inumeráveis com a mesma espessura. Suponha que estes orbes sejam sólidos. Como o fluido é homogêneo, as impressões que os orbes vizinhos fazem um sobre o outro serão (pela suposição) como suas translações mútuas e como as superfícies vizinhas onde se produzem as impressões. Se a impressão sobre qualquer orbe for maior ou menor sobre seu lado côncavo do que sobre seu lado convexo, a impressão mais forte vai prevalecer, acelerando ou retardando a velocidade do orbe, dependendo se estiver direcionada com um movimento a favor ou contrário àquele do orbe. Portanto, para que todo orbe possa continuar uniformemente em seu movimento, é necessário que as impressões feitas sobre ambos os lados do orbe sejam iguais, e tenham direções contrárias. Portanto como as impressões são como as superfícies vizinhas e como as translações mútuas, as translações serão inversamente como as superfícies, isto é, inversamente como os quadrados das distâncias das superfícies ao centro. Mas as diferenças dos movimentos angulares ao redor do eixo são como estas trans-

lações aplicadas às distâncias, ou diretamente como as translações e inversamente como as distâncias, isto é, ao compor estas razões, inversamente como os cubos das distâncias. Portanto, se sobre as várias partes da linha reta infinita SABCDEQ forem levantadas as perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* etc., inversamente proporcionais aos cubos de SA, SB, SC, SD, SE etc., as somas das diferenças, isto é, os movimentos angulares totais, serão como as somas correspondentes das linhas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., isto é (se para constituir um meio uniformemente fluido o número dos orbes for aumentado e suas espessuras diminuídas *in infinitum*), como as áreas hiperbólicas A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, etc., análogas às somas. E os tempos periódicos sendo inversamente proporcionais aos movimentos angulares, também serão inversamente proporcionais a estas áreas. Portanto, o tempo periódico de qualquer orbe DIO é inversamente como a área D*d*Q, isto é (pelos métodos conhecidos de quadraturas), diretamente como o quadrado da distância SD. O que era para ser demonstrado inicialmente.

Caso 2 – A partir do centro da esfera sejam traçadas um grande número de linhas retas indefinidas, fazendo ângulos dados com o eixo, excedendo umas às outras por diferenças iguais. E conceba que os orbes sejam cortados em inumeráveis anéis por estas linhas girando ao redor do eixo. Então cada anel vai ter quatro anéis vizinhos a ele, isto é, um por dentro, um por fora, e dois de cada lado. Agora, cada um destes anéis não pode ser impelido igualmente e em direções contrárias pelo atrito dos anéis interiores e exteriores, a não ser que o movimento seja comunicado de acordo com a lei que demonstramos no Caso 1. Isto decorre daquela demonstração. E, portanto, qualquer série de anéis, considerados em qualquer linha reta estendendo-se *in infinitum* a partir do globo, vai mover-se de acordo com a lei do Caso 1, a não ser que a imaginemos perturbada pelo atrito dos anéis em cada lado dela. Mas num movimento de acordo com esta lei, não há tal resistência e portanto, não pode haver qualquer obstáculo para os movimentos em curso de acordo com esta lei. Se anéis a distâncias iguais do centro giram ou mais rapidamente ou mais lentamente próximo aos pólos do que próximo da eclíptica eles serão acelerados se lentos, e retardados se rápidos, pelo atrito mútuo entre eles, e assim os tempos periódicos irão aproximar-se continuamente da igualdade, de acordo com a lei do Caso 1. Portanto este atrito não vai impedir de forma alguma que o movimento se realize de acordo com a lei do Caso 1. Em consequência, esta lei vai cumprir-se e os tempos periódicos dos vários anéis estarão como os quadrados de suas distâncias ao centro do globo. O que era para ser demonstrado em segundo lugar.

CASO 3 – Seja agora cada anel dividido por seções transversais em inumeráveis partículas constituindo uma substância absoluta e uniformemente fluida. Como estas seções não têm relações com a lei do movimento circular, mas servem apenas para produzir um substância fluida, a lei do movimento circular continuará a mesma de antes. Todos os anéis muito pequenos ou não vão mudar de todo sua aspereza e força de atrito mútuo em razão destas seções, ou então eles mudarão a mesma igualmente. Portanto, a proporção das causas permanecendo a mesma, a proporção dos efeitos também permanecerá a mesma, isto é, a proporção dos movimentos e dos tempos periódicos. Q.E.D. Mas como o movimento circular, e a força centrífuga decorrente, é maior na eclíptica do que nos pólos, tem de haver alguma causa operando para manter as várias partículas em seus círculos, pois de outra forma a matéria que está na eclíptica irá sempre afastar-se do centro, dando uma volta em direção aos pólos pelo exterior do vórtice, de lá retornando pelo eixo à eclíptica com uma circulação contínua.

COROLÁRIO I – Portanto, os movimentos angulares das partes do fluido ao redor do eixo do globo são inversamente como os quadrados das distâncias ao centro do globo, e as velocidades absolutas são inversamente como os mesmos quadrados aplicados às distâncias do eixo.

COROLÁRIO II – Se um globo gira com um movimento uniforme ao redor de um eixo com uma posição dada num fluido imóvel similar e infinito, ele comunicará um movimento giratório ao fluido como aquele de um vórtice, e este movimento será propagado gradualmente para frente *in infinitum.* E este movimento será aumentado continuamente em toda parte do fluido até que os tempos periódicos das várias partes tornem-se como os quadrados das distâncias ao centro do globo.

COROLÁRIO III – Como as partes internas do vórtice, devido a sua velocidade maior, estão continuamente pressionando e forçando para frente as partes externas, continuamente comunicando movimento a elas por esta ação, e ao mesmo tempo estas partes externas comunicam a mesma quantidade de movimento àquelas partes que estão além delas, por esta ação preservando continuamente inalteradas a quantidade de seus movimentos, é claro que o movimento é continuamente transferido do centro para a circunferência do vórtice, até que ele seja completamente absorvido e perdido na extensão ilimitada desta circunferência. A matéria entre quaisquer duas superfícies esféricas concêntricas ao vórtice nunca será acelerada, já que esta matéria estará sempre transferindo o movimento que ela recebe da matéria mais próxima do centro para a matéria que está mais próxima da circunferência.

COROLÁRIO IV – Portanto, para que um vórtice continue no mesmo estado de movimento, é necessário algum princípio ativo pelo qual o globo possa receber continuamente a mesma quantidade de movimento que ele está sempre comunicando à matéria do vórtice. Sem tal princípio, sem dúvida, vai acontecer que o globo e as partes internas do vórtice, estando, sempre propagando seu movimento para as partes externas e sem receber qualquer novo movimento, irão gradualmente mover-se cada vez mais lentamente e finalmente não girarão mais.

COROLÁRIO V – Se um outro globo estiver imerso no mesmo vórtice a uma certa distância de seu centro, e entrementes por alguma força girar constantemente ao redor de um eixo com uma inclinação dada, o movimento deste globo irá girar o fluido da maneira de um vórtice. Inicialmente este vórtice novo e pequeno irá girar com este globo ao redor do centro do outro. Entrementes seu movimento vai arrastar-se cada vez mais longe e gradualmente será propagado *in infinitum*, da maneira do primeiro vórtice. E da mesma maneira que o globo do novo vórtice era afetado antes pelo movimento do outro vórtice, o globo deste outro será afetado pelo movimento deste novo vórtice, de forma que os dois globos vão girar ao redor de algum ponto intermediário. Devido a este movimento circular irão afastar-se mutuamente um do outro, a não ser que alguma força os impeça. Após isto, se as forças constantemente impressas pelas quais os globos continuam em seus movimentos cessarem, e tudo agir de acordo com as leis da mecânica, o movimento dos globos diminuirá gradualmente (pelo motivo exposto nos Corolários III e IV), e finalmente os vórtices irão deter-se por completo.

COROLÁRIO VI – Se vários globos em lugares dados girassem constantemente com velocidades determinadas ao redor de eixos com posições dadas, surgiriam deles o mesmo número de vórtices propagando-se *in infinitum*. Pois pelo mesmo motivo que qualquer um dos globos propaga seu movimento *in infinitum*, cada globo separadamente também propagará seu movimento *in infinitum*, de forma que toda parte do fluido infinito será agitado com um movimento decorrente das ações de todos os globos. Portanto, os vórtices não serão confinados por quaisquer limites certos, mas irão gradualmente penetrar um no outro. Pelas ações mútuas dos vórtices, os globos serão movidos continuamente de seus lugares, como foi mostrado no último Corolário, pois eles não podem manter quaisquer posições certas entre si, a não ser que alguma força os restrinja. Mas se estas forças, que são impressas constantemente sobre os globos para continuar estes movimentos, cessarem, a matéria (pelo motivo expresso nos Corolários III e IV) irá parar gradualmente e deixará de mover-se em vórtices.

Corolário VII – Se um fluido similar estiver incluído num recipiente esférico e pela rotação uniforme de um globo em seu centro for impulsionado a girar em um vórtice, e o globo e o recipiente girarem no mesmo sentido ao redor do mesmo eixo, e seus tempos periódicos forem como os quadrados dos semidiâmetros, as partes do fluido não irão prosseguir em seus movimentos sem aceleração ou retardação até que seus tempos periódicos estejam como os quadrados de suas distâncias ao centro do vórtice. Nenhuma constituição de um vórtice pode ser permanente, exceto esta.

Corolário VIII – Se o recipiente, o fluido interno e o globo mantêm este movimento e também giram com um movimento angular comum ao redor de qualquer eixo dado, como o atrito mútuo das partes do fluido não é modificado por este movimento, os movimentos das partes entre si não serão modificados, pois as translações das partes entre si dependem deste atrito. Qualquer parte irá continuar neste movimento em que seu atrito sobre um lado a retarda tanto quanto seu atrito sobre outro lado a acelera.

Corolário IX – Portanto, se o recipiente for imóvel e for dado o movimento do globo, o movimento do fluido será dado. Pois conceba um plano passando através do eixo do globo girando com um movimento contrário, e suponha que a soma do tempo desta revolução e da revolução do globo está para o tempo de revolução do globo assim como o quadrado do semidiâmetro do recipiente está para o quadrado do semidiâmetro do globo, e os tempos periódicos das partes do fluido com relação a este plano estarão como os quadrados de suas distâncias ao centro do globo.

Corolário X – Portanto, se o recipiente girar ao redor do mesmo eixo que o globo, ou com uma velocidade dada ao redor de um eixo diferente, o movimento do fluido será dado. Pois se de todo o sistema removermos o movimento angular do recipiente, todos os movimentos mútuos permanecerão os mesmos como antes, pelo Corolário VIII, sendo estes movimentos dados pelo Corolário IX.

Corolário XI – Se o recipiente e o fluido estão em repouso, e o globo gira com um movimento uniforme, este movimento será propagado gradualmente através de todo o fluido até o recipiente, sendo o recipiente levado a girar com ele, a não ser que seja impedido pela força. O fluido e o recipiente serão acelerados continuamente até que seus tempos periódicos tornem-se iguais aos tempos periódicos do globo. Se o recipiente for mantido em repouso por alguma força, ou girar com qualquer movimento uniforme e constante, o meio atingirá gradualmente o estado de movimento definido nos Corolários VIII, IX e X, e jamais persistirá em qualquer outro estado. Mas se então cessarem as forças pelas quais o globo e o recipiente giram com

certos movimentos, e todo o sistema passar a agir de acordo com as leis da mecânica, o recipiente e o globo agirão um sobre o outro através do fluido intermediário e continuarão a propagar seus movimentos um para o outro através do fluido até que seus tempos periódicos tornem-se iguais entre si, e todo o sistema gire junto como um corpo sólido.

Escólio

Em todos estes raciocínios suponho que o fluido consiste de matéria com densidade e fluidez uniforme. Ou seja, quero dizer que o fluido tem de ser de tal natureza que um globo colocado em qualquer lugar dele possa propagar com seu próprio movimento, a distâncias dele continuamente iguais, movimentos similares e iguais no fluido no mesmo intervalo de tempo. A matéria irá tentar afastar-se do eixo do vórtice por seu movimento circular e, portanto, pressionará toda a matéria que está além. Esta pressão torna o atrito maior e a separação das partes mais difícil, diminuindo consequentemente a fluidez da matéria. Igualmente, se as partes do fluido são mais densas ou maiores em um lugar qualquer do que em outros, a fluidez será menor neste lugar, pois há menos superfícies onde as partes podem ser separadas umas das outras. Nestes casos suponho que a falta de fluidez é compensada pela lisura ou maciez das partes, ou por alguma outra condição. Pelo contrário, onde a matéria é menos fluida será mais coesa, tornando-se mais lenta e recebendo portanto o movimento mais lentamente, propagando-o além do que corresponde a razão exposta acima. Se o recipiente não for esférico, as partículas irão mover-se em linhas não circulares, mas correspondendo à forma do recipiente, e os tempos periódicos serão aproximadamente como os quadrados das distâncias médias ao centro. Nas partes entre o centro e a circunferência os movimentos serão mais lentos onde os espaços são amplos, e mais rápidos onde estreitos. Contudo, as partículas não tenderão mais para a circunferência devido à sua maior velocidade, pois elas irão percorrer então arcos de curvatura menor. E a tendência a afastar-se do centro é tão diminuída pela diminuição da curvatura quanto é aumentada pelo aumento da velocidade. À medida em que elas passam de espaços estreitos para amplos, elas afastam-se um pouco do centro, mas ao fazer isto são retardadas. Quando elas passam de espaços amplos para estreitos, elas são novamente aceleradas. Assim cada partícula é alternadamente retardada e acelerada para sempre. Tudo isso ocorre num recipiente sólido, pois o estado dos vórtices num fluido infinito é conhecido pelo Corolário VI desta Proposição.

Tentei investigar nesta Proposição as propriedades dos vórtices para descobrir se os fenômenos celestes podem ser explicados por eles. O fenômeno é que os tempos periódicos dos planetas que giram ao redor de Júpiter são como a 3/2ª potência de suas distâncias ao centro de Júpiter. Também é válida a mesma regra entre os planetas que giram ao redor do sol. E estas regras são válidas com a maior precisão, pelo que já foi descoberto por observação astronômica. Portanto, se estes planetas são levados em vórtices que giram ao redor de Júpiter e do sol, os vórtices devem girar de acordo com esta lei. Mas concluímos aqui que os tempos periódicos das partes do vórtice são como os quadrados das distâncias ao centro do movimento. E esta razão não pode ser diminuída e reduzida à 3/2ª potência, a não ser que a matéria do vórtice seja mais fluida o quanto mais distante estiver do centro, ou que a resistência que surge da falta de lubrificação das partes do fluido deva, à medida em que a velocidade com que as partes do fluido são separadas aumente, ser aumentada com ela numa razão maior do que aquela em que a velocidade é aumentada. Mas nenhuma destas suposições parece razoável. As partes maiores e mais fluidas irão tender para a circunferência, a não ser que elas sejam pesadas em direção ao centro. E embora eu tenha proposto no início desta Seção, com o objetivo de demonstração, uma Hipótese de que a resistência é proporcional à velocidade, é na verdade provável que a resistência esteja numa razão menor do que aquela da velocidade. Logo, os tempos periódicos das partes do vórtice estarão numa razão maior do que o quadrado das distâncias ao centro. Se, como pensam alguns, os vórtices movem-se mais rapidamente próximo do centro, então mais lentamente até um certo limite, então novamente mais rápido próximo da circunferência, certamente nem a 3/2ª potência, nem qualquer outra potência certa e determinada pode ser obtida neles. Que os filósofos determinem então como o fenômeno da 3/2ª potência pode ser explicado pelos vórtices.

Proposição LIII. Teorema XLI

Corpos carregados num vórtice e retornando na mesma órbita têm a mesma densidade que o vórtice e são movidos de acordo com a mesma lei que as partes do vórtice no que diz respeito à velocidade e direção do movimento.

Pois se congelarmos qualquer parte pequena do vórtice, cujas partículas ou pontos físicos persistem numa situação dada entre si, esta partícula irá mover-se de acordo com a mesma lei de antes pois nenhuma mudança é

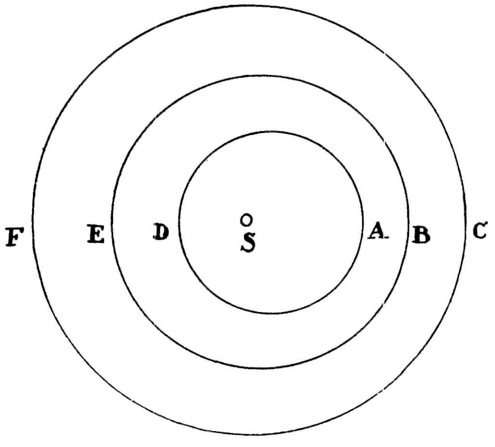
feita em sua densidade, inércia ou forma. E também se uma parte congelada ou sólida do vórtice for da mesma densidade que o restante do vórtice e for transformada num fluido, este irá mover-se de acordo com a mesma lei de antes, a não ser que suas partículas movam-se entre si por terem tornado-se fluidas. Despreze, portanto, o movimento das partículas entre si por não ter relação com o movimento do todo, e o movimento do todo será o mesmo de antes. Mas este movimento será o mesmo que o movimento das outras partes do vórtice a distâncias iguais do centro, já que o sólido, agora transformado num fluido, irá tornar-se exatamente igual às outras partes do vórtice. Portanto, um sólido, se ele for da mesma densidade que a matéria do vórtice, irá mover-se com o mesmo movimento que as partes dele, estando relativamente em repouso na matéria que o circunda. Se ele for mais denso, ele irá tentar mais do que antes afastar-se do centro. E sobrepujando portanto a força do vórtice com a qual, como se ele estivesse em equilíbrio, era mantido em sua órbita, irá afastar-se do centro. E em sua revolução percorrerá uma espiral, não retornando mais a uma mesma órbita. E, pelo mesmo argumento, se ele for mais rarefeito, vai aproximar-se do centro. Portanto, ele nunca permanecerá girando continuamente na mesma órbita, a não ser que tenha a mesma densidade que o fluido. Mas mostramos que neste caso ele iria girar de acordo com a mesma lei que as partes do fluido que estão a distâncias iguais do centro do vórtice.

COROLÁRIO I – Portanto, um sólido girando num vórtice e sendo transportado continuamente na mesma órbita fica relativamente em repouso no fluido que o carrega.

COROLÁRIO II – E se o vórtice tiver uma densidade uniforme, o mesmo corpo pode girar a qualquer distância do centro do vórtice.

Escólio

Portanto, é evidente que os planetas não são transportados em vórtices corpóreos. Pois, de acordo com a hipótese de Copérnico, os planetas orbitando o sol descrevem elipses tendo o sol como o foco comum, descrevendo áreas proporcionais aos tempos por raios traçados até o sol. Mas as partes de um vórtice nunca podem girar com tal movimento. Pois represente por AD, BE e CF três órbitas descritas ao redor do sol S, das quais seja o círculo externo CF concêntrico ao sol, sejam os afélios das duas mais internas A e B, e seus periélios D e E. Portanto, um corpo girando no orbe CF, descrevendo áreas proporcionais aos tempos por um raio traçado até o sol,



irá mover-se com um movimento uniforme. E, de acordo com as leis da astronomia, o corpo girando na órbita BE irá mover-se mais lentamente em seu afélio B e mais rápido em seu periélio E, enquanto que de acordo com as leis da mecânica, a matéria do vórtice deve mover-se mais rapidamente no espaço mais estreito entre A e C do que no espaço amplo entre D e F, isto é, mais rapidamente no afélio do que no periélio. Ora, estas duas conclusões contradizem uma à outra. Assim, no início do signo de Virgem, onde está atualmente o afélio de Marte, a distância entre as órbitas de Marte e de Vênus está para a distância entre as mesmas órbitas no início do signo de Peixes como ao redor de 3 para 2. Portanto, a matéria do vórtice entre estas órbitas deveria ser mais rápida no início de Peixes do que no início de Virgem na razão de 3 para 2, pois quanto mais estreito for o espaço através do qual a mesma quantidade de matéria passa no mesmo tempo em uma revolução, maior será a velocidade com que ela o atravessa. Portanto, se a terra, estando relativamente em repouso nesta matéria celeste, fosse transportada por ela e girasse junto com ela ao redor do sol, a velocidade da terra no início de Peixes estaria para sua velocidade no início de Virgem na razão de 3 para 2. Portanto, o movimento diurno aparente do sol no início de Virgem teria de ser acima de 70 minutos, e no início de Peixes menor do que 48 minutos, enquanto que, pelo contrário, este movimento aparente do sol é realmente maior no início de Peixes do que no início de Virgem, como testifica a experiência. Portanto, a terra é mais rápida no início de Virgem do que no início de Peixes, de forma que a hipótese dos vórtices é totalmente irreconciliável com os fenômenos astronômicos, servindo mais para confundir do que para explicar os movimentos celestes. Pelo primeiro livro compreende-se como estes movimentos podem ser realizados nos espaços vazios sem vórtices. No livro seguinte tratarei mais detalhadamente disto.

» LIVRO III

O SISTEMA DO MUNDO (TRATADO MATEMATICAMENTE)

TRADUÇÃO
André Koch Torres Assis

Nos livros precedentes estabeleci os princípios de filosofia, não princípios filosóficos, mas matemáticos, isto é, tais que possamos basear nossos raciocínios em investigações filosóficas. Estes princípios são as leis e condições de certos movimentos, e poderes ou forças, que dizem respeito principalmente à filosofia. Para evitar que parecessem secos e estéreis, ilustrei-os aqui e ali com alguns escólios filosóficos, explicando coisas que são de uma natureza mais geral e sobre as quais parece apoiar-se principalmente a filosofia, como a densidade e resistência dos corpos, espaços vazios de todos os corpos, e o movimento da luz e dos sons. Falta demonstrar a partir dos mesmos princípios a estrutura do Sistema do Mundo. Sobre este assunto compus, de fato, o terceiro livro num método popular tal que ele pudesse ser lido por muitos. Mas depois, considerando que aqueles que não tivessem sido introduzidos suficientemente nos princípios não poderiam discernir facilmente a força das conseqüências, nem deixar de lado os preconceitos a que estavam acostumados por anos, a fim de prevenir as disputas que poderiam surgir sobre estas coisas, optei por reduzir a substância deste livro à forma de Proposições (de maneira matemática), que devem ser lidas apenas por aqueles que dominaram os princípios estabelecidos nos livros precedentes. Não que aconselhe qualquer um ao estudo prévio de toda Proposição

destes livros, pois elas são tantas que isto poderia levar muito tempo, mesmo para leitores de boa formação matemática. É suficiente que se leia cuidadosamente as Definições, as Leis do Movimento e as primeiras três seções do primeiro livro. Pode-se então passar para este livro e consultar as Proposições remanescentes dos dois primeiros livros à medida em que as referências neste livro e suas razões assim o exigirem.

» REGRAS DE RACIOCÍNIO EM FILOSOFIA

REGRA I

Não devemos admitir mais causas para as coisas naturais do que as que são verdadeiras e suficientes para explicar suas aparências.

Sobre isto dizem os filósofos que a Natureza não faz nada em vão, e mais algo é vão quando menos serve. Pois a Natureza é simples e não se compraz com causas supérfluas.

REGRA II

Portanto, aos mesmos efeitos naturais temos de atribuir as mesmas causas, tanto quanto possível.

Como acontece com a respiração no homem e num animal, a queda de pedras na Europa e na América, a luz de nosso fogo culinário e do sol, a reflexão da luz na terra e nos planetas.

Regra III

As qualidades dos corpos que não admitem intensificação nem diminuição de graus, e que pertencem a todos os corpos dentro do alcance de nossas experiências, devem ser consideradas como qualidades universais de todos os corpos de qualquer tipo.

Pois como as qualidades dos corpos só são conhecidas por nós por meio das experiências, devemos considerar como universais todas aquelas que concordam universalmente com as experiências, e as que não são capazes de diminuição não podem nunca ser completamente removidas. Certamente não devemos abandonar a evidência das experiências devido a sonhos e a ficções vãs de nossa própria criação, nem devemos nos afastar da analogia da Natureza, que tem o costume de ser simples e sempre consoante a si própria. Só conhecemos a extensão dos corpos por meio de nossos sentidos, mas estes não percebem a extensão em todos os corpos, mas como percebemos a extensão em todos os corpos que são perceptíveis, então também a atribuímos universalmente a todos os outros. Aprendemos pela experiência que muitos corpos são duros, e como a dureza do todo surge da dureza das partes, inferimos justamente a dureza das partículas indivisas não apenas dos corpos que sentimos, mas de todos os outros. Que todos os corpos são impenetráveis aprendemos não pela razão, mas pela sensação. Percebemos que são impenetráveis os corpos que manuseamos e daí concluímos ser a impenetrabilidade uma propriedade universal de todos os corpos de qualquer tipo. Que todos os corpos são móveis e dotados de certos poderes (que chamamos de inércia) de perseverar em seus movimentos ou em seus repousos, só inferimos a partir de propriedades semelhantes observadas nos corpos que já vimos. A extensão, dureza, impenetrabilidade, mobilidade e inércia do todo resulta da extensão, dureza, impenetrabilidade, mobilidade e inércia das partes. Portanto, concluímos que também as partículas menores de todos os corpos são todas estendidas, duras, impenetráveis, móveis e dotadas com sua própria inércia. E isto é a base de toda filosofia. Além disto, constatar que as partículas divididas, mas vizinhas dos corpos, podem ser separadas uma da outra, é questão de observação. E em partículas que permanecem não divididas, nossas mentes são capazes de distinguir partes menores ainda, como é demonstrado matematicamente. Mas ainda não podemos determinar com certeza se as partes assim distinguidas e ainda não divididas podem ser de fato divididas e separadas umas das outras pelas forças da Natureza. Contudo, se tivéssemos a prova de uma única experiência de

que qualquer partícula não dividida, obtida ao quebrar um corpo sólido e duro, sofreu uma divisão, poderíamos em virtude desta regra concluir que as partículas não divididas, assim como as divididas podem ser divididas, e separadas de fato ao infinito.

Por último, se aparece universalmente por experiências e observações astronômicas que todos os corpos ao redor da terra gravitam em direção à terra, sendo isto em proporção à quantidade de matéria que cada um deles contém; que a lua gravita da mesma forma em direção à terra de acordo com a quantidade de sua matéria; que, por outro lado, nosso mar gravita em direção à lua, todos os planetas em direção um ao outro e os cometas de maneira semelhante em direção ao sol, temos de assumir universalmente como uma conseqüência desta regra que todos os corpos de qualquer tipo são dotados com um princípio de gravitação mútua. Pois o argumento a partir dos fenômenos demonstra com mais força a gravitação universal do que a impenetrabilidade de todos os corpos, da qual não temos experiências entre os corpos nas regiões celestes, nem qualquer tipo de observação. Não que eu afirme que a gravidade seja essencial aos corpos. Por sua *vis insita* não quero dizer nada além de sua inércia. Esta é imutável. Sua gravidade diminui na medida em que eles afastam-se da terra.

Regra IV

Na filosofia experimental devemos considerar as proposições inferidas pela indução geral a partir dos fenômenos como precisamente ou muito aproximadamente verdadeiras, apesar de quaisquer hipóteses contrárias que possam ser imaginadas, até o momento em que outros fenômenos ocorram pelos quais elas possam ou ser tornadas mais precisas, ou fiquem sujeitas a exceções.

Temos de seguir esta regra para que o argumento da indução não seja iludido por hipóteses.

» FENÔMENOS*

FENÔMENO I

Que os planetas que circundam Júpiter, por raios traçados ao centro de Júpiter, descrevem áreas proporcionais aos tempos de percurso, e que seus tempos periódicos, estando as estrelas fixas em repouso, estão como a $3/2^a$ potência de suas distâncias deste centro.

Sabemos isto por observações astronômicas. Pois as órbitas destes planetas não diferem perceptivelmente de círculos concêntricos a Júpiter, e seus movimentos nestes círculos são encontrados como sendo uniformes. E todos os astrônomos concordam que seus tempos periódicos são como a $3/2^a$ potência dos semidiâmetros de suas órbitas, e assim aparece manifestamente a partir da tabela seguinte:

* Nota: Nas partes seguintes do Livro III, palavras e frases espalhadas em itálico (exceto expressões em latim e nos nomes de lugares, meses, pessoas, livros e artigos) são, na tradução de Motte, interpolações [feitas por F. Cajori] de palavras e frases que não estão no texto em latim do *Principia*; e umas poucas são mudanças em relação a uma tradução literal do latim.

Os tempos periódicos dos satélites de Júpiter

$1^{d}18^{h}27^{m}34^{s}$, $3^{d}13^{h}13^{m}42^{s}$, $7^{d}3^{h}42^{m}36^{s}$, $16^{d}16^{h}32^{m}9^{s}$

As distâncias dos satélites ao centro de Júpiter

	1	2	3	4	
A partir das observações de:					
Borelli	5⅔	8⅔	14	24⅔	*Semi-*
Townly, *com micrômetro*	5,52	8,78	13,47	24,72	*diâmetros*
Cassini, *com telescópio*	5	8	13	23	*de Júpiter*
Cassini, *pela eclipse dos satélites*	5⅔	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
A partir dos tempos periódicos	5,667	9,017	14,384	25,299	

O Sr. Pound determinou, com a ajuda de micrômetros excelentes, os diâmetros de Júpiter e a elongação de seus satélites da seguinte maneira. A maior elongação heliocêntrica do quarto satélite a partir do centro de Júpiter foi obtida com um micrômetro num telescópio de 15 pés, e à distância média de Júpiter da terra foi encontrada ao redor de 8'16''. A elongação do terceiro satélite foi obtida com um micrômetro num telescópio de 123 pés, e à mesma distância de Júpiter da terra foi encontrada como 4'42''. As maiores elongações dos outros satélites à mesma distância de Júpiter da terra são, de acordo com os tempos periódicos, 2'56''47''' e 1'51''6'''.

O diâmetro de Júpiter obtido várias vezes com o micrômetro num telescópio de 123 pés[1] e reduzido à distância média entre Júpiter e a terra, foi sempre menor do que 40'', nunca menor do que 38'', sendo geralmente 39''. Este diâmetro em telescópios mais curtos é 40'' ou 41'', pois a luz de Júpiter é um pouco dilatada pela refrangibilidade desigual dos raios, e esta dilatação está numa razão menor para o diâmetro de Júpiter nos telescópios mais longos e mais perfeitos do que naqueles que são mais curtos e menos perfeitos. Os tempos em que dois satélites, o primeiro e o terceiro, passaram por cima do corpo de Júpiter foram observados com o telescópio longo do início do ingresso ao início da saída, e do ingresso completo até a saída completa. E a partir do trânsito do primeiro satélite, o diâmetro de Júpiter em sua distância média da terra foi obtido como 37⅛'', e a partir do trânsito do terceiro 37⅜''. Também foi observado o tempo em que a sombra do primeiro satélite passou sobre o corpo de Júpiter, obtendo-se o diâmetro de Júpiter em sua distância média da terra como sendo ao redor de 37''. Suponhamos que seu diâmetro é, muito aproximadamente, 37¼'', e então as maio-

1. Apêndice, Nota 12.

res elongações do primeiro, segundo, terceiro e quarto satélites serão iguais a, respectivamente, 5,965, 9,494, 15,141 e 26,63 semidiâmetros de Júpiter.

Fenômeno II

Que os planetas que circundam Saturno, por raios traçados ao centro de Saturno, percorrem áreas proporcionais aos tempos de percurso; e que seus tempos periódicos, estando as estrelas fixas em repouso, estão como a ³⁄₂ª potência de suas distâncias deste centro.

Pois, como Cassini determinou a partir de suas próprias observações, suas distâncias ao centro de Saturno e seus tempos periódicos são como segue:

Os tempos periódicos dos satélites de Saturno:

$1^d21^h18^m27^s$, $2^d17^h41^m22^s$, $4^d12^h25^m12^s$, $15^d22^h41^m14^s$, $79^d7^h48^m00^s$.

As distâncias dos satélites ao centro de Saturno, em semidiâmetros de seu anel:

A partir das observações	1 ¹⁹⁄₂₀	2½	3½	8	24
A partir dos tempos periódicos	1,93	2,47	3,45	8	23,35

Em geral, as observações determinaram que a elongação máxima do quarto satélite ao centro de Saturno é, muito aproximadamente, oito dos semidiâmetros. Mas a maior elongação deste satélite do centro de Saturno, quando obtido com um micrômetro excelente no telescópio de 123 pés do Sr. Huygens, resultou ser 8 semidiâmetros e ⁷⁄₁₀ de um semidiâmetro. E desta observação e dos tempos periódicos, as distâncias dos satélites ao centro de Saturno em semidiâmetros do anel são 2,1, 2,69, 3,75, 8,7 e 25,35. O diâmetro de Saturno observado no mesmo telescópio está para o diâmetro do anel como 3 está para 7. O diâmetro do anel em 28-29 de maio de 1719, era de 43''. Portanto, o diâmetro do anel quando Saturno está a uma distância média da terra é 42'', e o diâmetro de Saturno 18''. Isto observa-se em telescópios muito longos e excelentes, pois nestes telescópios os tamanhos aparentes dos corpos celestes estão numa proporção maior para a dilatação da luz nas extremidades destes corpos do que nos telescópios menores. Se rejeitarmos então toda a luz espúria, o diâmetro de Saturno não superará os 16''.

FENÔMENO III

Que os cinco planetas primários, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, giram em suas diversas órbitas ao redor do sol.

Que Mercúrio e Vênus giram ao redor do sol é evidente a partir de seus aspectos lunares. Quando brilham com a face cheia estão, com relação a nós, além ou acima do sol. Quando aparecem meio cheios, estão aproximadamente à mesma altura de um lado ou de outro do sol. Quando mostram auréolas estão abaixo ou entre nós e o sol. Eles são vistos algumas vezes, *quando estão precisamente debaixo*, como pontos atravessando o disco do sol. Que Marte gira ao redor do sol é evidente a partir de sua face cheia quando próximo de sua conjunção com o sol e a partir da forma gibosa que mostra quando em suas quadraturas. E a mesma coisa pode-se demonstrar de Júpiter e Saturno, por eles aparecerem cheios em todas as situações, pois as sombras de seus satélites que aparecem algumas vezes sobre seus discos torna evidente que a luz com que brilham não é deles próprios, mas tomada do sol.

FENÔMENO IV

Que estando as estrelas fixas em repouso, os tempos periódicos dos cinco planetas primários e (seja do sol ao redor da terra, ou) da terra ao redor do sol, são como a $3/2^a$ potência de suas distâncias médias ao sol.

Esta proporção, observada pela primeira vez por Kepler, é admitida agora por todos os astrônomos. Pois os tempos periódicos são os mesmos, e as dimensões das órbitas são as mesmas, tanto se o sol gira ao redor da terra como se a terra gira ao redor do sol. E no que diz respeito às medidas dos tempos periódicos, todos os astrônomos concordam entre si. Mas no que diz respeito às dimensões das órbitas, Kepler e Boulliau, acima de todos os outros, as determinaram a partir das observações com a maior precisão. E as distâncias médias correspondendo aos tempos periódicos não diferem perceptivelmente daquelas que eles determinaram, e na maior parte estão entre elas, como podemos ver na tabela seguinte.

Os tempos periódicos em relação às estrelas fixas, dos planetas e da terra girando ao redor do sol, em dias e em partes decimais de um dia:

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275	4332,514	686,9785	365,2565	224,6176	87,9692

As distâncias médias dos planetas e da terra ao sol:

	♄	♃	♂
De acordo com Kepler	951.000	519.650	152.350
De acordo com Boulliau	954.198	522.520	152.350
De acordo com os tempos periódicos	954.006	520.096	152.369
	♁	♀	☿
De acordo com Kepler	100.000	72.400	38.806
De acordo com Boulliau	100.000	72.398	38.585
De acordo com os tempos periódicos	100.000	72.333	38.710

No que diz respeito a Mercúrio e Vênus, não há dúvidas sobre suas distâncias ao sol, pois elas são determinadas pelas elongações destes planetas ao sol. Para as distâncias dos planetas superiores, toda disputa é encerrada pelos eclipses dos satélites de Júpiter. Pois por estes eclipses é determinada a posição da sombra que Júpiter projeta, sendo que a partir disto temos a longitude heliocêntrica de Júpiter. E comparando suas longitudes heliocêntrica e geocêntrica, determinamos sua distância.

Fenômeno V

Então os planetas primários, por raios traçados à terra, descrevem áreas que não são em absoluto proporcionais aos tempos, mas as áreas que eles percorrem por raios traçados ao sol são proporcionais aos tempos de percurso.

Pois em relação à terra eles aparecem algumas vezes diretos, algumas vezes estacionários e algumas vezes retrógrados. Mas a partir do sol eles são sempre vistos diretos, procedendo com um movimento aproximadamente uniforme, quer dizer, um pouco mais rápido nas distâncias de periélio e um pouco mais lento nas distâncias de afélio, de forma a manter uma igualdade ao descrever as áreas. Esta é uma proposição conhecida entre os astrônomos e demonstrável particularmente em Júpiter a partir dos eclipses de seus satélites. Com a ajuda destes eclipses, como dissemos, são determinadas as longitudes heliocêntricas deste planeta e suas distâncias ao sol.

FENÔMENO VI

Que a lua, por um raio traçado ao centro da terra, descreve uma área proporcional ao tempo de percurso.

Obtemos isto a partir do movimento aparente da lua, comparado com seu diâmetro aparente. É verdade que o movimento da lua é um pouco perturbado pela ação do sol, mas ao estabelecer estes Fenômenos, desprezo estes erros pequenos e insignificantes.

» PROPOSIÇÕES

Proposição I. Teorema I

Que as forças com que os planetas que circundam Júpiter são continuamente desviados dos movimentos retilíneos e mantidos em suas próprias órbitas tendem ao centro de Júpiter e são inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias dos lugares destes planetas em relação a este centro.

A primeira parte desta Proposição decorre do Fen. I e das Proposições 2 ou 3, Livro I. A última parte do Fen. I e Corolário VI, Proposição 4, do mesmo livro.

O mesmo se aplica com relação aos planetas que circundam Saturno, pelo Fenômeno II.

Proposição II. Teorema II

Que as forças com que os planetas primários são continuamente desviados dos movimentos retilíneos e mantidos em suas próprias órbitas tendem ao sol e são inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias dos lugares destes planetas ao centro do sol.

A primeira parte da Proposição é manifesta no Fenômeno V e Proposição 2, Livro I. A última parte do Fenômeno IV e Corolário VI, Proposição 4, do mesmo livro. Mas esta parte da Proposição é demonstrável com grande precisão a partir da imobilidade dos pontos de afélio, pois uma aberração muito pequena da proporção de acordo com o inverso do quadrado da distância produziria (pelo Corolário I, Proposição 45, Livro I) um movimento dos apsides suficientemente perceptível em cada revolução e enormemente grande em muitas delas.

Proposição III. Teorema III

Que a força com que a lua é mantida em sua órbita tende para a terra e é inversamente proporcional ao quadrado da distância de seu lugar ao centro da terra.

A primeira parte da Proposição é evidente do Fenômeno VI e Proposições 2 ou 3, Livro I. A última parte decorre do movimento muito lento do apogeu da lua, que em cada revolução chegando a menos de 3º3' para frente, pode ser desprezado. Pois (pelo Corolário I, Proposição 45, Livro I) decorre que se a distância da lua ao centro da terra está para o semidiâmetro da terra assim como D está para 1, a força que resultaria de tal movimento é inversamente proporcional a $D^{2\frac{4}{243}}$, isto é, inversamente como a potência de D com expoente $2\frac{4}{243}$, isto é, alguma coisa maior do que o inverso do quadrado na proporção da distância, mas que é 59¾ vezes mais próximo à proporção de acordo com o quadrado do que com o cubo. Mas como este aumento é devido à ação do sol (como mostraremos mais adiante), pode ser desprezado aqui. A ação do sol, atraindo a lua da terra, é aproximadamente como a distância da lua à terra. Portanto (pelo que mostramos no Corolário II, Proposição 45, Livro I), está para a força centrípeta da lua assim como 2 está para 357,45, ou aproximadamente assim, isto é, como 1 está para $178\frac{29}{40}$. E se desprezarmos uma força tão insignificante do sol, a força remanescente com que a lua é mantida em seu orbe será inversamente proporcional a D^2. Isto torna-se ainda mais aparente ao se comparar esta força com a força da gravidade, como é feito na Proposição seguinte.

Corolário – Se aumentarmos a força centrípeta média com que a lua é mantida em seu orbe, primeiro na proporção de $177\frac{29}{40}$ para $178\frac{29}{40}$, e então na proporção do quadrado do semidiâmetro da terra para a distância média dos centros da lua e da terra, teremos a força centrípeta da lua na su-

perfície da terra, supondo-se que esta força aumenta de forma contínua inversamente como o quadrado da altura ao descer à superfície da terra.

PROPOSIÇÃO IV.[1] TEOREMA IV

Que a lua gravita em direção à terra e que é desviada continuamente de um movimento retilíneo e mantida em sua órbita pela força da gravidade.

A distância média da lua à terra nas sizígias em semidiâmetros da terra é, de acordo com Ptolomeu e a maioria dos astrônomos, 59; de acordo com Vendelin e Huygens, 60; com Copérnico, 60⅓; com Street, 60⅖; e com Tycho, 56½. Mas Tycho e todos que seguiram suas tabelas de refração, ao fazer com que as refrações do sol e da lua (totalmente contrário à natureza da luz) excedessem as refrações das estrelas fixas, e isto por quatro ou cinco minutos *próximo do horizonte*, aumentaram por este meio a paralaxe *horizontal* da lua por um número similar de minutos, isto é, pela duodécima ou décima quinta parte da paralaxe inteira. Corrija este erro e a distância torna-se ao redor de 60½ semidiâmetros da terra, próximo do que os outros determinaram. Vamos assumir a distância média de 60 diâmetros nas sizígias e supor que uma revolução da lua em relação às estrelas fixas é completada em $27^d7^h43^m$, como os astrônomos determinaram, e que a circunferência da terra chegue a 123.249.600 pés de Paris, como os franceses obtiveram por mensuração. E agora se imaginamos a lua, privada de todo movimento, ser solta de forma a descer em direção à terra com o impulso de toda esta força com que (pelo Corolário, Proposição 3) ela é mantida em seu orbe, ela descreverá em sua queda 15¹⁄₁₂ pés de Paris no espaço de tempo de um minuto. Obtemos isto por um cálculo baseado ou na Proposição 36, Livro I, ou (o que dá no mesmo) no Corolário IX, Proposição 4, do mesmo livro. Pois o seno verso deste arco que a lua percorreria com seu movimento médio à distância de 60 semidiâmetros da terra no espaço de tempo de um minuto é de aproximadamente 15¹⁄₁₂ pés de Paris, ou mais precisamente 15 pés, 1 polegada e 1 linha ⁴⁄₉. De onde, como esta força ao aproximar-se da terra aumenta na proporção do inverso do quadrado da distância e, baseado nisto, na superfície da terra é 60.60 vezes maior do que na lua, um corpo em nossas regiões, caindo com esta força, teria de descrever no espaço de tempo de um minuto 60.60.15¹⁄₁₂ pés de Paris e, no espaço de tempo de um segundo, des-

1. Apêndice, Nota 13.

crever 15$\frac{1}{12}$ destes pés, ou mais precisamente 15 pés, 1 polegada e 1 linha $\frac{4}{9}$. E, de fato, encontramos que os corpos sobre a terra caem realmente com esta mesma força, pois um pêndulo oscilando em segundos na latitude de Paris terá um comprimento de 3 pés de Paris e 8 linhas $\frac{1}{2}$, como observou o Sr. Huygens. E o espaço que um corpo pesado percorre ao cair no tempo de um segundo está para metade do comprimento deste pêndulo como o quadrado da razão da circunferência de um círculo para seu diâmetro (como o Sr. Huygens também mostrou), sendo portanto 15 pés de Paris, 1 polegada e 1 linha $\frac{7}{9}$. E, portanto, a força com que a lua é mantida em sua órbita torna-se, na superfície da terra, igual à força da gravidade que observamos nos corpos pesados aqui. Logo, (pelas Regras 1 e 2) a força com que a lua é mantida em sua órbita é a mesma força que chamamos comumente de gravidade, pois, fosse a gravidade uma outra força diferente daquela, então os corpos ao cair para a terra com o impulso conjunto de ambas as forças cairiam com uma velocidade dobrada, e no espaço de tempo de um segundo descreveriam 30$\frac{1}{6}$ pés de Paris, o que é totalmente contrário à experiência.

Este cálculo é baseado na hipótese de uma terra imóvel. Pois se a terra e a lua movem-se ao redor do sol e ao mesmo tempo ao redor de seu centro comum de gravidade, a distância entre os centros da lua e da terra será de 60$\frac{1}{2}$ semidiâmetros da terra, como pode ser obtido por cálculo a partir da Proposição 60, Livro I.

Escólio

A demonstração desta Proposição pode ser explicada mais extensamente da seguinte maneira. Suponha que várias luas girem ao redor da terra, como no sistema de Júpiter e Saturno. Os tempos periódicos destas luas (pelo argumento de indução) observariam a mesma lei que Kepler obteve entre os planetas. Portanto, suas forças centrípetas seriam inversamente como os quadrados das distâncias ao centro da terra, pela Proposição 1 deste livro. Agora, se a lua mais baixa fosse muito pequena e estivesse tão próxima da terra de forma a quase tocar os topos das montanhas mais altas, sua força centrípeta mantendo-a em sua órbita seria aproximadamente igual aos pesos de quaisquer corpos terrestres que fossem encontrados nos topos destas montanhas, como pode ser conhecido do cálculo precedente. Portanto, se a mesma lua pequena fosse abandonada por sua força centrífuga que a carrega em sua órbita, e fosse impedida de seguir seu caminho, ela desceria para a terra. E isto com a mesma velocidade com que os corpos pesados

caem de fato dos topos destas mesmas montanhas, devido à igualdade das forças que obriga ambos a descerem. E se a força com que a lua mais baixa descesse fosse diferente da gravidade, e se esta lua fosse gravitar em direção à terra, como sabemos que os corpos terrestres fazem nos topos das montanhas, ela desceria então com a velocidade dobrada, como sendo impelida por estas duas forças atuando juntas. Portanto, como estas duas forças, isto é, a gravidade dos corpos pesados e as forças centrípetas das luas, são direcionadas ao centro da terra, e são similares e iguais entre si, elas terão uma mesma causa (pelas Regras 1 e 2). E, portanto, a força que mantém a lua em sua órbita é a mesma força que chamamos comumente de gravidade, pois de outra forma esta pequena lua no topo de uma montanha ou teria de estar sem gravidade, ou teria de cair duas vezes mais rápido do que caem os corpos pesados.

Proposição V. Teorema V

Que os planetas que circundam Júpiter gravitam em direção a Júpiter, os que circundam Saturno em direção a Saturno, os que circundam o sol em direção ao sol, sendo desviados dos movimentos retilíneos e mantidos em suas órbitas pelas forças de suas gravidades.

Pois as revoluções dos planetas circunjovianos ao redor de Júpiter, dos que circundam Saturno ao redor de Saturno, e de Mercúrio e Vênus e dos outros planetas que circundam o sol ao redor do sol, são aparências do mesmo tipo que a revolução da lua ao redor da terra. Portanto, pela Regra 2, devem possuir o mesmo tipo de causa, especialmente por ter sido demonstrado que as forças de que dependem estas revoluções tendem aos centros de Júpiter, de Saturno e do sol; e que estas forças, ao afastar-se de Júpiter, de Saturno e do sol decrescem na mesma proporção e de acordo com a *mesma lei* que a força da gravidade segue ao afastar-se da terra.

Corolário I – Há, portanto, um poder de gravidade tendendo para todos os planetas. Pois, sem dúvida, Vênus, Mercúrio e o restante são corpos do mesmo tipo que Júpiter e Saturno. E, portanto, como toda atração (pela Lei III) é mútua, Júpiter irá gravitar em direção a todos os seus satélites, Saturno em direção aos seus, a terra em direção à lua, e o sol em direção aos planetas primários.

Corolário II – A força de gravidade que tende para qualquer planeta é inversamente proporcional ao quadrado da distância dos lugares ao centro do planeta.

COROLÁRIO III – Todos os planetas gravitam em direção um ao outro, pelos Corolários I e II. A isto se deve que Júpiter e Saturno, quando próximos de sua conjunção, perturbam sensivelmente os movimentos um do outro por suas atrações mútuas. Assim também o sol perturba os movimentos da lua, e tanto o sol quanto a lua perturbam nosso mar, como explicaremos mais adiante.

Escólio

A força que mantém os corpos celestes em suas órbitas tem sido chamada até aqui de força centrípeta, mas tendo ficado evidente que ela não pode ser outra que não uma força gravitacional, vamos chamá-la daqui por diante de gravidade. Pois a causa desta força centrípeta que mantém a lua em sua órbita estende-se a todos os planetas, pelas Regras 1, 2 e 4.

PROPOSIÇÃO VI. TEOREMA VI

Que todos os corpos gravitam em direção a todos os planetas e que os pesos dos corpos em direção a qualquer um dos planetas, a distâncias iguais do centro do planeta, são proporcionais às quantidades de matéria que eles contêm.

Tem sido observado por outros por um longo tempo que todos os tipos de corpos pesados (levando em conta a desigualdade de retardação que eles sofrem devido a um pequeno poder de resistência no ar) descem para a terra *de alturas iguais* em tempos iguais. E podemos determinar esta igualdade dos tempos com grande precisão com a ajuda de pêndulos. Fiz experiências com ouro, prata, chumbo, vidro, areia, sal comum, madeira, água e trigo. Fiz duas caixas de madeira, redondas e iguais: enchi uma com madeira, e suspendi um peso igual de ouro (tão exatamente quanto pude) no centro de oscilação da outra. As caixas, penduradas por fios iguais de 11 pés, formavam um par de pêndulos perfeitamente iguais em peso e forma, recebendo igualmente a resistência do ar. E colocando uma ao lado da outra observei-as oscilar juntas para frente e para trás por um longo tempo, com vibrações iguais. E, portanto, a quantidade de matéria no ouro (pelo Corolários I e VI, Proposição 24, Livro II) estava para a quantidade de matéria na madeira assim como a ação da força motriz (ou *vis motrix*) sobre todo o ouro estava para a ação da mesma sobre toda a madeira, isto é,

como o peso de um estava para o peso do outro, o mesmo acontecendo com os outros corpos. Por estas experiências, em corpos do mesmo peso, podia manifestamente ter descoberto uma diferença de matéria menor do que a milésima parte do todo, tivesse havido qualquer diferença. Mas, sem qualquer dúvida, a natureza da gravidade em direção aos planetas é a mesma que em direção à terra. Pois, se imaginássemos nossos corpos terrestres levados à órbita da lua e lá, junto com a lua, despojados de todo movimento, fossem soltos, de forma a caírem juntos em direção à terra, é certo a partir do que já demonstramos antes que, em tempos iguais, eles percorreriam espaços iguais com a lua, e como conseqüência estão para a lua em quantidade de matéria assim como seus pesos estão para o peso dela. Além disto, como os satélites de Júpiter realizam suas revoluções em tempos que observam a $3/2^{a}$ potência da proporção de suas distâncias ao centro de Júpiter, suas gravidades acelerativas em direção a Júpiter serão inversamente como os quadrados de suas distâncias ao centro de Júpiter, isto é, iguais a distâncias iguais. E, portanto, estes satélites, caindo *em direção a Júpiter* de alturas iguais, descreveriam espaços iguais em tempos iguais, da mesma forma que os corpos pesados fazem em nossa terra. E, pelo mesmo argumento, supondo-se que os planetas que circundam o sol fossem soltos a distâncias iguais do sol, eles descreveriam espaços iguais em tempos iguais em suas quedas em direção ao sol. Mas forças que aceleram igualmente corpos desiguais devem ser como estes corpos, isto é, os pesos dos planetas *em direção ao sol* devem ser como suas quantidades de matéria. Ademais, que os pesos de Júpiter e de seus satélites em direção ao sol são proporcionais às várias quantidades de suas matérias, decorre dos movimentos extremamente regulares dos satélites (pelo Corolário III, Proposição 65, Livro I). Pois se alguns destes corpos fossem atraídos mais fortemente para o sol proporcionalmente à quantidade de suas matérias do que outros, os movimentos dos satélites seriam perturbados por esta desigualdade de atração (pelo Corolário II, Proposição 65, Livro I). Se, a distâncias iguais do sol, qualquer satélite, em proporção à sua quantidade de matéria, gravitasse em direção ao sol com uma força maior do que Júpiter em proporção à sua, de acordo com qualquer proporção dada, suponha que de *d* para *e*, então a distância entre os centros do sol e da órbita do satélite seria sempre maior do que a distância entre os centros do sol e de Júpiter, aproximadamente como a raiz quadrada desta proporção, como encontrei por alguns cálculos. E se o satélite gravitasse em direção ao sol com uma força menor na proporção de *e* para *d*, a distância do centro da órbita do satélite para o sol seria menor do que a distância do centro de Júpiter ao sol como a raiz quadrada da mes-

ma proporção. Portanto, se, a distâncias iguais do sol, a gravidade acelerativa de qualquer satélite em direção ao sol fosse maior ou menor do que a gravidade acelerativa de Júpiter em direção ao sol uma $\frac{1}{1000}$ parte da gravidade total, a distância do centro da órbita do satélite ao sol seria maior ou menor do que a distância de Júpiter ao sol por $\frac{1}{2000}$ parte da distância total, isto é, por uma quinta parte da distância do satélite mais distante ao centro de Júpiter, uma excentricidade da órbita que seria bem perceptível. Mas as órbitas dos satélites são concêntricas a Júpiter, logo as gravidades acelerativas de Júpiter e de todos seus satélites em direção ao sol são iguais entre si. E, pelo mesmo argumento, os pesos de Saturno e de seus satélites em direção ao sol, a distâncias iguais do sol, são como suas várias quantidades de matéria. E os pesos da lua e da terra em direção ao sol ou não existem, ou são precisamente proporcionais às massas da matéria que eles contêm. Mas algum peso eles têm, pelo Corolários I e III, Proposição 5.

Ademais, os pesos de todas as partes de todo planeta em direção a qualquer outro planeta estão um para o outro como a matéria nas várias partes, pois se algumas partes gravitassem mais, outras menos, do que pela quantidade de suas matérias, então todo o planeta, de acordo com o tipo de partes que é mais abundante, gravitaria mais ou menos do que proporcionalmente à quantidade de matéria no todo. Também não interessa se estas partes são internas ou externas. Pois se, por exemplo, imaginássemos que os corpos terrestres juntamente conosco fossem levados para a órbita da lua para lá serem comparados com seu corpo, se os pesos destes corpos estivessem para os pesos das partes externas da lua como as quantidades de matéria num e noutro respectivamente, mas para os pesos das partes internas numa proporção maior ou menor, então da mesma forma os pesos destes corpos estariam para o peso de toda a lua numa proporção maior ou menor, contrariamente ao que mostramos acima.

COROLÁRIO I – Portanto, os pesos dos corpos não dependem de suas formas e texturas, pois se os pesos pudessem ser alterados com as formas, eles seriam maiores ou menores de acordo com a variedade das formas na mesma matéria, o que é totalmente contrário à experiência.

COROLÁRIO II – Universalmente, todos os corpos ao redor da terra gravitam em direção à terra e os pesos de todos, a distâncias iguais do centro da terra, são como as quantidades de matéria que cada um deles contém. Esta é a qualidade de todos os corpos dentro do alcance de nossas experiências. Portanto (pela Regra 3), pode ser afirmado sobre todos os corpos de

qualquer tipo. Se o éter, ou qualquer outro corpo, fosse ou totalmente desprovido de gravidade, ou gravitasse menos proporcionalmente à sua quantidade de matéria, então como (de acordo com Aristóteles, Descartes e outros) não há diferença entre este e outros corpos a não ser na *mera* forma da matéria, por uma mudança sucessiva de forma para forma, ele poderia ser modificado finalmente num corpo da mesma condição que aqueles que gravitam mais proporcionalmente à sua quantidade de matéria e, por outro lado, os corpos mais pesados, adquirindo a primeira forma deste corpo, poderiam perder gradualmente suas gravidades. E, portanto, os pesos dependeriam das formas dos corpos e poderiam ser modificados com estas formas, contrariamente ao que foi provado no Corolário precedente.

COROLÁRIO III – Todos os espaços não são igualmente cheios, pois se todos os espaços fossem igualmente cheios, então a gravidade específica do fluido que preenche a região do ar, devido à extrema densidade da matéria, não seria em nada diferente da gravidade específica do mercúrio, ou do ouro, ou do mais denso dos corpos. Portanto, nem o ouro, nem qualquer outro corpo, poderia descer no ar, pois os corpos não descem em fluidos a não ser que eles sejam especificamente mais pesados do que os fluidos. E se a quantidade de matéria num espaço dado pode, por qualquer rarefação, ser diminuída, o que impediria uma diminuição ao infinito?

COROLÁRIO IV – Se todas as partículas sólidas de todos os corpos são da mesma densidade e não podem ser rarefeitas a não ser por seus poros, então deve-se aceitar um vazio, espaço ou vácuo. Por corpos de mesma densidade quero dizer aqueles cujas inércias são proporcionais a seus volumes.

COROLÁRIO V – O poder da gravidade é de uma natureza diferente do poder do magnetismo, pois a atração magnética não é como a matéria atraída. Alguns corpos são mais atraídos pelo ímã, outros menos, a maioria dos corpos não sofre qualquer atração. O poder do magnetismo num mesmo corpo pode ser aumentado e diminuído, sendo algumas vezes muito mais forte, pela quantidade de matéria, do que o poder da gravidade. E, ao se afastar do ímã, decai não como o quadrado mas quase como o cubo da distância, tanto quanto pude julgar a partir de algumas observações grosseiras.

PROPOSIÇÃO VII. TEOREMA VII

Que há um poder da gravidade pertencente a todos os corpos, proporcional às várias quantidades de matéria que eles contêm.

Provamos antes que todos os planetas gravitam em direção uns aos outros, assim como que a força da gravidade em direção a cada um deles, considerado separadamente, é inversamente como o quadrado das distâncias dos lugares ao centro do planeta. E, portanto, (pela Proposição 69, Livro I, e seus Corolários) segue-se que a gravidade tendendo em direção a todos os planetas é proporcional à matéria que eles contêm.

Além disto, como todas as partes de qualquer planeta A gravitam em direção a qualquer outro planeta B, e a gravidade de toda parte está para a gravidade do todo assim como a matéria da parte está para a matéria do todo, e (pela Lei III) para cada ação corresponde uma reação igual, o planeta B, por sua parte, irá gravitar em direção a todas as partes do planeta A, e sua gravidade em direção a qualquer uma das partes estará para a gravidade em direção ao todo assim como a matéria da parte está para a matéria do todo. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, a força da gravidade em direção a qualquer planeta inteiro surge de, e é composta de, forças de gravidade em direção a todas as suas partes. Atrações magnéticas e elétricas nos dão exemplos disto, pois toda atração em direção ao todo surge das atrações em direção às várias partes. Isto pode ser facilmente entendido na gravidade se considerarmos um planeta maior como formado de um número de planetas menores encontrando-se num globo, pois *daqui apareceria* que a força do todo deve surgir das forças das partes componentes. Se for contestado que, de acordo com esta lei, todos os corpos juntamente conosco devem gravitar em direção um ao outro, enquanto que esta gravitação não aparece em lugar nenhum, respondo que como a gravitação em direção a estes corpos está para a gravitação em direção a toda a terra assim como estes corpos estão para toda a terra, a gravitação em direção a eles deve ser muito menor do que a que pode ser observada por nossos sentidos.

COROLÁRIO II – A força da gravidade em direção às várias partículas iguais de qualquer corpo é inversamente como o quadrado das distâncias dos lugares das partículas, como aparece do Corolário III, Proposição 74, Livro I.

PROPOSIÇÃO VIII. TEOREMA VIII

Se em duas esferas gravitando uma em direção à outra, a matéria é semelhante em todos os lugares circundantes e eqüidistantes dos centros, o peso de cada esfera em direção à outra será inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros.

Depois que obtive que a força da gravidade em direção a todo planeta surgia e era composta das forças de gravidade em direção a todas as suas partes, e em direção a cada uma das partes estava numa proporção inversa dos quadrados das distâncias em relação à parte, ainda estava em dúvida se esta proporção inversamente como o quadrado da distância se manteria precisamente, ou aproximadamente assim, na força total composta de tantas forças parciais. Pois poderia ser que a proporção que acontece precisamente a grandes distâncias estaria longe da verdade quando próxima da superfície do planeta, onde as distâncias das partículas são desiguais e suas situações diferentes. Mas com a ajuda das Proposições 75 e 76, Livro I, e seus Corolários, fiquei finalmente convencido da verdade da Proposição como ela está apresentada agora.

Corolário I – Portanto, podemos encontrar e comparar os pesos dos corpos em direção a planetas diferentes. Pois os pesos dos corpos girando em círculos ao redor dos planetas são (pelo Corolário II, Proposição 4, Livro I) diretamente como os diâmetros dos círculos e inversamente como os quadrados de seus tempos periódicos, e seus pesos nas superfícies dos planetas, ou a quaisquer outras distâncias de seus centros, são (por esta Proposição) maiores ou menores inversamente como o quadrado das distâncias. Assim, a partir dos tempos periódicos de Vênus, girando ao redor do sol em $224^d16\frac{3}{4}^h$; do satélite mais distante girando ao redor de Júpiter em $16^d16\frac{8}{15}^h$; do satélite de Huygens girando ao redor de Saturno em $15^d22\frac{2}{3}^h$; e da lua que gira ao redor da terra em $27^d7^h43^m$, comparados com a distância média de Vênus ao sol, e com a maior elongação heliocêntrica do satélite mais distante que gira ao redor do centro de Júpiter, 8'16'', do satélite de Huygens ao centro de Saturno, 3'4'', e da lua da terra, 10'33'', encontrei por cálculo que o peso de corpos iguais, a distâncias iguais dos centros do sol, de Júpiter, de Saturno e da terra, em direção ao sol, Júpiter, Saturno e à terra, estavam um para o outro assim como 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$ e $\frac{1}{169282}$, respectivamente. Então, como à medida em que as distâncias são aumentadas ou diminuídas, os pesos são diminuídos ou aumentados numa razão ao quadrado os pesos de corpos iguais em direção ao sol, Júpter, Saturno e à terra, a distâncias de 10000, 997, 791 e 109 de seus centros, isto é, em suas superfícies, estarão como 10000, 943, 529 e 435, respectivamente. Posteriormente mostrarei quanto valem os pesos dos corpos na superfície da lua.

Corolário II – Descobrimos, portanto, de forma semelhante, a quantidade de matéria nos vários planetas. Pois suas quantidades de matéria são como as forças das gravidades a iguais distâncias de seus centros, isto é, no

sol, Júpiter, Saturno e na terra, como 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$ e $\frac{1}{169282}$, respectivamente. Se a paralaxe do sol for considerada maior ou menor do que 10"30"', a quantidade de matéria na terra deve ser aumentada ou diminuída como o cubo desta proporção.

COROLÁRIO III – Portanto, obtemos também as densidades dos planetas. Pois (pela Proposição 72, Livro I) os pesos de corpos iguais e similares em direção a esferas similares são, nas superfícies destas esferas, como os diâmetros das esferas. Portanto, as densidades de esferas diferentes são como estes pesos aplicados aos diâmetros das esferas. Mas os verdadeiros diâmetros do sol, Júpiter, Saturno e da terra, estão um para o outro como 10000, 997, 791 e 109; e os pesos em direção aos mesmos como 10000, 943, 529 e 435, respectivamente; e, portanto, suas densidades são como 100, 94½, 67 e 400. A densidade da terra decorrente deste cálculo não depende da paralaxe do sol, mas é determinada pela paralaxe da lua, estando certamente bem definida. O sol, portanto, é um pouco mais denso do que Júpiter, Júpiter do que Saturno e a terra quatro vezes mais densa do que o sol, pois o sol, por seu grande calor, é mantido numa espécie de estado rarefeito. A lua é mais densa do que a terra, como demonstrarei posteriormente.

COROLÁRIO IV – Quão menores são os planetas, outras coisas sendo iguais, tão maiores serão suas densidades, pois assim os poderes da gravidade sobre suas várias superfícies aproximan-se da igualdade. Da mesma forma, quão mais próximos eles estão do sol, maiores serão suas densidades, outras coisas sendo iguais. Assim Júpiter é mais denso do que Saturno e a terra do que Júpiter, pois os planetas foram situados a diferentes distâncias do sol para que, de acordo com seus graus de densidade, eles pudessem gozar de uma proporção maior ou menor do calor do sol. Nossa água seria transformada em gelo se fosse transportada até a órbita de Saturno e na de Mercúrio iria rapidamente transformar-se em vapor. Pois a luz do sol, a qual é proporcional a seu calor, é sete vezes mais densa na órbita de Mercúrio do que na nossa. E pelo termômetro encontrei que um calor sete vezes o do nosso sol de verão iria fazer com que a água fervesse. Também não há dúvidas de que a matéria de Mercúrio é adaptada a seu calor, sendo portanto mais densa do que a matéria de nossa terra, pois numa matéria mais densa as operações da Natureza exigem um calor maior.

PROPOSIÇÃO IX. TEOREMA IX

Que a força da gravidade, considerada para baixo a partir da superfície dos planetas, decresce aproximadamente na proporção das distâncias ao centro dos planetas.

Se a matéria do planeta fosse de uma densidade uniforme, esta Proposição seria exatamente verdadeira (pela Proposição 73, Livro I). Portanto, o erro não pode ser maior do que o que pode surgir da desigualdade da densidade.

PROPOSIÇÃO X. TEOREMA X

Que os movimentos dos planetas nos céus podem persistir por um tempo extremamente longo.

No Escólio da Proposição 40, Livro II, mostrei que um globo de água congelado movendo-se livremente em nosso ar perderia pela resistência do ar 1/4586 parte de seu movimento no tempo em que ele descreveria o comprimento de seu semidiâmetro. A mesma proporção vale aproximadamente em todos os globos, não interessando quão grandes e movendo-se com qualquer velocidade. Mas determinei que nosso globo terrestre é de uma densidade maior do que teria se consistisse apenas de água, e isto da seguinte forma. Se todo o globo consistisse apenas de água, tudo que fosse de uma densidade menor do que a água iria emergir e flutuar acima dela devido a sua menor gravidade específica. E baseado nisto, se um globo de matéria terrestre, coberto por todos os lados com água, fosse menos denso do que a água, ele emergiria em algum lugar e a água, retrocedendo, se acumularia no lado oposto. E tal é a condição de nossa terra que é em grande medida coberta com mares. A terra, se não fosse por sua maior densidade, emergiria dos mares e, de acordo com seu grau de leveza, seria levantada mais ou menos acima de suas superfícies, a água dos mares retrocedendo para o lado oposto. Pelo mesmo argumento, as manchas do sol que flutuam sobre sua matéria lúcida, são mais leves do que esta matéria e, não interessando como os planetas foram formados enquanto eles ainda eram massas fluidas, toda a matéria mais pesada afundou para o centro. Como, portanto, a matéria comum de nossa terra em sua superfície é aproximadamente duas vezes mais pesada do que a água, e um pouco mais abaixo, em minas, encon-

tra-se ao redor de três, ou quatro, ou mesmo cinco vezes mais pesada, é provável que a quantidade de toda a matéria da terra possa ser cinco ou seis vezes maior do que se ela consistisse toda de água, especialmente por eu ter encontrado antes que a terra é ao redor de quatro vezes mais densa do que Júpiter. Se, portanto, Júpiter é um pouco mais denso do que a água, no espaço de trinta dias no qual este planeta descreve o comprimento de 459 vezes o seu semidiâmetro, ele iria perder quase uma décima parte de seu movimento num meio com a mesma densidade que nosso ar. Mas a resistência dos meios decresce proporcionalmente ao seu peso ou densidade, de forma que a água, que é 13⅗ vezes mais leve do que o mercúrio, resiste menos nesta proporção, e o ar, 860 vezes mais leve que a água, resiste menos na mesma proporção. Nos céus, portanto, onde o peso do meio em que os planetas se movem é imensamente diminuído, a resistência quase desaparece.

É mostrado no Escólio da Proposição 22, Livro II, que na altura de 200 milhas acima da terra o ar é mais rarefeito do que na superfície da terra na razão de 30 para 0,0000000000003998, ou como 75 000 000 000 000 para 1, aproximadamente. E, portanto, o planeta Júpiter, girando num meio da mesma densidade que este ar superior, não perderia a 1 000 000ª parte de seu movimento em 1 000 000 anos pela resistência do meio. Nos espaços próximos da terra a resistência é produzida apenas pelo ar, exalações e vapores. Quando estes são cuidadosamente extraídos pela bomba de ar sob o recipiente, corpos pesados caem dentro do recipiente com a maior liberdade e sem a menor resistência perceptível. O próprio ouro e a mais leve pena, soltos juntos, irão descer com igual velocidade. Embora eles caiam através de um espaço de quatro, seis e oito pés, chegam ao fundo no mesmo tempo, como decorre das experiências. E, portanto, sendo as regiões celestes perfeitamente desprovidasde ar e de exalações, os planetas e cometas continuarão seus movimentos através delas por um imenso intervalo de tempo por não encontrarem resistência perceptível nestes espaços.

Hipótese I

Que o centro do sistema do mundo está imóvel.

Isto é reconhecido por todos, embora alguns asseverem que a terra, outros que o sol, é fixo neste centro. Vamos ver o que segue daqui.

Proposição XI. Teorema XI

Que o centro de gravidade comum da terra, do sol e de todos os planetas, está imóvel.

Pois (pelo Corolário IV das Leis) este centro ou está em repouso, ou move-se uniformemente para a frente numa linha reta. Mas se este centro se movesse, o centro do mundo também se moveria, contrariando a Hipótese.

Proposição XII. Teorema XII

Que o sol é agitado por um movimento contínuo, mas nunca se afasta muito do centro comum de gravidade de todos os planetas.

Pois como (pelo Corolário II, Proposição 8) a quantidade de matéria no sol está para a quantidade de matéria em Júpiter como 1067 está para 1 e a distância de Júpiter ao sol está para o semidiâmetro do sol numa proporção um pouco maior, o centro comum de gravidade de Júpiter e do sol incide sobre um ponto um pouco fora da superfície do sol. Pelo mesmo argumento, como a quantidade de matéria do sol está para a quantidade de matéria de Saturno como 3021 está para 1 e a distância de Saturno ao sol está para o semidiâmetro do sol numa proporção um pouco menor, o centro comum de gravidade de Saturno e do sol incide sobre um ponto um pouco dentro da superfície do sol. E, seguindo os princípios deste cálculo, devemos encontrar que mesmo se a terra e todos os planetas fossem colocados sobre um lado do sol, a distância do centro comum de gravidade de todos eles ao centro do sol chegaria apenas a um diâmetro do sol. Nos outros casos, as distâncias destes centros são sempre menores. Portanto, como o centro de gravidade está continuamente em repouso, o sol, de acordo com as várias posições dos planetas, será continuamente movido em todas as direções, mas nunca irá afastar-se muito deste centro.

Corolário – Portanto, o centro comum de gravidade da terra, do sol e de todos os planetas, é para ser considerado o centro do mundo. Pois como a terra, o sol e todos os planetas gravitam em direção um ao outro, estando, portanto, de acordo com seus poderes de gravidade, em agitação contínua, como requerem as Leis de Movimento, é evidente que seus centros móveis não podem ser tomados como o centro imóvel do mundo. Se fosse para ser colocado no centro um corpo em direção ao qual mais gravi-

tassem os outros corpos (de acordo com a opinião comum), este privilégio teria de ser dado ao sol. Mas como o próprio sol é móvel, é para ser escolhido um ponto fixo em relação ao qual o sol se afaste o mínimo e a partir do qual ele se afastaria ainda menos se o corpo do sol fosse mais denso e maior, portanto menos apto a ser movido.

Proposição XIII. Teorema XIII

Os planetas movem-se em elipses que têm seu foco comum no centro do sol e, a partir de raios traçados até este centro, descrevem áreas proporcionais aos tempos de percurso.

Dissertamos acima sobre estes movimentos a partir dos Fenômenos. Agora que conhecemos os princípios dos quais eles dependem, a partir destes princípios deduzimos os movimentos dos céus *a priori*. Como os pesos dos planetas em direção ao sol são inversamente como os quadrados de suas distâncias ao centro do sol, se o sol estivesse em repouso, e se os outros planetas não agissem uns sobre os outros, suas órbitas seriam elipses, tendo o sol em seu foco comum, e eles descreveriam áreas proporcionais aos tempos *de percurso*, pelas Proposições 1 e 11, e Corolário I, Proposição 13, Livro I. Mas as ações dos planetas uns sobre os outros são tão pequenas, que elas podem ser desprezadas e pela Proposição 66, Livro I, elas perturbam os movimentos dos planetas ao redor do sol em movimento, menos do que se estes movimentos fossem efetuados ao redor do sol em repouso.

É verdade que a ação de Júpiter sobre Saturno não é para ser desprezada, pois a força da gravidade em direção a Júpiter está para a força da gravidade em direção ao sol (a distâncias iguais, Corolário II, Proposição 8) assim como 1 está para 1067. Portanto, na conjunção de Júpiter e Saturno, como a distância de Saturno a Júpiter está para a distância de Saturno ao sol quase como 4 está para 9, a gravidade de Saturno em direção a Júpiter estará para a gravidade de Saturno em direção ao sol como 81 para 16 1067, ou como 1 para aproximadamente 211. E surge, portanto, uma perturbação da órbita de Saturno em toda conjunção deste planeta com Júpiter, tão perceptível que os astrônomos ficam intrigados com ela. Como o planeta está localizado diferentemente nestas conjunções, sua excentricidade é algumas vezes aumentada, algumas vezes diminuída, seu afélio é algumas vezes levado para frente, algumas vezes para trás, e seu movimento médio é alternadamente acelerado e retardado. Contudo, todo o erro em seu movimento ao

redor do sol, embora surgindo de uma força tão grande, pode ser quase evitado (exceto no movimento médio) colocando o foco inferior de sua órbita no centro comum de gravidade de Júpiter e do sol (de acordo com a Proposição 67, Livro I). Portanto, este erro, quando é maior, apenas ultrapassa dois minutos e o maior erro no movimento médio apenas ultrapassa dois minutos por ano. Mas na conjunção de Júpiter e Saturno, as forças acelerativas da gravidade do sol em direção a Saturno, de Júpiter em direção a Saturno, e de Júpiter em direção ao sol, são quase como 16, 81 e $\frac{16 \cdot 81 \cdot 3021}{25}$, ou 156609. Portanto, a diferença das forças de gravidade do sol em direção a Saturno, e de Júpiter em direção a Saturno, está para a força de gravidade de Júpiter em direção ao sol como 65 para 156609, ou como 1 para 2409. Mas o maior poder de Saturno em perturbar o movimento de Júpiter é proporcional a esta diferença. Portanto, a perturbação da órbita de Júpiter é muito menor do que daquela de Saturno. As perturbações das outras órbitas são ainda muito menores, exceto que a órbita da terra é perceptivelmente perturbada pela lua. O centro de gravidade comum da terra e da lua move-se numa elipse ao redor do sol no seu foco e, por um raio traçado ao sol, descreve áreas proporcionais aos tempos de percurso. Mas entrementes a terra gira ao redor deste centro comum por um movimento mensal.

Proposição XIV. Teorema XIV

Os afélios e nós das órbitas dos planetas são fixos.

Os afélios são imóveis pela Proposição 11, Livro I, e assim são os planos das órbitas, pela Proposição 1 do mesmo livro. E se os planos são fixos, os nós também o são. É verdade que algumas desigualdades podem surgir das ações mútuas dos planetas e cometas em suas revoluções, mas estas serão tão pequenas que podem ser desprezadas aqui.

Corolário I – As estrelas fixas são imóveis, visto que elas mantêm a mesma posição em relação aos afélios e aos nós dos planetas.

Corolário II – E como estas estrelas não estão sujeitas a paralaxes perceptíveis devido ao movimento anual da terra, elas não podem ter força, devido à sua imensa distância, para produzir qualquer efeito perceptível em nosso sistema. Sem mencionar que as estrelas fixas, dispersas promiscuamente por todo lado nos céus, destroem suas ações mútuas devido a suas atrações contrárias, pela Proposição 70, Livro I.

Escólio

Como os planetas próximos do sol (a saber, Mercúrio, Vênus, a terra e Marte) são tão pequenos que eles só podem agir com força pequena um sobre o outro, seus afélios e nós têm de ser fixos, exceto naquilo em que são perturbados pelas ações de Júpiter, Saturno e de outros corpos maiores. E, portanto, podemos encontrar, pelo teoria da gravidade, que seus afélios movem-se um pouco para frente, em relação às estrelas fixas, e isto como a $3/2^{a}$ potência de suas várias distâncias ao sol. De forma que se o afélio de Marte, no espaço de cem anos, avança 33'20", em relação às estrelas fixas, os afélios da terra, de Vênus e de Mercúrio, avançarão em cem anos 17'40", 10'53", e 4'16", respectivamente. Mas estes movimentos são tão pouco consideráveis, que os desprezamos nesta Proposição.

Proposição XV. Problema I

Achar os diâmetros principais das órbitas dos planetas.

Eles devem ser tomados como a $2/3^{a}$ potência dos tempos periódicos, pela Proposição 15, Livro I, e então aumentados separadamente na proporção da soma das massas da matéria no sol e em cada planeta para a primeira de duas médias proporcionais entre esta soma e quantidade de matéria no sol, pela Proposição 60, Livro I.

Proposição XVI. Problema II

Achar as excentricidades e afélios dos planetas.

Este problema é resolvido pela Proposição 18, Livro I.

Proposição XVII. Teorema XV

Que os movimentos diurnos dos planetas são uniformes e que a libração da lua surge de seu movimento diurno.

A Proposição é provada pela primeira Lei de Movimento e pelo Corolário XXII, Proposição 66, Livro I. Júpiter, em relação às estrelas fixas, gira

em 9^h56^m, Marte em 24^h39^m, Vênus em aproximadamente 23^h, a terra em 23^h56^m, o sol em $25\frac{1}{2}^d$ e a lua em $27^d7^h43^m$. Isto decorre dos Fenômenos. As manchas no corpo do sol retornam para a mesma situação no disco do sol, em relação à terra, em 27½ dias e, portanto, em relação às estrelas fixas, o sol gira em aproximadamente 25½ dias. Mas como o dia lunar, decorrente de sua revolução uniforme ao redor de seu eixo, é mensal, *isto é, igual ao tempo de sua revolução periódica em sua órbita*, a mesma face da lua irá sempre estar aproximadamente voltada para o foco superior de sua órbita, mas, como requer a situação deste foco, desviará um pouco para um lado e para outro da terra no foco inferior, sendo isto a libração em longitude, pois a libração em latitude surge da latitude da lua e da inclinação de seu eixo para o plano da eclíptica. O Sr. N. Mercator publicou esta teoria da libração da lua em seu *Astronomy*, publicado no início do ano de 1676, explicada mais completamente a partir das cartas que lhe enviei. O satélite mais afastado de Saturno parece girar ao redor de seu eixo com um movimento como este da lua, apresentando sempre a mesma face para Saturno, pois em sua revolução ao redor de Saturno, cada vez que chega à parte leste de sua órbita é pouco visível e geralmente desaparece. Provavelmente isto é ocasionado por algumas manchas naquela parte de seu corpo, que é então voltada em direção à terra, como observou o Sr. Cassini. Assim também o satélite mais afastado de Júpiter parece girar ao redor de seu eixo com um movimento similar, já que naquela parte de seu corpo que não é voltada para Júpiter ele tem uma mancha que sempre aparece como se ela estivesse no próprio corpo de Júpiter quando o satélite passa entre Júpiter e nosso olho.

Proposição XVIII. Teorema XVI

Que os eixos dos planetas são menores do que os diâmetros traçados perpendicularmente aos eixos.

A gravitação igual das partes sobre todos os lados daria uma forma esférica aos planetas, se não fosse por suas revoluções diurnas num círculo. Por este movimento circular acontece que as partes que se afastam do eixo tentam subir em direção ao equador. Portanto, se a matéria está num estado fluido, por sua subida em direção ao equador ela aumentará seus diâmetros, e por sua descida em direção aos pólos ela vai encurtar o eixo. Assim o diâmetro de Júpiter (pelas observações coincidentes dos astrônomos) é encontrado menor de pólo a pólo do que de leste a oeste. E, pelo mesmo ar-

gumento, se nossa terra não fosse mais alta no equador do que nos pólos, os mares iriam abaixar nos pólos e, subindo em direção ao equador, iriam inundar tudo por lá.

Proposição XIX. Problema III

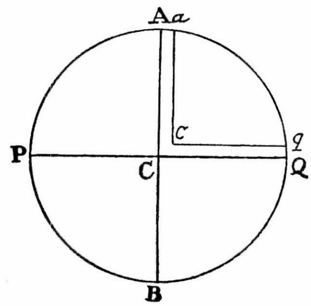
Achar a proporção do eixo de um planeta para os diâmetros perpendiculares a ele.

Nosso compatriota, Sr. Norwood, medindo uma distância de 905.751 pés, medida de Londres, entre Londres e York, em 1635, e observando a diferença das latitudes ser 2°28', determinou a medida de um grau ser 367 196 pés de medida londrina, isto é, 57 300 toesas de Paris. O Sr. Picard, medindo um arco de um grau, e 22'55" do meridiano entre Amiens e Malvoisine, encontrou um arco de um grau ser 57 060 toesas de Paris. O Sr. Cassini, o pai, mediu a distância do meridiano da cidade de Collioure em Roussillon ao Observatório de Paris e seu filho adicionou a distância do Observatório à cidadela de Dunquerque. A distância total é de 486156½ toesas e a diferença das latitudes de Collioure e Dunquerque é de 8 graus e 31'11⅚". Portanto, um arco de um grau resulta ser 57 061 toesas de Paris. E destas medidas concluímos que a circunferência da terra é 123 249 600 e seu semidiâmetro 19 615 800 pés de Paris, com a suposição de que a terra tem uma forma esférica.

Na latitude de Paris um corpo pesado caindo no tempo de um segundo percorre 15 pés de Paris, 1 polegada e 1 7/9 linhas, como acima, isto é, 2173 7/9 linhas. O peso do corpo é diminuído pelo peso do ar ambiente. Vamos supor ser o peso perdido por este meio $\frac{1}{11\,000}$ partes do peso total, então este corpo pesado caindo no vácuo percorrerá uma altura de 2174 linhas no tempo de um segundo.

Um corpo em cada dia sideral de $23^h56^m4^s$, girando uniformemente num círculo à distância de 19 615 800 pés do centro, no tempo de um segundo percorre um arco de 1433,46 pés, o seno verso disto é 0,05236561 pés, ou 7,54064 linhas. E, portanto, a força com a qual os corpos descem na latitude de Paris está para a força centrífuga dos corpos no equador que surge do movimento diurno da terra assim como 2174 está para 7,54064.

A força centrífuga dos corpos no equador está para a força centrífuga com a qual os corpos se afastam diretamente da terra na latitude de Pa-



ris, 48°50'10", como a raiz quadrada da razão do raio para o co-seno da latitude, isto é, como 7,54064 para 3,267. Adicione esta força à força com a qual os corpos descem por seu peso na latitude de Paris, e um corpo, na latitude de Paris, caindo pela força da gravidade total sem ser diminuída, no tempo de um segundo, irá percorrer 2177,267 linhas, ou 15 pés de Paris, 1 polegada e 5,267 linhas. E a força total da gravidade naquela latitude estará para a força centrífuga dos corpos no equador da terra assim como 2177,267 está para 7,54064, ou como 289 para 1.

Portanto, se APBQ representa a forma da terra, agora não mais esférica, mas gerada pela rotação de uma elipse ao redor de seu eixo menor PQ, e ACQ*qca* representa um canal cheio de água, partindo do pólo Q*q* ao centro C*c* e daí subindo ao equador A*a*, o peso da água no lado AC*ca* do canal estará para o peso da água no outro lado QC*cq* assim como 289 está para 288, pois a força centrífuga que surge do movimento circular sustenta e retira uma das 289 partes do peso (em um lado), e o peso das 288 no outro lado sustenta o restante. Mas por cálculo (do Corolário II, Proposição 91, Livro I) encontro que, se a matéria da terra fosse toda uniforme e sem qualquer movimento, e se seu eixo PQ estivesse para o diâmetro AB assim como 100 para 101, a força da gravidade no lugar Q em direção à terra estaria para a força da gravidade no mesmo lugar Q em direção a uma esfera descrita ao redor do centro C com o raio PC, ou QC, assim como 126 está para 125. E, pelo mesmo argumento, a força da gravidade no lugar A em direção ao esferóide gerado pela rotação da elipse APBQ ao redor do eixo AB está para a força da gravidade no mesmo lugar A, em direção à esfera descrita ao redor do centro C com o raio AC, assim como 125 está para 126. Mas a força da gravidade no lugar A em direção à terra é uma média proporcional entre as forças de gravidade em direção ao esferóide e a esta esfera; pois a esfera, ao ter seu diâmetro PQ diminuído na proporção de 101 para 100, toma a forma da terra, e esta forma, ao ter um terceiro diâmetro perpendicular aos dois diâmetros AB e PQ diminuído na mesma proporção, é convertida no dito esferóide, e a força da gravidade em A, em ambos os casos, é diminuída quase na mesma proporção. Portanto, a força da gravidade em A em direção a esfera descrita ao redor do centro C com o raio AC, está para a força da gravidade em A em direção à terra assim como 126 está para 125½. E a força da gravidade no lugar Q em direção à esfera descrita ao redor do centro C com o raio QC, está para a força da gravidade no lugar A em direção a

esfera descrita ao redor do centro C com o raio AC, na proporção dos diâmetros (pela Proposição 72, Livro I), isto é, como 100 para 101. Se, portanto, compomos estas três proporções 126 para 125, 126 para 125½ e 100 para 101, em uma, a força da gravidade no lugar Q em direção à terra estará para a força da gravidade no lugar A em direção à terra assim como 126 126 100 está para 125 125½.101, ou como 501 para 500.

Agora como (pelo Corolário III, Proposição 91, Livro I) a força da gravidade em qualquer lado do canal AC*ca* ou QC*cq*, é como a distância dos lugares ao centro da terra, se concebemos estes lados como divididos por superfícies transversas, paralelas e eqüidistantes, em partes proporcionais aos todos, os pesos de qualquer número de partes em um lado AC*ca* estará para os pesos do mesmo número de partes no outro lado assim como suas magnitudes e forças acelerativas de suas gravidades conjuntamente, isto é, como 101 para 100 e 500 para 501, ou como 505 para 501. E, portanto, se a força centrífuga de cada parte no lado AC*ca*, decorrente do movimento diurno, está para o peso da mesma parte como 4 para 505, de forma que do peso de cada parte, concebido como sendo dividido em 505 partes, a força centrífuga pudesse retirar quatro destas partes, os pesos permaneceriam iguais em cada lado e, portanto, o fluido permaneceria em equilíbrio. Mas a força centrífuga de cada parte está para o peso da mesma parte assim como 1 está para 289, isto é, a força centrífuga, que deveria ser $\frac{4}{505}$ partes do peso, é apenas $\frac{1}{289}$ partes dele. Logo, afirmo que, pela regra da proporção, que se a força centrífuga $\frac{4}{505}$ faz a altura da água no lado AC*ca* exceder a altura da água no lado QC*cq* por $\frac{1}{100}$ partes de sua altura total, a força centrífuga $\frac{1}{289}$ torna o excesso da altura no lado AC*ca* apenas $\frac{1}{289}$ partes da altura da água no outro lado QC*cq*, e, portanto, o diâmetro da terra no equador[2] está para o diâmetro de pólo a pólo assim como 230 está para 229. E como o semidiâmetro médio da terra, de acordo com a medida de Picard, é 19 615 800 pés de Paris, ou 3 923,16 milhas (calculando 5 000 pés por milha), a terra será mais alta no equador do que nos pólos por 85 472 pés, ou 17⅒ milhas. E sua altura no equador será aproximadamente 19 658 600 pés e nos pólos 19 573 000 pés.

Se, a densidade e tempo periódico da revolução diurna permanecendo os mesmos, o planeta fosse maior ou menor do que a terra, a proporção

2. Apêndice, Nota 14.

da força centrífuga para a da gravidade e, portanto, também do diâmetro entre os pólos para o diâmetro no equador, iria de forma similar permanecer a mesma. Mas se o movimento diurno fosse acelerado ou retardado em qualquer proporção, a força centrífuga seria aumentada ou diminuída quase na mesma proporção ao quadrado, de modo que a diferença dos diâmetros seria aumentada ou diminuída na mesma razão ao quadrado, muito aproximadamente. E se a densidade do planeta fosse aumentada ou diminuída em qualquer proporção, a força da gravidade tendendo em direção a ele seria aumentada ou diminuída na mesma proporção e a diferença dos diâmetros seria ao contrário diminuída em proporção assim como a força da gravidade é aumentada, e aumentada em proporção assim como a força da gravidade é diminuída. Portanto, como a terra, em relação às estrelas fixas, gira em 23^h56^m, mas Júpiter em 9^h56^m, e os quadrados de seus tempos periódicos estão como 29 para 5, e suas densidades como 400 para 94½, a diferença dos diâmetros de Júpiter estará para seu diâmetro menor como $\frac{29}{5} \cdot \frac{400}{94\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{229}$ para 1, ou como 1 para 9⅓, aproximadamente. Portanto, o diâmetro de Júpiter de leste a oeste está para seu diâmetro de pólo a pólo aproximadamente como 10⅓ para 9⅓. Portanto, como seu diâmetro maior é 37'', seu diâmetro menor entre os pólos será 33''25'''. Adicione a isto 3'' devido à refração irregular da luz, e os diâmetros aparentes deste planeta tornam-se 40'' e 36''25''', que estão um para o outro assim como 11⅙ para 10⅙, muito aproximadamente. Isto decorre da suposição de que o corpo de Júpiter é uniformemente denso. Mas se seu corpo for mais denso em direção ao plano do equador do que em direção aos pólos, seus diâmetros podem estar um para o outro assim como 12 para 11, ou 13 para 12, ou talvez como 14 para 13.

E Cassini observou, no ano de 1691, que o diâmetro de Júpiter de leste a oeste é maior por aproximadamente uma parte em quinze do que o outro diâmetro. O Sr. Pound com seu telescópio de 123 pés e um micrômetro excelente, mediu os diâmetros de Júpiter no ano de 1719 e os encontrou como segue:

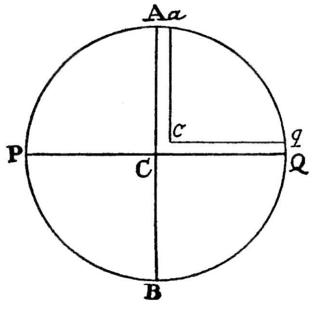
Os tempos			Maior diâmetro	Menor diâmetro	Os diâmetros um para o outro
	Dias	*Horas*	*Partes*	*Partes*	
Janeiro	28	6	13,40	12,28	Assim como 12 para 11
Março	6	7	13,12	12,20	13¾ para 12¾
Março	9	7	13,12	12,08	12⅔ para 11⅔
Abril	9	9	12,32	11,48	14½ para 13½

Logo, a teoria concorda com os fenômenos, pois os planetas são mais aquecidos pelos raios do sol em direção a seus equadores, sendo portanto um pouco mais condensados por este calor do que em direção a seus pólos.

Além disto, as experiências com pêndulos relatadas na Proposição seguinte mostram que há uma diminuição da gravidade ocasionada pela rotação diurna da terra e, portanto, a terra é mais alta no equador do que nos pólos (supondo que sua matéria seja uniformemente densa).

PROPOSIÇÃO XX. PROBLEMA IV

Achar e comparar entre si os pesos dos corpos em regiões diferentes de nossa terra.



Como os pesos dos lados desiguais do canal de água ACQ*qca* são iguais, e os pesos das partes proporcionais aos lados inteiros e igualmente situadas neles, estão um para o outro como os pesos dos todos e, portanto, iguais entre si, os pesos de partes iguais e situadas igualmente nos lados serão inversamente proporcionais aos lados, isto é, inversamente como 230 para 229. E o caso é o mesmo em todos corpos iguais homogêneos situados semelhantemente nos lados do canal. Seus pesos são inversamente como os lados, isto é, inversamente como as distâncias dos corpos ao centro da terra. Portanto, se os corpos estão situados nas partes superiores dos canais, ou na superfície da terra, seus pesos estarão um para o outro inversamente como suas distâncias ao centro. E, pelo mesmo argumento, os pesos em todos os outros lugares ao redor de toda a superfície da terra são inversamente como as distâncias dos lugares ao centro. Portanto, na hipótese da terra ser um esferóide, estão dados em proporção.

Daqui surge o teorema que o aumento no peso ao passar do equador aos pólos é aproximadamente como o seno verso do dobro da latitude, ou seja, como o quadrado do seno da latitude, e os arcos dos graus da latitude no meridiano aumentam aproximadamente na mesma proporção. E, portanto, como a latitude de Paris é 48°50', a dos lugares sob o equador 00°00', a dos lugares sob os pólos 90°, e os senos versos do dobro destes arcos são 1133400000 e 20000, o raio sendo 10000; e a força da gravidade no

pólo está para a força da gravidade no equador como 230 para 229; e o excesso da força da gravidade no pólo para a força da gravidade no equador é como 1 para 229; o excesso da força da gravidade na latitude de Paris estará para a força da gravidade no equador como $1.\frac{11334}{20000}$ para 229, ou como 5 667 para 2 290 000. E, portanto, as forças totais da gravidade nestes lugares estarão uma para a outra como 2 295 667 para 2 290 000. Portanto, como os comprimentos dos pêndulos oscilando em tempos iguais são como as forças da gravidade, e na latitude de Paris o comprimento de um pêndulo oscilando em segundos é 3 pés de Paris e $8\frac{1}{2}$ linhas, ou melhor, devido ao peso do ar, $8\frac{5}{6}$ linhas, o comprimento de um pêndulo oscilando no mesmo tempo sob o equador será mais curto por 1,087 linhas. E por um cálculo semelhante constrói-se a seguinte tabela.

Latitude do lugar	Comprimento do pêndulo		Medida de um grau no meridiano	Latitude do lugar	Comprimento do pêndulo		Medida de um grau no meridiano
graus	*pés*	*linhas*	*toesas*[3]	*graus*	*pés*	*linhas*	*toesas*[3]
0	3	7,468	56637	6	3	8,461	57022
5	3	7,482	56642	7	3	8,494	57035
10	3	7,526	56659	8	3	8,528	57048
15	3	7,596	56687	9	3	8,561	57061
20	3	7,692	56724	50	3	8,594	57074
25	3	7,812	56769	55	3	8,756	57137
30	3	7,948	56823	60	3	8,907	57196
35	3	8,099	56882	65	3	9,044	57250
40	3	8,261	56945	70	3	9,162	57295
1	3	8,294	56958	75	3	9,258	57332
2	3	8,327	56971	80	3	9,329	57360
3	3	8,361	56984	85	3	9,372	57377
4	3	8,394	56997	90	3	9,387	57382
45	3	8,428	57010				

Nesta tabela percebe-se que a desigualdade dos graus é tão pequena que a forma da terra, em questões geográficas, pode ser considerada como esférica, especialmente se a terra for um pouco mais densa em direção ao plano do equador do que em direção aos pólos.

3. Apêndice, Nota 15.

Mas vários astrônomos, enviados a países remotos para fazer observações astronômicas, encontraram que os relógios de pêndulo de fato movem-se mais lentamente próximo ao equador do que em nossos climas. E, primeiro de todos, no ano de 1672, o Sr. Richer notou isto na ilha de Cayenne, pois quando, no mês de agosto, ele estava observando as passagens das estrelas fixas pelo meridiano, ele observou seu relógio indo mais lentamente do que devia em relação ao movimento médio do sol na razão de 2^m28^s por dia. Portanto, ajustando um pêndulo simples para oscilar em segundos, que foram medidos por um relógio excelente, ele observou o comprimento deste pêndulo simples e fez isto várias vezes toda semana durante dez meses. E quando retornou para a França, comparando o comprimento deste pêndulo com o comprimento do pêndulo de Paris (que tem 3 pés de Paris e $8\frac{3}{5}$ linhas), encontrou-o menor por $1\frac{1}{4}$ linhas.

Depois disto, nosso amigo Dr. Halley, ao redor do ano de 1677, chegando na ilha de St. Helena, observou seu relógio de pêndulo mover-se mais lentamente lá do que em Londres sem marcar a diferença. Mas ele encolheu a haste de seu relógio em mais de $\frac{1}{8}$ de uma polegada, ou $1\frac{1}{2}$ linhas. Para fazer isto, como o comprimento do parafuso na parte de baixo da haste não era suficiente, inseriu um anel de madeira entre a porca e a bola.

Então, no ano de 1682, o Sr. Varin e o Sr. des Hayes mediram o comprimento de um pêndulo simples vibrando em segundos no Observatório Real de Paris como 3 pés e $8\frac{5}{9}$ linhas. E pelo mesmo método na ilha de Goree, encontraram que o comprimento de um pêndulo isócrono era de 3 pés e $6\frac{5}{9}$ linhas, diferindo do anterior por duas linhas. E no mesmo ano, indo para as ilhas de Guadalupe e Martinica, encontraram que o comprimento de um pêndulo isócrono nestas ilhas era de 3 pés e $6\frac{1}{2}$ linhas.

Depois disto, o Sr. Couplet, o filho, no mês de julho, 1697, no Observatório Real de Paris, ajustou de tal forma seu relógio de pêndulo ao movimento médio do sol, que por um tempo considerável o relógio concordou com o movimento do sol. Em novembro, em seguida à sua chegada a Lisboa, verificou que seu relógio andava mais lentamente do que antes na razão de 2^m13^s em 24 horas. E em março seguinte, chegando à Paraíba, constatou que seu relógio andava mais lentamente do que em Paris na razão de 4^m12^s em 24 horas, e ele afirma que o pêndulo oscilando em segundos era mais curto em Lisboa por $2\frac{1}{2}$ linhas e na Paraíba por $3\frac{2}{3}$ linhas, do que em Paris. Ele teria feito melhor se tivesse avaliado estas diferenças em $1\frac{1}{3}$ e $2\frac{5}{9}$, pois estas diferenças correspondem às diferenças nos tempos 2^m13^s e 4^m12^s. Mas as observações deste senhor são tão grosseiras, que não podemos confiar nelas.

Nos anos seguintes, 1699 e 1700, o Sr. des Hayes, fazendo uma outra viagem para a América, determinou que nas ilhas Cayenne e Granada o comprimento do pêndulo vibrando em segundos era pouca coisa menor do que 3 pés e 6½ linhas, que na ilha de São Cristóvão era 3 pés e 6¾ linhas, e na ilha de São Domingo 3 pés e 7 linhas.

E, no ano de 1704, Feuillé, em Porto Belo na América, encontrou que o comprimento de um pêndulo oscilando em segundos era 3 pés de Paris e apenas 5 7/12 linhas, isto é, quase 3 linhas mais curto do que em Paris, mas a observação era defeituosa. Pois, indo em seguida para a ilha de Martinica, encontrou que ali o comprimento do pêndulo isócrono era de 3 pés de Paris e 5 10/12 linhas.

Agora a latitude da Paraíba é 6°38' sul; a de Porto Belo 9°33' norte, e as latitudes das ilhas Cayenne, Goree, Guadalupe, Martinica, Granada, São Cristóvão e São Domingo, são, respectivamente, 4°55', 14°40', 15°00', 14°44', 12°06', 17°19', e 19°48', norte. E os excessos do comprimento do pêndulo em Paris sobre os comprimentos dos pêndulos isócronos observados nestas latitudes são um pouco maiores do que pela tabela dos comprimentos do pêndulo computados anteriormente. E, portanto, a terra é um pouco mais alta no equador do que o valor calculado anteriormente, e um pouco mais densa no centro do que nas minas próximas à superfície, a não ser, talvez, que os calores da zona tórrida tenham aumentado um pouco o comprimento dos pêndulos.

Pois o Sr. Picard observou que uma barra de ferro, que no tempo gelado na estação de inverno tinha um pé de comprimento, quando aquecida pelo fogo, foi aumentada em um pé e ¼ linha. Também o Sr. de la Hire encontrou que uma barra de ferro, que na estação de inverno tinha 6 pés de comprimento, quando exposta ao calor do sol de verão, era estendida em 6 pés e ⅔ linhas. No primeiro caso o calor era maior do que no último, mas no último era maior do que o calor das partes externas do corpo humano, pois metais expostos ao sol de verão adquirem um grau muito considerável de calor. Mas a haste de um relógio de pêndulo nunca é exposta ao calor do sol de verão, nem jamais adquire um calor igual àquele das partes externas do corpo humano. Portanto, embora a haste de 3 pés de um relógio de pêndulo seja de fato um pouco mais longa no verão do que no inverno, a diferença chegará somente a ¼ linha. Portanto, a diferença total dos comprimentos dos pêndulos isócronos em climas diferentes não pode ser devida à diferença de calor, nem de fato aos erros dos astrônomos franceses. Pois embora não haja uma concordância perfeita entre suas observações, os erros são tão pequenos que podem ser desprezados, e nisto todos concordam, que os pêndulos isócronos são mais curtos no equador do que no Observatório

Real de Paris, por uma diferença não menor do que 1¼ linhas, nem maior do que 2⅔ linhas. Pelas observações do Sr. Richer, na ilha de Cayenne, a diferença era 1¼ linhas. Esta diferença sendo corrigida por aquelas do Sr. des Hayes, torna-se 1½ linhas ou 1¾ linhas. Pelas observações menos precisas de outros, a mesma torna-se aproximadamente 2 linhas. E este desacordo pode surgir parcialmente dos erros das observações, parcialmente das diferenças das partes internas da terra e a altura das montanhas, parcialmente das temperaturas diferentes do ar.

Considero que aqui na Inglaterra uma barra de ferro com comprimento de 3 pés é mais curta uma sexta parte de uma linha no inverno do que no verão. Devido aos grandes calores no equador, subtraia esta quantidade da diferença de 1¼ linhas observadas pelo Sr. Richer, e sobram $1\frac{1}{12}$ linhas, que concorda muito bem com as $1\frac{87}{1000}$ linhas obtidas anteriormente pela teoria. O Sr. Richer repetiu suas observações, feitas na ilha de Cayenne, toda semana por dez meses, e comparou os comprimentos do pêndulo lá anotados nas hastes de ferro com os comprimentos que observou na França. Esta atenção e cuidado parecem ter faltado aos outros observadores. Se podemos confiar nas observações deste senhor, a terra é mais alta no equador do que nos pólos, e isto por um excesso de aproximadamente 17 milhas, como mostrou antes a teoria.

Proposição XXI. Teorema XVII

Que os pontos equinociais retrocedem, e que o eixo da terra, por uma nutação em cada revolução anual, oscila duas vezes em direção a eclíptica, retornando as mesmas vezes para sua posição anterior.

A Proposição torna-se aparente pelo Corolário XX, Proposição 66, Livro I. Mas este movimento de nutação tem de ser muito pequeno e, na verdade, pouco perceptível.

Proposição XXII. Teorema XVIII

Que todos os movimentos da lua e todas as desigualdades destes movimentos, seguem dos princípios que estabelecemos.[4]

4. Apêndice, Nota 16.

Decorre da Proposição 65, Livro I, que os maiores planetas, enquanto se movem ao redor do sol, podem entrementes carregar outros planetas menores, girando ao redor deles, e que estes planetas menores têm de mover-se em elipses com seus focos nos centros dos maiores. Mas então seus movimentos serão perturbados de várias formas pela ação do sol, sofrendo eles desigualdades tais como as observadas em nossa lua. Assim nossa lua (pelos Corolários II, III, IV e V, Proposição 66, Livro I) move-se mais rapidamente e, por um raio traçado até a terra, descreve uma área maior pelo tempo e tem sua órbita menos curvada, aproximando-se, conseqüentemente, mais da terra nas sizígias do que nas quadraturas, excetuando o quanto estes efeitos são perturbados pelo movimento da excentricidade, pois (pelo Corolário IX, Proposição 66, Livro I) a excentricidade é máxima quando o apogeu da lua está nas sizígias, e menor quando o mesmo está nas quadraturas. Devido a isto, a lua no perigeu é mais rápida e se encontra mais próxima de nós mas no apogeu é mais lenta estando mais afastada de nós, nas sizígias do que nas quadraturas. Além disto, o apogeu vai para a frente, e os nós para trás, sendo isto feito não com um movimento regular, mas desigual. Pois (pelos Corolários VII e VIII, Proposição 66, Livro I) o apogeu move-se mais rapidamente para frente nas sizígias, mais lentamente para trás nas quadraturas e, pelo excesso de seu progresso sobre seu regresso, avança anualmente para frente. Mas os nós, ao contrário (pelo Corolário XI, Proposição 66, Livro I), são imóveis nas sizígias e movem-se o mais rapidamente para trás nas quadraturas. Além disto, a latitude máxima da lua (pelo Corolário X, Proposição 66, Livro I) é maior nas quadraturas da lua do que em suas sizígias. E (pelo Corolário VI, Proposição 66, Livro I) o movimento médio da lua é mais lento no periélio da terra do que em seu afélio. E estas são as principais desigualdades (da lua) observadas pelos astrônomos.

Mas há ainda outras desigualdades não observadas até agora pelos astrônomos, através das quais os movimentos da lua são tão perturbados que até o dia de hoje ainda não fomos capazes de colocá-los sob qualquer regra certa. Pois as velocidades ou movimentos horários dos apogeus e nós da lua, e suas equações, assim como a diferença entre a maior excentricidade nas sizígias e a menor excentricidade nas quadraturas, e esta desigualdade que chamamos de variação, são (pelo Corolário XIV, Proposição 66, Livro I) no curso do ano aumentadas e diminuídas como o cubo do diâmetro aparente do sol. E além disto (pelos Corolários I e II, Lema 10, e Corolário XVI, Proposição 66, Livro I) a variação é aumentada e diminuída quase como o quadrado do tempo entre as quadraturas. Mas, em cálculos astronômicos, esta desigualdade é usualmente juntada e combinada com a equação do centro da lua.

Proposição XXIII. Problema V

Derivar os movimentos desiguais dos satélites de Júpiter e de Saturno a partir dos movimentos de nossa lua.

A partir dos movimentos de nossa lua deduzimos os movimentos correspondentes das luas ou satélites de Júpiter, pelo Corolário XVI, Proposição 66, Livro I. O movimento médio dos nós do satélite mais externo de Júpiter está para o movimento médio dos nós de nossa lua numa proporção composta da razão ao quadrado dos tempos periódicos da terra ao redor do sol para os tempos periódicos de Júpiter ao redor do sol, e da razão simples do tempo periódico do satélite ao redor de Júpiter para o tempo periódico de nossa lua ao redor da terra. Portanto, estes nós, no espaço de cem anos, são levados 8º24' para trás ou para frente. Os movimentos médios dos nós dos satélites internos estão para o movimento médio dos nós do satélite mais externo assim como seus tempos periódicos estão para o tempo periódico destes, pelo mesmo Corolário, e assim estão dados. E o movimento para frente da apside de cada satélite está para o movimento retrógrado de seus nós assim como o movimento do apogeu de nossa lua para o movimento de seus nós (pelo mesmo Corolário), e assim está dado. Mas os movimentos dos apsides assim encontrados têm de ser diminuídos na proporção de 5 para 9, ou de aproximadamente 1 para 2, devido a uma causa que não posso parar aqui para explicar. As maiores equações dos nós e do apside de cada satélite, estão para as maiores equações dos nós e apogeu de nossa lua respectivamente, como os movimentos dos nós e apsides dos satélites, no tempo de uma revolução das equações anteriores, para os movimentos dos nós e apogeu de nossa lua, no tempo de uma revolução das últimas equações. A variação de um satélite vista de Júpiter está para a variação de nossa lua na mesma proporção que os movimentos completos de seus nós respectivamente durante os tempos em que os satélites e nossa lua (após afastar-se) giram (novamente) para o sol, pelo mesmo Corolário. Portanto no satélite mais externo[5] a variação não excede $5^{s}12^{ter}$.

Proposição XXIV. Teorema XIX

Que o fluxo e refluxo do mar surge das ações do sol e da lua.

5. Apêndice, Nota 17.

Pelos Corolários XIX e XX, Proposição 66, Livro I, decorre que as águas do mar têm de subir duas vezes e descer duas vezes a cada dia, tanto lunar quanto solar, e que a maior altura das águas nos mares abertos e profundos deve seguir a aproximação dos astros ao meridiano do lugar por um intervalo menor do que seis horas, como acontece em toda a região oriental dos oceanos Atlântico e Etiópico entre a França e o Cabo da Boa Esperança, e nas costas do Chile e do Peru no mar do sul, em cujas praias a maré cheia diminui ao redor da segunda, terceira ou quarta hora, a não ser onde o movimento propagado do oceano profundo é retardado pela falta de profundidade dos canais, através dos quais ele passa para alguns lugares particulares, à quinta, sexta ou sétima hora, e mesmo mais tarde. Conto as horas a partir da aproximação de cada astro ao meridiano do lugar, tanto abaixo quanto acima do horizonte, e entendo as horas do dia lunar as 24 partes do tempo que a lua, por seu movimento diurno aparente, gasta para voltar ao meridiano do lugar que deixou no dia anterior. A força do sol ou da lua em subir o mar é maior na aproximação do astro ao meridiano do lugar, mas a força impressa ao mar neste momento continua um pouco após a impressão, sendo depois aumentada por uma força nova, embora menor, ainda atuando sobre ele. Isto faz com que o mar suba cada vez mais alto até atingir sua maior altura quando esta nova força fica muito fraca para subi-lo mais. E isto acontecerá, talvez, em uma ou duas horas, porém mais freqüentemente próximo das praias em aproximadamente três horas, ou mesmo mais, onde o mar é raso.

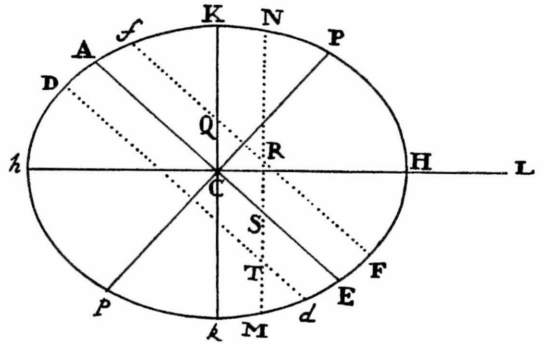
Os dois astros excitam dois movimentos, que não aparecem separadamente, mas entre eles surgirá um movimento misturado composto de ambos. Na conjunção ou oposição dos astros suas forças associam-se, fazendo a maré mais alta e mais baixa. Nas quadraturas o sol vai subir as águas que a lua abaixa, e vai abaixar as águas que a lua sobe, e a partir da diferença de suas forças surge a menor de todas as marés. E já que (como nos diz a *experiência*) a força da lua é maior do que a do sol, a maior altura das águas ocorrerá ao redor da terceira hora lunar. A partir das sizígias e quadraturas, a maior maré, que pela força única da lua tinha de ocorrer na terceira hora lunar, e pela força única do sol na terceira hora solar, ocorrerá pelas forças compostas de ambos num tempo intermediário que se aproxima mais da terceira hora da lua do que da do sol. E, portanto, enquanto a lua está passando das sizígias para as quadraturas, sendo que durante este tempo a terceira hora do sol precede a terceira hora da lua, a maior altura das águas também vai preceder a terceira hora da lua, e isto, pelo maior intervalo, um pouco após os octantes da lua. E por intervalos similares a maior maré se-

guirá a terceira hora lunar, enquanto a lua está passando das quadraturas para as sizígias. Assim acontece no mar aberto, pois nas desembocaduras dos rios as maiores marés atingem mais tarde as suas alturas.

Mas os efeitos dos astros dependem de suas distâncias à terra, pois quando eles estão menos distantes, seus efeitos são maiores, e quando mais distantes, seus efeitos são menores, e isto como o cubo de seus diâmetros aparentes. É devido a isto que o sol, no inverno, estando então em seu perigeu, tem um efeito maior, e torna as marés nas sizígias um pouco maiores, e aquelas nas quadraturas pouco menores do que no verão. E todo mês a lua, enquanto no perigeu, gera marés maiores do que a quinze dias antes ou depois, quando ela está em seu apogeu. A isto se deve que duas marés mais altas não seguem uma à outra em duas sizígias que se sucedem imediatamente.

O efeito de cada astro depende da mesma forma de sua declinação ou distância ao equador, pois se o astro fosse colocado no pólo, ele atrairia constantemente todas as partes das águas sem qualquer intensificação ou diminuição de sua ação, e não poderia causar alternação de movimento. E, portanto, à medida em que os astros declinam do equador em direção a qualquer pólo eles gradualmente perdem sua força, e devido a isto vão excitar marés menores nas sizígias de solstício do que nas de equinócio. Mas nas quadraturas de solstício eles vão gerar marés maiores do que nas quadraturas ao redor dos equinócios, já que a força da lua, então situada no equador, excede mais do que nunca a força do sol. Portanto, as maiores marés ocorrem nestas sizígias, e as menores nestas quadraturas, que acontecem ao redor do tempo de ambos equinócios, e a maior maré nas sizígias é sempre seguida pela menor maré nas quadraturas, como obtemos por experiência. Mas, como o sol é menos distante da terra no inverno do que no verão, ocorre que as maiores e menores marés aparecem mais freqüentemente antes do que depois do equinócio de verão, e mais freqüentemente após do que antes do equinócio de outono.

Além disto, os efeitos dos astros dependem das latitudes dos lugares. Seja A*p*EP a terra coberta com águas profundas, C seu centro, P e *p* seus pólos, AE o equador, F qualquer lugar fora do equador, F*f* a paralela do lugar, D*d* a paralela correspondente no outro lado do equador, L o lugar da lua três horas antes, H o lugar da terra diretamente abaixo dela, *h* o lugar oposto, K e *k* os lugares a 90 graus de distância, CH e C*h* as maiores alturas do mar a partir do centro da terra, CK e C*k* suas alturas mínimas. Se for descrita uma elipse com os eixos H*h* e K*k*, e pela revolução desta elipse ao redor de seu eixo mais longo H*h* for formado um esferóide HPK*hpk*, este esferóide vai representar aproximadamente a forma do mar, e CF, C*f*, CD e



Cd vão representar as alturas do mar nos lugares *Ff* e D*d*. Mas além disto, na dita revolução da elipse qualquer ponto N percorre o círculo NM cortando as paralelas F*f* e D*d*, em quaisquer lugares RT, e o equador AE em S, CN vai representar a altura do mar em todos estes lugares R, S e T situados neste círculo. Portanto, na revolução diurna de qualquer lugar F, a maior maré será em F, na terceira hora após o apulso da lua ao meridiano acima do horizonte, e após isto a maré mais baixa em Q, na terceira hora após o ocaso da lua, e então a maior maré em *f*, na terceira hora após o apulso da lua no meridiano sob o horizonte e, finalmente, a maré mais baixa em Q, na terceira hora após o surgimento da lua, e a última maré cheia em *f* será menor do que a maré cheia precedente em F. Pois todo o mar é dividido em duas marés cheias hemisféricas, uma no hemisfério KH*k* no lado norte, a outra no hemisfério oposto K*hk*, que podemos portanto chamar de marés cheias do norte e do sul. Estas marés, sendo sempre opostas entre si, chegam alternadamente aos meridianos de todos os lugares após um intervalo de doze horas lunares. E como os países do norte participam mais das marés cheias no norte, e os países do sul mais das marés cheias do sul, ocorrem marés, alternadamente maiores e menores em todos os lugares fora do equador, nos quais os astros nascem e se põem. Mas a maior maré surgirá quando a lua se põe em direção ao zênite do lugar, ao redor da terceira hora após o apulso da lua ao meridiano acima do horizonte, e quando a lua muda sua declinação *ao outro lado do equador*, aquela que foi a maior maré passará a ser a menor. E a maior diferença das marés cheias vai ocorrer ao redor dos tempos dos solstícios, especialmente se o nó ascendente da lua se aproxima do primeiro de Áries. Assim, verifica-se pela experiência que as marés matutinas no inverno excedem aquelas da noite, e que as marés noturnas no verão excedem aquelas da manhã, em Plymouth pela altura de um pé, mas em Bristol pela altura de quinze polegadas, de acordo com as observações de Colepress e Sturmy.

Mas os movimentos que estamos descrevendo sofrem alguma alteração da força de reciprocação[6], pela qual as águas, sendo movidas, mantêm um pouco este movimento *por sua inércia*. Disto vem que as marés podem continuar por algum tempo, embora as ações dos astros já tenham cessado. Este poder de reter o movimento impresso diminui a diferença das marés alternadas, e torna maiores as marés que sucedem imediatamente após as sizígias, e menores aquelas que seguem depois após as quadraturas. É por isto que as marés alternadas em Plymouth e Bristol não diferem muito mais uma da outra do que pela altura de um pé ou quinze polegadas, e que as maiores marés nestes portos não são as primeiras, mas as terceiras após as sizígias. E, além disto, todos os movimentos são retardados em sua passagem através de canais rasos, de forma que as maiores marés de todas, em alguns estreitos e desembocaduras de rios, são as quartas ou mesmo as quintas após as sizígias.

Ademais, pode acontecer de a maré ser propagada a partir do oceano através de canais diferentes em direção ao mesmo porto, e pode atravessar mais rapidamente através de alguns canais do que de outros. Neste caso a mesma maré, dividida em duas ou mais sucedendo-se uma à outra, pode compor novos movimentos de tipos diferentes. Vamos supor duas marés iguais fluindo em direção ao mesmo porto de lugares diferentes, uma precedendo a outra por seis horas e suponha que a primeira maré ocorre na terceira hora da aproximação da lua ao meridiano do porto. Se a lua no momento da aproximação do meridiano estava no equador, a cada seis horas alternadamente surgiriam marés cheias iguais, que, encontrando-se com tantas marés baixas iguais, iriam contrabalançar uma à outra de forma que naquele dia a água estagnaria e ficaria calma. Caso então a lua declinasse do equador, as marés no oceano seriam alternadamente maiores e menores, como foi dito, sendo que duas marés maiores e duas menores seriam propagadas alternadamente através do porto. Mas as duas marés cheias maiores fariam com que a maior altura das águas acontecesse no tempo médio entre ambas, e as marés cheias maiores e menores fariam com que a água subisse a uma altura média no tempo intermediário entre elas, e no tempo médio entre as duas marés cheias menores as águas subiriam para sua altura mínima. Assim no espaço de vinte e quatro horas as águas atingiriam, não duas vezes como usualmente, mas apenas uma vez a altura maior, e apenas uma vez sua altura menor, e sua altura maior, se a lua se pusesse em direção ao pólo elevado, ocorreria na sexta ou trigésima hora após a aproximação da

6. Apêndice, Nota 18.

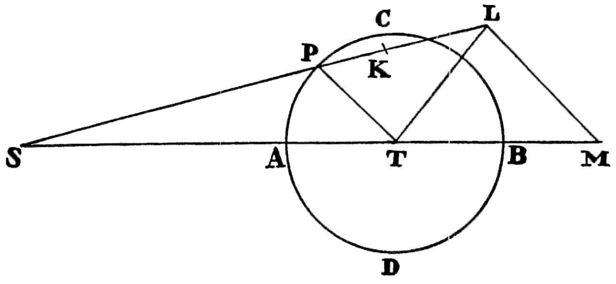
lua ao meridiano, e quando a lua mudasse sua declinação, esta maré cheia seria transformada numa maré baixa. O Dr. Halley nos deu um exemplo disto a partir das observações dos marinheiros no porto de Batshaw, no reino de Tunquin, latitude de 20°50' norte. Neste porto, no dia que se segue após a passagem da lua pelo equador, as águas param. Quando a lua declina para o norte, elas começam a subir e a descer, não duas vezes, como nos outros portos, mas apenas uma vez a cada dia. A maré cheia ocorre quando a lua se põe e a maré mais baixa quando a lua nasce. Esta maré aumenta com a declinação da lua até o sétimo ou oitavo dia, então nos sete ou oito dias seguintes ela diminui na mesma razão que tinha aumentado, e cessa quando a lua muda sua declinação, cruzando o meridiano para o sul. Após isto a maré cheia é transformada imediatamente numa maré baixa. Daí para a frente a maré baixa acontece quando a lua se põe e a maré alta no nascimento da lua, até que a lua, passando novamente pelo equador, muda sua declinação. Há duas entradas para este porto e para os canais vizinhos, uma a partir dos mares da China, entre o continente e a ilha de Leuconia, a outra do Oceano Índico, entre o continente e a ilha de Borneo. Mas deixo para ser determinado a partir das observações nas praias vizinhas se há realmente duas marés propagadas através destes canais, uma a partir do Oceano Índico no espaço de doze horas, e uma a partir do mar da China no espaço de seis horas, as quais acontecendo portanto na terceira e na nona horas lunares, ao se comporem, produzem estes movimentos, ou se há quaisquer outras circunstâncias no estado destes mares.

Expliquei assim as causas dos movimentos da lua e do mar. Convém agora acrescentar algo no que concerne à grandeza destes movimentos.

Proposição XXV. Problema VI

Descobrir as forças com que o sol perturba os movimentos da lua.

Seja S o sol, T a terra, P a lua e CADB a órbita da lua. Tome SK igual a ST em SP, e esteja SL para SK como o quadrado de SK para SP. Trace LM paralela a PT e se supomos ST ou SK como a força acelerada da gravidade da terra em direção ao sol, SL vai representar a força acelerativa da gravidade da lua em direção ao sol. Mas esta força é composta das partes SM e LM, das quais a força LM, e aquela parte de SM que é representada por TM, perturbam o movimento da lua, como mostramos na Proposição 66, Livro I, e seus Corolários. Uma vez que a terra e a lua giram ao redor de seu centro

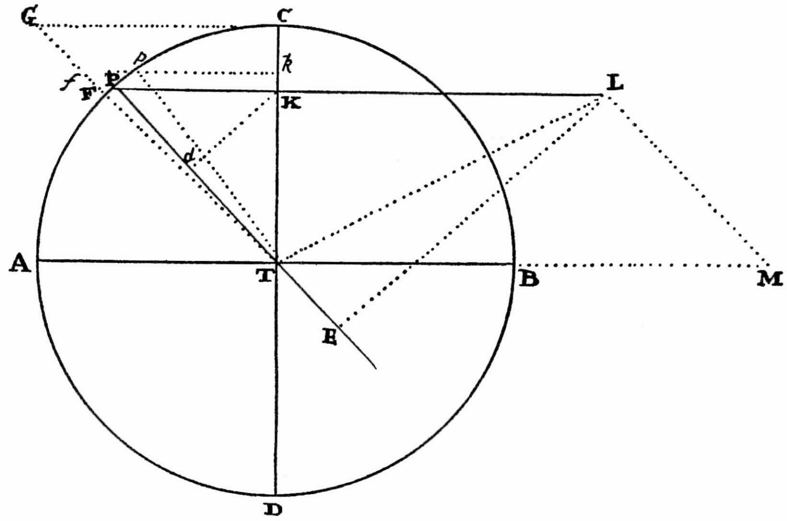


comum de gravidade, o movimento da terra ao redor deste centro também será perturbado por forças semelhantes, mas podemos considerar as somas tanto das forças quanto dos movimentos como na lua, e representar a soma das forças pelas linhas TM e ML, que são análogas a ambas. A força ML (em seu valor médio) está para a força centrípeta pela qual a lua pode ser mantida em sua órbita girando ao redor da terra em repouso, na distância PT, assim como o quadrado da razão do tempo periódico da lua ao redor da terra para o tempo periódico da terra ao redor do sol (pelo Corolário XVII, Proposição 66, Livro I), isto é, como o quadrado de $27^d7^h43^m$ para $365^d6^h9^m$, ou como 1000 para 178725, ou como 1 para $178\frac{29}{40}$. Mas na Proposição 4 deste livro encontramos que, se tanto a terra quanto a lua girassem ao redor de seu centro comum de gravidade, a distância média de um para o outro seria aproximadamente $60\frac{1}{2}$ semidiâmetros médios da terra, e a força com que a lua pode ser mantida girando em sua órbita ao redor da terra em repouso à distância PT de $60\frac{1}{2}$ semidiâmetros da terra, está para a força com que ela pode girar no mesmo tempo, à distância de 60 semidiâmetros, assim como $60\frac{1}{2}$ está para 60, e esta força está para a força da gravidade conosco muito aproximadamente como 1 está para 60.60. Portanto, a força média ML está para a força da gravidade na superfície de nossa terra assim como $1.60\frac{1}{2}$ está para $60.60.60.178\frac{29}{40}$, ou como 1 para 638092,6. Portanto, pela proporção das linhas TM e ML, também é dada a força TM. E estas são as forças com que o sol perturba os movimentos da lua. Q.E.I.

Proposição XXVI. Problema VII

Descobrir o aumento horário da área que a lua descreve numa órbita circular, a partir de um raio traçado até a terra.

Mostramos acima que a área que a lua descreve por um raio traçado até a terra é proporcional ao tempo de percurso, a não ser que a lua seja per-



turbada pela ação do sol. Aqui nos propomos a investigar a desigualdade do momento, ou aumento horário *desta área ou movimento assim perturbado.* Para tornar nossos cálculos mais fáceis, vamos supor ser a órbita da lua circular, e desprezaremos todas as desigualdades exceto aquela única que está sendo investigada agora. Devido à distância imensa do sol, vamos supor além disto que as linhas SP e ST são paralelas. Logo, a força LM será sempre reduzida a seu valor médio TP, assim como a força TM para seu valor médio 3PK. Estas forças (pelo Corolário II das Leis do Movimento) compõem a força TL e esta força, ao incidir a perpendicular LE sobre o raio TP, é resolvida nas forças TE e EL, das quais a força TE, agindo constantemente na direção do raio TP, nem acelera nem retarda a descrição da área TPC feita pelo raio TP, mas EL, *agindo sobre o raio* TP numa direção perpendicular, acelera ou retarda *a descrição da área* na medida em que ela acelera ou retarda a lua. Esta aceleração da lua, em sua passagem da quadratura C para a conjunção A, está em cada momento do tempo assim como a força acelerativa *geratriz* EL, isto é, como $\frac{3PK \cdot TK}{TP}$. Seja o tempo representado pelo movimento médio da lua, ou (o que dá no mesmo) pelo ângulo CTP, ou mesmo pelo arco CP. Em ângulos retos sobre CT trace CG igual a CT e, supondo o arco do quadrante AC dividido num número infinito de partes iguais P*p*, etc., estas *partes* podem representar o número *infinito* similar de partes iguais do tempo. Incida *pk* perpendicular sobre CT, e trace TG encontrando com KP e *kp* prolongadas em F e *f*. Então FK será igual a TK, e K*k* estará para PK assim como P*p* está para T*p*, isto é, numa proporção dada. Portanto FK.K*k*, ou a área FK*kf*, será como

$\frac{3PK \cdot TK}{TP}$, isto é, como EL. E, por combinação, a área total GCKF irá variar como a soma de todas as forças EL impressas sobre a lua no tempo total CP e, portanto, também como a velocidade gerada por esta soma, isto é, como a aceleração da descrição da área CTP, ou como o incremento do seu momento. A força com que a lua pode ser mantida girando ao redor da terra em repouso à distância TP no seu tempo periódico CADB de $27^{d}7^{h}43^{m}$, faria com que um corpo caindo no tempo CT percorresse o comprimento ½CT, e no mesmo tempo adquirisse uma velocidade igual àquela com que a lua move-se em sua órbita. Isto decorre do Corolário IX, Proposição 4, Livro I. Mas como K*d*, traçado perpendicular sobre TP, é *apenas* uma terça parte de EL, e *igual* a metade de TP, ou ML nos octantes, a força EL nos octantes, onde ela é maior, vai exceder a força ML na razão de 3 para 2. Portanto, estará para esta força com que a lua em seu tempo periódico pode ser mantida girando ao redor da terra em repouso assim como 100 está para ⅔.17872½, ou 11915, e no tempo CT vai gerar uma velocidade igual a $\frac{100}{11\,915}$ partes da velocidade da lua, mas no tempo CPA vai gerar uma velocidade maior na proporção de CA para CT ou TP. Represente a maior força EL nos octantes pela área FK.K*k*, ou pelo retângulo ½TP.P*p*, que é igual a ela, e a velocidade que a maior força pode gerar em qualquer tempo CP estará para a velocidade que qualquer outra força menor EL pode gerar no mesmo tempo assim como o retângulo ½TP.CP está para a área KCGF. Mas as velocidades geradas no tempo total CPA estarão uma para a outra assim como o retângulo ½TP.CA está para o triângulo TCG, ou como o arco do quadrante CA está para o raio TP. Portanto, a última velocidade gerada no tempo total será $\frac{100}{11\,915}$ partes da velocidade da lua. A esta velocidade da lua, que é proporcional ao momento médio da área (supondo este momento médio ser representado pelo número 11 915), adicionamos e subtraímos a metade da outra velocidade, a soma 11 915 + 50, ou 11 965, representará o maior momento da área na sizígia A, e a diferença 11 915 - 50, ou 11 865, o menor momento dela nas quadraturas. Portanto as áreas que são descritas em tempos iguais nas sizígias e quadraturas estão uma para a outra como 11 965 está para 11 865. E se ao momento menor 11865 adicionamos um momento que estará para 100, a diferença destes últimos momentos, assim como o trapézio FKCG está para o triângulo TCG, ou, o que dá no mesmo, como o quadrado do seno PK está para o quadrado do raio TP (isto é, como P*d* para TP), a soma vai representar o momento da área quando a lua está em qualquer lugar intermediário P.

Mas estas coisas acontecem apenas na hipótese de o sol e a terra estarem em repouso, e que a revolução sinódica da lua esteja terminada em $27^{d}7^{h}43^{m}$. Mas como o período sinódico da lua é realmente $29^{d}12^{h}44^{m}$, os aumentos dos momentos devem ser aumentados na mesma proporção que o tempo, isto é, na proporção de 1 080 853 para 1 000 000. Desta forma, o aumento total, que era $\frac{100}{11\,915}$ partes do momento médio, será agora $\frac{100}{11\,023}$ partes dele. Portanto, o momento da área na quadratura da lua estará para o momento dela na sizígia assim como 11023 - 50 para 11023 + 50, ou como 10973 para 11073, e para o momento dela, quando a lua está em qualquer lugar intermediário P, como 10 973 para 10973 + Pd, supondo TP = 100.

A área, portanto, que a lua descreve nas várias pequenas partes iguais de tempo, por um raio traçado até a terra, é aproximadamente como a soma do número 219,46, e o seno verso do dobro da distância da lua a partir da quadratura mais próxima, considerada num círculo que tem a unidade por seu raio. Assim ocorre quando a variação nos octantes está em sua quantidade média. Mas se a variação neles é maior ou menor, o seno verso deve ser aumentado ou diminuído na mesma proporção.

Proposição XXVII. Problema VIII

A partir do movimento horário da lua descobrir sua distância da terra.

A área que a lua descreve em cada momento de tempo, por um raio traçado até a terra, é conjuntamente como o movimento horário da lua e o quadrado da distância da lua até a terra. Logo, a distância da lua até a terra varia diretamente como a raiz quadrada da área e inversamente como a raiz quadrada do movimento horário, tomados conjuntamente. Q.E.I.

Corolário I – Portanto, está dado o diâmetro aparente da lua, pois ele é inversamente como a distância da lua até a terra. Que os astrônomos tentem observar quão precisamente esta regra concorda com os fenômenos.

Corolário II – Também a órbita da lua pode ser definida mais exatamente a partir dos fenômenos do que se pôde fazer até o momento.

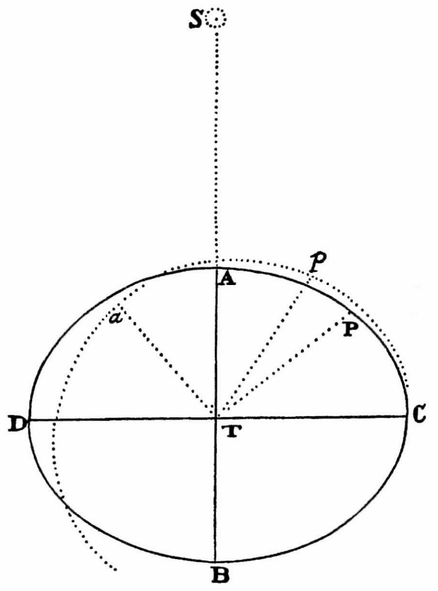
Proposição XXVIII. Problema IX

Descobrir os diâmetros da órbita em que a lua se moveria sem excentricidade.

A curvatura da órbita que um corpo descreve, se atraído em linhas perpendiculares à órbita, é diretamente proporcional à força de atração e inversamente ao quadrado da velocidade. Estimo as curvaturas das linhas, comparadas umas com as outras de acordo com a razão evanescente dos senos ou tangentes de seus ângulos de contato para raios iguais[7], supondo estes raios sendo diminuídos infinitamente. Mas a atração da lua em direção à terra nas sizígias é o excesso de sua gravidade em direção à terra acima da força do sol 2PK (ver Fig., Proposição 25), por cuja força a gravidade acelerativa da lua em direção ao sol excede a gravidade acelerativa da terra em direção ao sol ou é superada por ela. Mas nas quadraturas esta atração é a soma da gravidade da lua em direção à terra, e a força do sol KT, pela qual a lua é atraída em direção à terra. E estas atrações, substituindo N por $\frac{AT + CT}{2}$, são aproximadamente como $\frac{178\,725}{AT^2} - \frac{2\,000}{CT \cdot N}$ e $\frac{178\,725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \cdot N}$, ou como $178\,725N \cdot CT^2 - 2000AT^2 \cdot CT$, e $178725N \cdot AT^2 + 1000CT^2 \cdot AT$. Pois se a gravidade acelerativa da lua em direção à terra for representada pelo número 178 725, a força média ML, que nas quadraturas é PT ou TK, e desloca a lua em direção à terra, será 1000, e a força média TM nas sizígias será 3000. Logo, se subtraímos a força média ML, resta 2000, a força com que a lua é puxada para a terra nas sizígias, e que chamamos acima 2PK. Mas a velocidade da lua nas sizígias A e B está para sua velocidade nas quadraturas C e D assim como CT está para AT, e, conjuntamente, como o momento da área que a lua descreve nas sizígias a partir de um raio traçado até a terra está para o momento desta área *descrita* nas quadraturas, isto é, como 11073CT está para 10973AT. Tome o quadrado desta razão inversamente, e a razão anterior diretamente, e a curvatura da órbita da lua nas sizígias estará para sua curvatura nas quadraturas assim como $120406729 \cdot 178725AT^2 \cdot CT^2 \cdot N - 120406729 \cdot 2000AT^4 \cdot CT$ está para $122611329 \cdot 178725AT^2 \cdot CT^2 \cdot N + 122611329 \cdot 1000CT^4 \cdot AT$, isto é, como $2151969AT \cdot CT \cdot N - 24081AT^3$ está para $2191371AT \cdot CT \cdot N + 12261CT^3$.

Como a forma da órbita da lua é desconhecida, considere-se, em seu lugar, a elipse DBCA, no centro da qual supomos estar situada a terra, e o

7. Apêndice, Nota 19.



maior eixo DC estar entre as quadraturas assim como o menor AB entre as sizígias. Mas, como o plano desta elipse é girado ao redor da terra por um movimento angular, e a órbita, cuja curvatura examinamos agora, deve ser descrita num plano sem estes movimentos, devemos considerar a forma que a lua descreve neste plano enquanto é girada nesta elipse, isto é, a figura C*pa*, cujos vários pontos *p* são encontrados assumindo qualquer ponto P na elipse, que pode representar o lugar da lua, e traçando T*p* igual a TP de maneira que o ângulo PT*p* possa ser igual ao movimento aparente do sol a partir do momento da última quadratura em C, ou (o que dá no mesmo) que o ângulo CT*p* possa estar para o ângulo CTP assim como o tempo da revolução sinódica da lua está para o tempo da revolução periódica dela, ou como $29^d12^h44^m$ está para $27^d7^h43^m$. Se, portanto, tomamos nesta proporção o ângulo CT*a* para o ângulo reto CTA, e fazemos T*a* com um comprimento igual a TA, teremos *a* como o apside inferior e C como o apside superior desta órbita C*pa*. Mas, por cálculo, encontro que a diferença entre a curvatura desta órbita C*pa* no vértice *a*, e a curvatura de um círculo descrito ao redor do centro T com o intervalo TA, está para a diferença entre a curvatura da elipse no vértice A, e a curvatura do mesmo círculo, assim como o quadrado da razão do ângulo CTP para o ângulo CT*p*, e que a curvatura da elipse em A está para a curvatura deste círculo assim como o quadrado da razão de TA está para TC, e a curvatura deste círculo está para a curvatura de um círculo descrito ao redor do centro T com o raio TC assim como TC está para TA. Por sua vez, a curvatura deste *último arco* está para a curvatura da elipse em C

assim como o quadrado da razão de TA está para TC, e a diferença entre a curvatura da elipse no vértice C, e a curvatura deste último círculo, está para a diferença entre a curvatura da figura T*pa*, no vértice C, e a curvatura deste mesmo *último* círculo, assim como o quadrado da razão do ângulo CT*p* para o ângulo CTP. Todas estas relações são facilmente derivadas dos senos dos ângulos de contato, e das diferenças destes ângulos. Mas, ao comparar estas razões, encontramos a curvatura da figura C*pa* em *a* estar para sua curvatura em C assim como $AT^3 - \frac{16824}{100000} CT^2 xAT$ está para $CT^3 + \frac{16824}{100000} AT^2 xCT$, em que o número $\frac{16824}{100000}$ representa a diferença dos quadrados dos ângulos CTP e CT*p*, dividida pelo quadrado do ângulo menor CTP, ou (o que é a mesma coisa) a diferença dos quadrados dos tempos $27^d 7^h 43^m$ e $29^d 12^h 44^m$ dividida pelo quadrado do tempo $27^d 7^h 43^m$.

Como, portanto, *a* representa a sizígia da lua, e C sua quadratura, a razão encontrada agora deve ser a mesma que a razão da curvatura da órbita da lua nas sizígias para sua curvatura nas quadraturas, encontrada acima. Portanto, para encontrar a razão de CT para AT, multipliquemos os extremos e as médias da proporção resultante e os termos que aparecem, divididos por AT.CT, produzem a equação seguinte: $2062{,}79CT^4 - 2151969N.CT^3 + 368676N.AT.CT^2 + 36342AT^2.CT^2 - 362047N.AT^2.CT + 2191371N.AT^3 + 4051{,}4AT^4 = 0$. Agora, se por metade da soma N dos termos AT e CT colocamos 1, e *x* por metade de sua diferença, então CT será = 1 + *x*. E substituindo estes valores na equação encontramos, após resolvê-la, *x* = 0,00719, logo, o semidiâmetro CT = 1,00719, e o semidiâmetro AT = 0,99281, números estes que são aproximadamente como $70\frac{1}{24}$ e $69\frac{1}{24}$. Portanto, a distância da lua à terra nas sizígias está para sua distância nas quadraturas (deixando de lado a questão da excentricidade) como $69\frac{1}{24}$ para $70\frac{1}{24}$, ou, em números redondos, como 69 para 70.

Proposição XXIX. Problema X

Descobrir a variação da lua.

Esta desigualdade é devida parcialmente à forma elíptica da órbita da lua e parcialmente à desigualdade dos momentos da área que a lua descreve por um raio traçado até a terra. Se a lua P girasse na elipse DBCA ao redor da terra parada no centro da elipse, e por um raio TP traçado até a

terra descrevesse a área CTP, proporcional ao tempo *de percurso*, e o maior semidiâmetro CT da elipse estivesse para o menor TA assim como 70 está para 69, a tangente do ângulo CTP estaria para a tangente do ângulo do movimento médio, calculado a partir da quadratura C, assim como o semidiâmetro TA da elipse está para o semidiâmetro TC, ou como 69 para 70. Mas a descrição da área CTP à medida que a lua avança da quadratura para a sizígia, deve estar acelerada de maneira que o momento da área na sizígia da lua possa estar para seu momento na quadratura assim como 11073 para 10973, e que o excesso do momento em qualquer lugar intermediário P acima do momento na quadratura possa estar como o quadrado do seno do ângulo CTP, o que podemos conseguir com precisão suficiente se diminuímos a tangente do ângulo CTP na razão obtida da raiz quadrada da razão do número 10973 para o número 11073, isto é, na razão do número 68,6877 para o número 69. Logo, a tangente do ângulo CTP estará agora para a tangente do movimento médio assim como 68,6877 está para 70, e o ângulo CTP nos octantes, onde o movimento médio é 45°, será 44°27'28", que subtraído de 45°, o ângulo do movimento médio, deixa como a maior variação 32'32". Isto aconteceria se a lua, ao passar da quadratura para a sizígia, descrevesse um ângulo CTA de apenas 90°. Mas devido ao movimento da terra, pelo qual o sol é aparentemente deslocado para frente, a lua, antes que ela ultrapasse o sol, descreve um ângulo CT*a*, maior do que um ângulo reto, na razão do tempo da revolução sinódica da lua para o tempo de sua revolução periódica, isto é, na razão de $29^d12^h44^m$ para $27^d7^h43^m$. Portanto, acontece que todos os ângulos ao redor do centro T são dilatados na mesma razão, e a maior variação, que de outra forma seria *apenas* 32'32", torna-se agora, aumentada na proporção mencionada, 35'10".

E esta é a grandeza da distância média do sol até a terra, desprezando-se as diferenças que podem surgir da curvatura da órbita maior, e a ação mais forte do sol sob a lua quando está nova e com auréola, do que quando está gibosa e cheia. Em outras distâncias do sol para a terra, a maior variação ocorre numa razão composta, diretamente do quadrado da razão do tempo da revolução sinódica da lua (sendo dado o tempo do ano), e inversamente como o cubo da razão da distância do sol até a terra. E, portanto, no apogeu do sol, a maior variação é 33'14", e em seu perigeu 37'11", se a excentricidade do sol está para o semidiâmetro transverso da grande órbita assim como $16\frac{15}{16}$ para 1000.

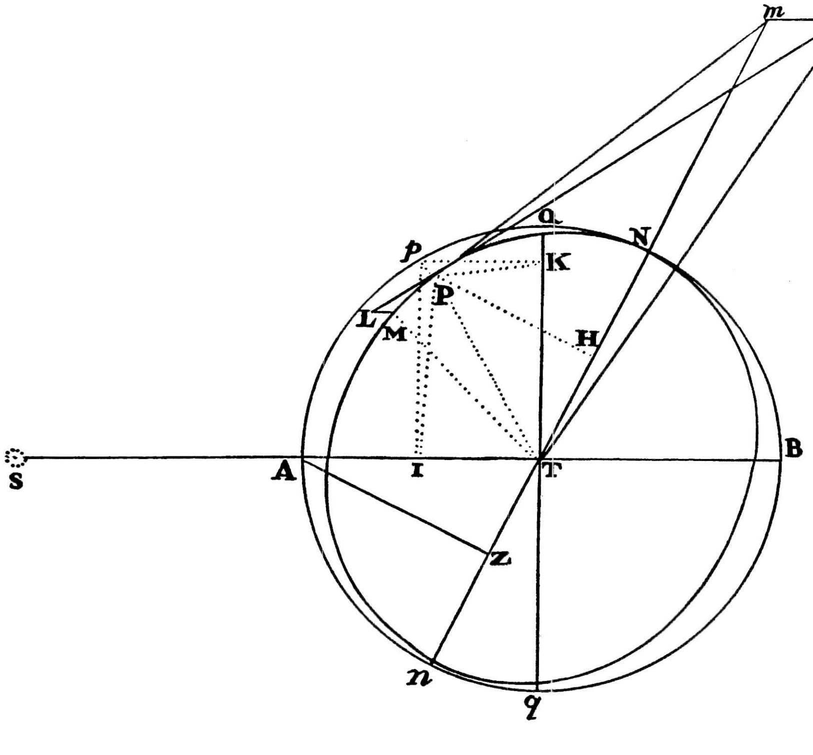
Até aqui investigamos a variação numa órbita não excêntrica, na qual a lua em seus octantes está sempre a uma distância média da terra. Se a lua, devido à sua excentricidade, é mais ou menos afastada da terra do que se

colocada nesta órbita, a variação pode ser alguma coisa maior, ou alguma coisa menor, do que de acordo com esta regra. Mas deixo o excesso ou falta para a determinação dos astrônomos a partir dos fenômenos.

Proposição XXX. Problema XI

Descobrir o movimento horário dos nós da lua numa órbita circular.

Seja S o sol, T a terra, P a lua, NP*n* a órbita da lua, N*pn* a projeção ortográfica da órbita sobre o plano da eclíptica, N e *n* os nós, *n*TN*m* a linha dos nós prolongada indefinidamente, PI e PK perpendiculares sobre as linhas ST e Q*q*, P*p* uma perpendicular sobre o plano da eclíptica, A e B as sizígias da lua no plano da eclíptica, AZ uma perpendicular incidindo sobre N*n*, a linha dos nós, Q e *q* as quadraturas da lua no plano da eclíptica, e *p*K uma perpendicular sobre a linha Q*q* situada entre as quadraturas. A força do sol para perturbar o movimento da lua (pela Proposição 25) é dupla, uma proporcional à linha LM, a outra à linha MT, no esquema daquela Proposição, e a lua pela força anterior é puxada em direção à terra, pela última em direção ao sol, numa direção paralela à linha reta ST ligando a terra ao sol.



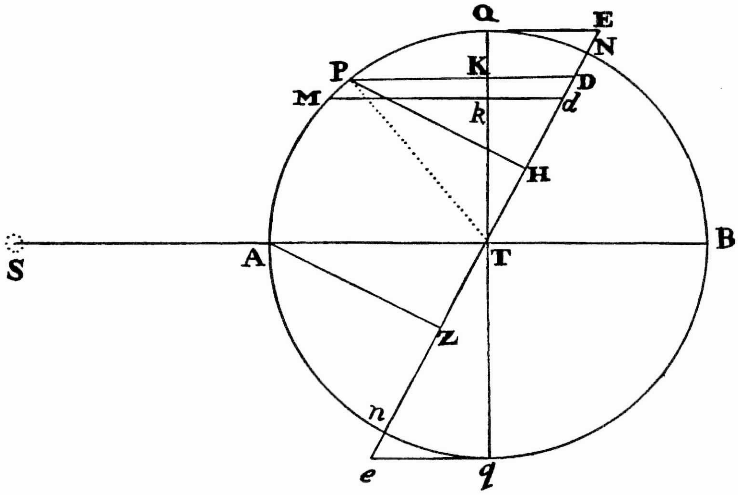
A primeira força LM age na direção do plano da órbita da lua, e portanto, não modifica sua situação, devendo ser desprezada; a segunda força MT, pela qual o plano da órbita da lua é perturbado, é a mesma que a força 3PK ou 3IT. E esta força (pela Proposição 25) está para a força com a qual a lua pode girar uniformemente num círculo ao redor da terra em repouso, em seus tempos periódicos, assim como 3IT está para o raio do círculo multiplicado pelo número 178,725, ou como IT para seu raio multiplicado por 59,575. Mas neste cálculo, e em todos que seguem, considero todas as linhas traçadas da lua ao sol como paralelas à linha que une a terra ao sol, já que qualquer inclinação que exista tanto diminui todos os efeitos em alguns casos quanto os aumenta em outros. Estamos investigando agora os movimentos médios dos nós, desprezando tais sutilezas como sem importância, pois servem apenas para tornar os cálculos mais complicados.

Agora suponha que PM represente um arco que a lua descreve no menor intervalo de tempo, e ML uma linha pequena, metade da qual a lua descreveria no mesmo tempo pelo impulso da força mencionada 3IT, e ligando PL e MP, sejam elas prolongadas a *m* e a *l*, onde elas cortam o plano da eclíptica, e sobre T*m* incida a perpendicular PH. Agora, como a linha reta ML é paralela ao plano da eclíptica e, portanto, nunca pode encontrar com a linha reta *ml* que está neste plano, e ambas estas linhas retas estão num plano comum LMP*ml*, elas serão paralelas, e devido a isto os triângulos LMP e *lm*P serão similares. E observando que MP*m* está no plano da órbita em que a lua se movia enquanto no plano P, o ponto *m* incidirá sobre a linha N*n*, que passa através dos nós N e *n* desta órbita. E dado que a força com que metade da linha pequena LM é gerada, se estivesse em sua totalidade e fosse impressa de uma vez no ponto P, teria gerado toda aquela linha e feito com que a lua se movesse num arco cuja corda é LP, isto é, teria transferido a lua do plano MP*m*T para o plano LPlT, o movimento angular dos nós gerado por esta força será igual ao ângulo mT*l*. Mas *ml* está para *m*P assim como ML para MP. E como MP, devido ao tempo dado, também está dado, *ml* será como o retângulo ML.*m*P, isto é, como o retângulo IT.*m*P. E se T*ml* é um ângulo reto, o ângulo mT*l* será como $\frac{ml}{Tm}$, e portanto como $\frac{IT \,.\, Pm}{Tm}$, isto é (já que T*m* e *m*P, TP e PH são proporcionais), como $\frac{IT \,.\, PH}{TP}$ e, portanto, como TP é dado, como IT.PH. Mas se o ângulo T*ml* ou STN é oblíquo, o ângulo *m*T*l* será ainda menor, em proporção ao seno do ângulo STN para o raio, ou AZ para AT. E, portanto, a velocidade dos nós é como IT.PH.AZ, ou como o produto dos senos dos três ângulos TPI, PTN e STN.

Se estes são ângulos retos, como acontece quando os nós estão nas quadraturas, e a lua está na sizígia, a pequena linha *ml* será removida a uma distância infinita, e o ângulo *m*T*l* vai tornar-se igual ao ângulo *m*P*l*. Mas neste caso o ângulo *m*P*l* está para o ângulo PTM, que a lua descreve ao mesmo tempo ao redor da terra por seu movimento aparente, assim como 1 está para 59,575. Pois o ângulo *m*P*l* é igual ao ângulo LPM, isto é, ao ângulo da deflexão da lua a partir de uma trajetória retilínea, ângulo este que, se a gravidade da lua cessasse, a força mencionada do sol 3IT teria gerado por si própria neste tempo dado, e o ângulo PTM é igual ao ângulo da deflexão da lua a partir de uma trajetória retilínea, ângulo este que, se a força do sol 3IT cessasse, teria sido gerado no mesmo tempo apenas pela força com que a lua é mantida em sua órbita. E estas forças (como mostramos acima) estão uma para a outra como 1 para 59,575. Como, portanto, o movimento horário médio da lua (com relação às estrelas fixas) é $32^{m}56^{s}27^{ter}12\frac{1}{2}^{iv}$ o movimento horário do nó neste caso será $33^{s}10^{ter}33^{iv}12^{v}$. Mas em outros casos o movimento horário estará para $33^{s}10^{ter}33^{iv}12^{v}$ assim como o produto dos senos dos três ângulos TPI, PTN e STN (ou das distâncias da lua para a quadratura, da lua para o nó, e do nó para o sol) para o cubo do raio. E sempre que o seno de qualquer ângulo é modificado de positivo para negativo, ou de negativo para positivo, o movimento regressivo tornar-se-á progressivo, e o progressivo num regressivo. Logo, os nós são progressivos sempre que a lua está situada entre qualquer quadratura e o nó mais próximo a esta quadratura. Em outros casos eles são regressivos, e pelo excesso da regressão sobre a progressão serão mensalmente transferidos para trás.

COROLÁRIO I – Se, de P e de M, os pontos extremos do arco menor PM, deixamos incidir as perpendiculares PK e M*k* sobre a linha Q*q*, ligando as quadraturas, e prolongamos as mesmas até que elas cortem a linha dos nós N*n* em D e *d*, o movimento horário dos nós será conjuntamente como a área MPD*d*, e o quadrado da linha AZ. Pois sejam PK, PH e AZ os três senos mencionados, a saber, PK o seno da distância da lua para a quadratura, PH o seno da distância da lua para o nó, e AZ o seno da distância do nó para o sol; e a velocidade do nó será proporcional ao produto PK.PH.AZ. Mas PT está para PK assim como PM está para K*k* e, portanto, como PT e PM são dados, K*k* será proporcional a PK. Da mesma forma, AT está para PD assim como AZ está para PH e, portanto, PH é proporcional ao retângulo PD.AZ e, compondo estas proporções, PK.PH é proporcional ao conteúdo sólido K*k*.PD.AZ, e PK.PH.AZ proporcional a K*k*.PD.AZ^2, isto é, conjuntamente como a área PD*d*M e AZ^2. Q.E.D.

COROLÁRIO II – Em qualquer posição dada dos nós seu movimento horário médio é metade de seu movimento horário nas sizígias da lua e, por-



tanto, está para $16^{s}35^{ter}16^{iv}36^{v}$ assim como o quadrado do seno da distância dos nós para as sizígias está para o quadrado do raio, ou como AZ^2 para AT^2. Pois, se a lua descreve com um movimento uniforme o semicírculo Q*Aq*, a soma de todas as áreas PD*d*M, durante o tempo da passagem da lua de Q para M, formará a área QM*d*E, terminando na tangente QE do círculo, e no tempo em que a lua chegar no ponto *n*, a soma formará a área total EQA*n* descrita pela linha PD. Mas quando a lua vai de *n* a *q*, a linha PD fica fora do círculo, e percorre a área *nqe*, terminando na tangente *qe* do círculo, área esta que, como os nós eram antes regressivos, mas são agora progressivos, deve ser subtraída da área anterior e, sendo ela própria igual à área QEN, deixa o semicírculo NQA*n*. Enquanto a lua descreve um semicírculo, a soma de todas as áreas PD*d*M será a área deste semicírculo, e enquanto a lua descreve um círculo completo, a soma destas áreas será a área de todo o círculo. Mas a área PD*d*M, quando a lua está nas sizígias, é o retângulo do arco PM no raio PT, e a soma de todas as áreas, *cada uma* igual a esta área, no tempo em que a lua descreve um círculo completo, é o retângulo da circunferência total no raio do círculo, e este retângulo, tendo duas vezes a área do círculo, será o dobro da soma anterior. Se, portanto, os nós avançassem com aquela velocidade uniforme que eles adquirem nas sizígias da lua, eles descreveriam um espaço dobrado em relação ao que eles descrevem de fato e, portanto, o movimento médio por meio do qual, se continuado uniformemente, eles descreveriam o mesmo espaço que aquele que eles de fato descrevem com um movimento desigual, é *apenas* metade deste movimento que eles possuem nas sizígias da lua. Logo, como seu movimento horário maior, se os nós estão nas quadraturas, é $33^{s}10^{ter}33^{iv}12^{v}$, seu movimento horário médio neste caso será $16^{s}35^{ter}16^{iv}36^{v}$. E observando que o movimento

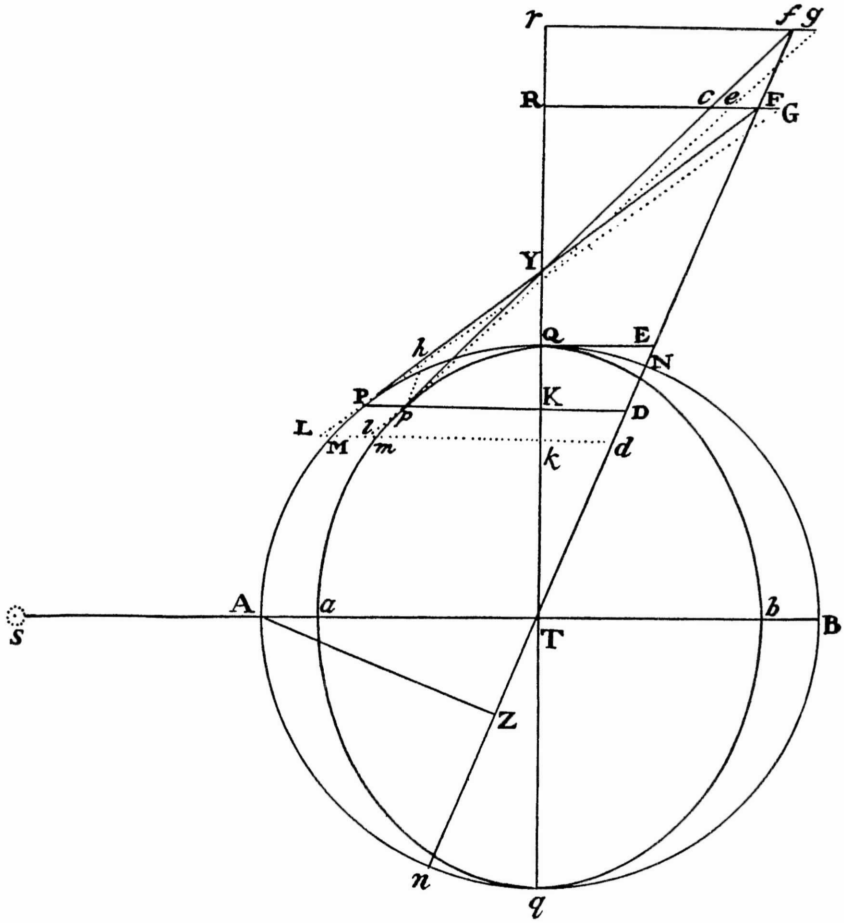
horário dos nós é em todo lugar proporcional a AZ^2 e à área PD*d*M conjuntamente e, portanto, nas sizígias da lua, o movimento horário dos nós é proporcional a AZ^2 e à área PD*d*M conjuntamente, isto é (como a área PD*d*M descrita nas sizígias é dada), proporcional a AZ^2, portanto o movimento médio também será proporcional a AZ^2. Logo, quando os nós estão fora das quadraturas, este movimento estará para $16^s35^{ter}16^{iv}36^v$ assim como AZ^2 está para AT^2. Q.E.D.

Proposição XXXI. Problema XII

Descobrir o movimento horário dos nós da lua numa órbita elíptica.

Seja Q*pmaq* uma elipse descrita com o eixo maior Q*q* e o eixo menor *ab*, QA*q*B um círculo circunscrito, T a terra no centro comum de ambos, S o sol, *p* a lua movendo-se nesta elipse, *pm* um arco que ela percorre no menor intervalo de tempo, N e *n* os nós ligados pela linha N*n*, *p*K e *m*k perpendiculares sobre o eixo Q*q*, prolongados de ambos os lados até que elas encontrem o círculo em P e M, e a linha dos nós em D e *d*. E se a lua descreve uma área proporcional ao tempo *de percurso* por um raio traçado até a terra, o movimento horário do nó na elipse será proporcional à área *p*D*dm* e AZ^2 conjuntamente.

Pois suponha que PF toque o círculo em P e prolongado encontra TN em F, que *pf* toca a elipse em *p* e prolongada encontre a mesma TN em *f*, e ambas tangentes encontram-se no eixo TQ em Y, e suponha que ML representa o espaço que a lua, pelo impulso da força mencionada acima 3IT ou 3PK, descreveria com um movimento transverso, no tempo em que girando no círculo ela descreve o arco PM, que *ml* denota o espaço que a lua girando na elipse descreveria no mesmo tempo pelo impulso da mesma força 3IT ou 3PK, e suponha que LP e *lp* sejam prolongadas até que elas encontrem o plano da eclíptica em G e *g*, e ligue FG e *fg*, das quais FG prolongada possa cortar *pf*, *pg* e TQ em *c*, *e* e R, respectivamente; e *fg* prolongada possa cortar TQ em *r*. Como a força 3IT ou 3PK no círculo está para a força 3IT ou 3*p*K na elipse assim como PK está para *p*K, ou como AT para *a*T, o espaço ML gerado pela força anterior estará para o espaço *ml* gerado pela última assim como PK para *p*K, isto é, devido as figuras similares PYK*p* e FYR*c*, como FR para *c*R. Mas (devido aos triângulos similares PLM e PGF), ML está para FG assim como PL está para PG, isto é (devido às paralelas L*k*, PK e GR), assim como *pl* está para *pe*, isto é (devido aos triângulos similares *plm*



e *cpe*), como *lm* está para *ce*, e inversamente como LM está para *lm*, ou como FR está para *c*R, assim está FG para *ce*. E, portanto, se *fg* estava para *ce* como *fy* para *c*Y, isto é, como *fr* para *c*R (isto é, conjuntamente como *fr* para FR e FR para *c*R, isto é, conjuntamente como *f*T para FT, e FG para *ce*), já que a razão de FG para *ce*, simplificada de ambos os lados, deixa as razões *fg* para FG e *f*T para FT, *fg* estaria para FG assim como *f*T para FT. Portanto, os ângulos que FG e *fg* subtenderiam na terra T seriam iguais um ao outro. Mas estes ângulos (pelo que mostramos na Proposição precedente) são os movimentos dos nós, enquanto a lua descreve no círculo o arco PM, na elipse o arco *pm*. Portanto, os movimentos dos nós no círculo e na elipse seriam iguais um ao outro. Isto apenas se *fg* estivesse para *ce* como *f*Y está para *c*Y, isto é, se *fg* fosse igual a $\frac{ce \,.\, f\mathrm{Y}}{c\mathrm{Y}}$. Mas devido aos triângulos similares *fgp* e *cep*, *fg* está para *ce* assim como *fp* está para *cp*, portanto *fg* é igual a $\frac{ce \,.\, fp}{cp}$, e,

portanto, o ângulo que *fg* subtende de fato está para o ângulo anterior que FG subtende, quer dizer, o movimento dos nós na elipse está para o movimento dos mesmos no círculo assim como este *fg* ou $\frac{ce \cdot fp}{cp}$ para o anterior *fg* ou $\frac{ce \cdot fY}{cY}$, isto é, como *fp* . *cY* para *fY* . *cp*, ou como *fp* para fY, e *c*Y para *cp*, isto é, se *ph* paralela a TN encontra FP em *h*, como F*h* para FY e FY para FP, ou seja, como F*h* para FP ou D*p* para DP e, portanto, como a área D*pmd* para a área DPM*d*. E, portanto, observando (pelo Corolário I, Proposição 30) que a última área e AZ^2 conjuntamente são proporcionais ao movimento horário dos nós no círculo, a área anterior e AZ^2 conjuntamente serão proporcionais ao movimento horário dos nós na elipse. Q.E.D.

Corolário – Como, portanto, em qualquer posição dada dos nós, a soma de todas as áreas *p*D*dm*, no tempo em que a lua é levada da quadratura para qualquer lugar *m*, é a área *mp*QE*d* terminada na tangente da elipse QE, e a soma de todas estas áreas, numa revolução completa, é a área de toda a elipse, o movimento médio dos nós na elipse estará para o movimento médio dos nós no círculo assim como a elipse para o círculo, isto é, como T*a* para TA, ou 69 para 70. E, portanto, como (pelo Corolário II, Proposição 30) o movimento horário médio dos nós no círculo está para $16^s 35^{ter} 16^{iv} 36^v$ assim como AZ^2 está para AT^2, se tomamos o ângulo $16^s 21^{ter} 3^{iv} 30^v$ para o ângulo $16^s 35^{ter} 16^{iv} 36^v$ assim como 69 para 70, o movimento horário médio dos nós nas elipses estará para $16^s 21^{ter} 3^{iv} 30^v$ assim como AZ^2 para AT^2, isto é, como o quadrado do seno da distância entre o nó e o sol para o quadrado do raio.

Mas a lua, por um raio traçado até a terra, descreve a área nas sizígias com uma velocidade maior do que ela o faz nas quadraturas, e devido a isto o tempo é contraído nas sizígias e prolongado nas quadraturas, e junto com o tempo o movimento dos nós é aumentado e diminuído similarmente. Mas o momento da área nas quadraturas da lua estava para seu momento nas sizígias como 10 973 para 11 073, e portanto o momento médio nos octantes está para o excesso nas sizígias, e para a falta nas quadraturas, assim como 11 023, metade da soma destes números, está para a metade da diferença 50. Logo, como o tempo da lua nas várias partes pequenas iguais de sua órbita é inversamente proporcional à sua velocidade, o tempo médio nos octantes estará para o excesso de tempo nas quadraturas, e para a falta *de tempo* nas sizígias que surgem desta causa, aproximadamente como 11 023 está para 50. Mas, calculando das quadraturas para as sizígias, encontro que o excesso dos momentos da área, nos vários lugares acima do menor momento nas quadraturas, é aproximadamente como o quadrado do seno da

distância da lua para as quadraturas e, portanto, a diferença entre o momento em qualquer lugar, e o momento médio nos octantes, é como a diferença entre o quadrado do seno da distância da lua das quadraturas, e o quadrado do seno de 45 graus, ou metade do quadrado do raio, e o aumento do tempo nos vários lugares entre os octantes e quadraturas, e a diminuição dele entre os octantes e sizígias, está na mesma proporção. Mas o movimento dos nós, enquanto a lua percorre as várias partes pequenas iguais de sua órbita, é acelerado ou retardado como o quadrado do tempo, pois este movimento, enquanto a lua percorre PM, é (outras coisas permanecendo iguais) como ML, e ML varia como o quadrado do tempo. Logo, o movimento dos nós nas sizígias é diminuído como o quadrado da razão do número 11 073 para o número 11 023 no tempo em que a lua percorre partes pequenas dadas de sua órbita, e a diminuição está para o movimento restante assim como 100 está para 10 973, mas para o movimento total está aproximadamente como 100 para 11 073. Mas a diminuição nos lugares entre os octantes e as sizígias, e o aumento nos lugares entre os octantes e as quadraturas, está para esta diminuição aproximadamente como o movimento total nestes lugares para o movimento total nas sizígias, e a diferença entre o quadrado do seno da distância da lua para a quadratura, e a metade do quadrado do raio, está para a metade do quadrado do raio, conjuntamente. Por conseguinte, se os nós estão nas quadraturas, e tomamos dois lugares, um de um lado e outro do outro lado, igualmente distantes do octante e outros dois distantes pelo mesmo intervalo, um da sizígia e outro da quadratura, e das diminuições dos movimentos nos dois lugares entre a sizígia e o octante subtraímos os aumentos dos movimentos nos dois outros lugares entre o octante e a quadratura, a diminuição que sobra será igual à diminuição na sizígia, como aparece facilmente por cálculo. Portanto, a diminuição média, que deve ser subtraída do movimento médio dos nós, é a quarta parte da diminuição na sizígia. O movimento horário total dos nós nas sizígias (supondo-se que a lua descrevesse uma área proporcional ao tempo a partir de um raio traçado até a terra) era $32^{s}42^{ter}7^{iv}$. E mostramos que a diminuição do movimento dos nós, no tempo em que a lua, agora movendo-se com a maior velocidade, percorre o mesmo espaço, estava para este movimento assim como 100 está para 11073 e, portanto, esta diminuição é $17^{ter}43^{iv}11^{v}$. Sua quarta parte $4^{ter}25^{iv}48^{v}$ diminuída do movimento horário médio encontrado acima, $16^{s}21^{ter}3^{iv}30^{v}$, deixa $16^{s}16^{ter}37^{iv}42^{v}$, seu movimento horário médio correto.

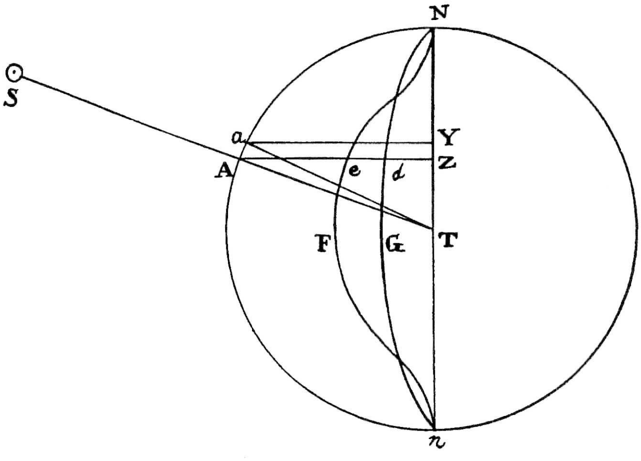
Se os nós estão fora das quadraturas, e são considerados dois lugares, um de um lado e outro do outro, igualmente distantes das sizígias, a

soma dos movimentos dos nós, quando a lua está nestes lugares, estará para a soma de seus movimentos, quando a lua está nos mesmos lugares e os nós nas quadraturas, como AZ^2 para AT^2. E as diminuições dos movimentos decorrentes das causas, mas agora explicados, serão mutuamente como os próprios movimentos e, portanto, os movimentos restantes estarão mutuamente entre eles próprios assim como AZ^2 está para AT^2, e os movimentos médios estarão como os movimentos restantes. E, portanto, em qualquer posição dada dos nós, seu movimento horário médio correto está para $16^s16^{ter}37^{iv}42^v$ assim como AZ^2 está para AT^2, isto é, como o quadrado do seno da distância entre os nós e as sizígias para o quadrado do raio.

Proposição XXXII. Problema XIII

Descobrir o movimento médio dos nós da lua.

O movimento médio anual é a soma de todos os movimentos horários médios durante o curso do ano. Suponha que o nó está em N e que, após o transcurso de cada hora, ele é levado de volta novamente para seu lugar original, de forma que, apesar de seu próprio movimento, ele possa permanecer constantemente na mesma situação em relação às estrelas fixas, enquanto que neste tempo o sol S, devido ao movimento da terra, é visto deixando o nó e avança até que ele complete seu curso anual aparente por um movimento uniforme. Seja A*a* um arco mínimo dado, que a linha reta TS sempre traçada até o sol, descreve no menor momento dado de tempo por sua intersecção com o círculo NA*n*, e o movimento horário médio (pelo que mostramos acima) será como AZ^2, isto é (como AZ e ZY são proporcionais), como o retângulo AZ em ZY, isto é, como a área AZY*a*, e a soma de todos os movimentos horários médios a partir do início será como a soma de todas as áreas *a*YZA, isto é, como a área NAZ. Mas a maior AZY*a* é igual ao retângulo do arco A*a* no raio do círculo e, portanto, a soma de todos estes retângulos no círculo total está para a soma semelhante de todos os retângulos maiores assim como a área do círculo total para o retângulo da circunferência total no raio, isto é, como 1 para 2. Mas o movimento horário correspondente a este retângulo maior era $16^s16^{ter}37^{iv}42^v$ e este movimento no curso completo do ano sideral, $365^d6^h9^s$, chega a 39°38'7"50"', e, portanto, a metade disto, 19°49'3"55"', é o movimento médio dos nós correspondente ao círculo completo. E o movimento dos nós, no tempo em que o sol é levado de N para A, está para 19°49'3"55"' assim como a área NAZ está para o círculo completo.

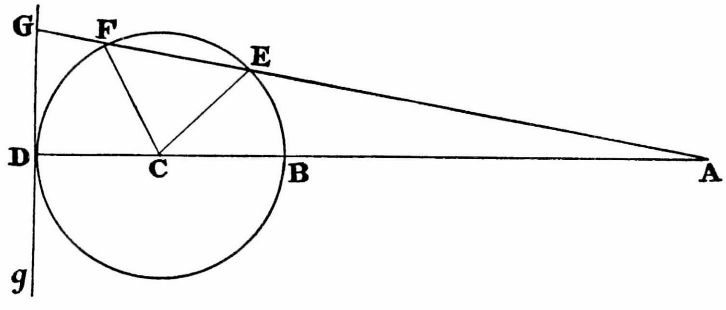


Assim seria se o nó fosse levado de volta para seu lugar original após cada hora, de forma que após uma revolução completa, o sol no final do ano seria encontrado novamente no mesmo nó que ele havia deixado quando o ano começou. Mas, devido ao movimento do nó neste meio tempo, o sol necessariamente encontrará o nó mais cedo. Agora resta calcular a abreviação do tempo. Como, então, o sol, no curso de um ano, percorre 360 graus, e o nó no mesmo tempo por seu maior movimento seria levado 39°38'7"50"', ou 39,6355 graus, e o movimento médio do nó em qualquer lugar N está para seu movimento médio na sua quadratura assim como AZ^2 para AT^2, o movimento do sol estará para o movimento do nó em N assim como $360AT^2$ para $39{,}6355AZ^2$, isto é, como $9{,}0827646AT^2$ para AZ^2. Portanto, se supomos a circunferência N*An* do círculo total ser dividida em pequenas partes iguais, tais como A*a*, o tempo em que o sol descreveria o pequeno arco A*a*, se o círculo estivesse parado, estaria para o tempo em que ele descreveria o mesmo arco, supondo que o círculo juntamente com os nós fosse girado ao redor do centro T, inversamente como $9{,}0827646AT^2$ para $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, pois o tempo é inversamente como a velocidade com que o pequeno arco é descrito, e esta velocidade é a soma das velocidades de ambos, sol e nó. Se, portanto, o setor NTA representa o tempo em que o sol por si próprio, sem o movimento do nó, descreveria o arco NA, e a indefinidamente pequena parte AT*a* do setor representa o pequeno momento do tempo em que ele descreveria o arco mínimo A*a*, e (incidindo *a*Y perpendicular sobre N*n*) se em AZ consideramos *d*Z de tal comprimento que o retângulo de *d*Z em ZY possa estar para a parte mínima AT*a* do setor assim como AZ^2 está para $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, ou seja, que *d*Z possa estar para AZ/2 assim como AT^2 está para $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, o retângulo de *d*Z por ZY vai representar a diminuição

do tempo que surge do movimento do nó, enquanto é descrito o arco A*a*, e se a curva N*d*G*n* é o lugar onde sempre se encontra o ponto *d*, a área curvilínea N*d*Z será como a diminuição total *do tempo* enquanto o arco total NA é percorrido e, portanto, o excesso do setor NAT acima da área N*d*Z será como o tempo total. Mas como o movimento do nó num tempo menor é menor proporcionalmente ao tempo, a área A*a*YZ também deve ser diminuída na mesma proporção, o que pode ser feito considerando em AZ a linha *e*Z com tal comprimento, que ela possa estar para o comprimento de AZ assim como AZ^2 está para $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, pois assim o retângulo de *e*Z em ZY estará para a área AZY*a* assim como a diminuição do tempo em que o arco A*a* é descrito para o tempo total em que ele seria descrito, se o nó estivesse parado e, portanto, este retângulo estará como a diminuição do movimento do nó. E se a curva N*e*F*n* é o lugar do ponto *e*, a área total N*e*Z, que é a soma de todas as diminuições *deste movimento*, será como a diminuição total *dele* durante o tempo em que o arco AN é descrito, e a área remanescente NA*e* será como o movimento restante, que é o movimento verdadeiro do nó, durante o tempo em que todo o arco NA é descrito pelos movimentos conjuntos do sol e do nó. Agora, a área do semicírculo está para a área da figura N*e*F*n* obtida pelo método das séries infinitas aproximadamente como 793 para 60. Mas o movimento correspondente *ou proporcional* ao círculo total era 19°49'3''55''' e, portanto, o movimento correspondente ao dobro da figura N*e*F*n* é 1°29'58''2''', que tomado do movimento anterior deixa 18°19'5''53''', o movimento completo do nó em relação às estrelas fixas no intervalo entre duas de suas conjunções com o sol, e este movimento subtraído do movimento anual do sol, 360°, deixa 341°40'54''7''', o movimento do sol no intervalo entre as mesmas conjunções. Mas assim como este movimento está para o movimento anual de 360°, assim está o movimento do nó encontrado agora, 18°19'5''53''', para seu movimento anual, que portanto será 19°18'1''23''', e este é o movimento médio dos nós no ano sideral. Pelas tabelas astronômicas, ele é 19°21'21''50'''. A diferença é menor do que $\frac{1}{300}$ partes do movimento completo e parece surgir da excentricidade da órbita da lua e de sua inclinação em relação ao plano da eclíptica. Pela excentricidade desta órbita o movimento dos nós é muito acelerado e, por outro lado, pela inclinação da órbita, o movimento dos nós é um pouco retardado, e reduzido à sua velocidade justa.

Proposição XXXIII. Problema XIV

Descobrir o movimento verdadeiro dos nós da lua.



No tempo que é como a área NTA - N*dZ* (na Fig. precedente) este movimento é como a área NA*e* e, portanto, é dado, mas como o cálculo é muito difícil, é melhor usar a seguinte construção do Problema. Ao redor do centro C, com qualquer raio CD, descreva o círculo BEFD, prolongue DC até A de forma que AB possa estar para AC assim como o movimento médio para a metade do movimento verdadeiro médio quando os nós estão em suas quadraturas (isto é, como 19°18'1"23''' para 19°49'3"55''', e, portanto, BC está para AC assim como a diferença destes movimentos 0°31'2"32''' para o último movimento 19°49'3"55''', isto é, como 1 para 38$\frac{3}{10}$). Então, através do ponto D trace a linha indefinida G*g*, tocando o círculo em D. Se consideramos o ângulo BCE, ou BCF, igual ao dobro da distância do sol ao lugar do nó, como encontrado pelo movimento médio, e traçando AE ou AF cortando a perpendicular DG em G, obtemos um outro ângulo que estará para o movimento completo do nó no intervalo entre as sizígias (isto é, para 9°11'3") como a tangente DG para a circunferência completa do círculo BED, e adicionamos este *último* ângulo (para o qual pode ser usado o ângulo DAG) ao movimento médio dos nós, enquanto eles estão passando das quadraturas para as sizígias, e o subtraímos de seu movimento médio enquanto eles estão passando das sizígias para as quadraturas, obtemos seus movimentos verdadeiros, pois o movimento verdadeiro assim obtido concorda aproximadamente com o movimento verdadeiro que surge se assumirmos os tempos como a área NTA - N*dZ*, e o movimento do nó como a área NA*e*, como qualquer pode calcular. Esta é a equação semi-mensal do movimento dos nós. Mas há também uma equação mensal, mas que não é de forma alguma necessária para achar a latitude da lua, pois como a variação da incli-

nação da órbita da lua para o plano da eclíptica é passível a uma desigualdade dupla, uma semi-mensal e outra mensal, a desigualdade mensal *desta variação,* e a equação mensal dos nós, moderam e corrigem de tal forma uma à outra, que ao calcular a latitude da lua ambas podem ser desprezadas.

COROLÁRIO – Desta Proposição e da precedente decorre que os nós ficam parados nas sizígias, mas são regressivos nas quadraturas, por um movimento horário de $16^{s}19^{ter}26^{iv}$, e que a equação do movimento dos nós nos octantes é 1°30', sendo que ambos concordam perfeitamente com os fenômenos dos céus.

Escólio

O Sr. Machin, o Professor Gresham e o Dr. Henry Pemberton, obtiveram separadamente o movimento dos nós por um método diferente. Já foi feita menção a este método num outro lugar. Seus trabalhos, que vi, continham duas Proposições, e em ambas concordavam perfeitamente entre si. O trabalho do Sr. Machin, chegando primeiro às minhas mãos, insiro aqui.

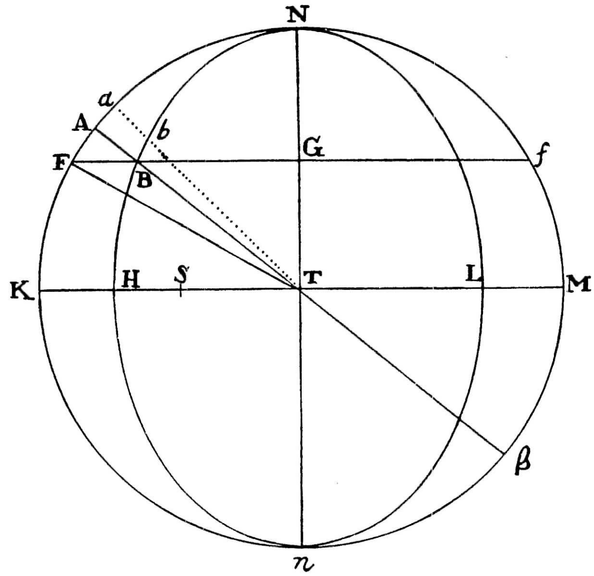
» O MOVIMENTO DOS NÓS DA LUA

"PROPOSIÇÃO I

"O movimento médio do sol desde o nó é definido por uma média geométrica proporcional entre o movimento médio do sol e aquele movimento médio com que o sol afasta-se com a maior velocidade do nó nas quadraturas.

"Seja T o lugar da terra, N*n* a linha dos nós da lua em qualquer tempo, KTM uma perpendicular a ela, TA uma linha reta girando ao redor do centro com a mesma velocidade angular com que o sol e o nó afastam-se um do outro, de forma que o ângulo entre a linha reta parada N*n* e a linha que gira TA possa ser sempre igual à distância dos lugares do sol e do nó. Agora, se qualquer linha reta TK for dividida em partes TS e SK, e estas partes forem consideradas como o movimento horário médio do sol para o movimento horário médio do nó nas quadraturas, e lá for tomada a linha reta TH, uma proporcional média entre a parte TS e o total TK, esta linha reta será proporcional ao movimento médio do sol desde o nó.

"Pois seja descrito o círculo NK*n*M a partir do centro T e com o raio TK, e ao redor do mesmo centro, com os semi-eixos TH e TN, seja descrita uma elipse NH*n*L, e no tempo em que o sol se afasta do nó através do arco



N*a*, se for traçada a linha reta T*ba*, a área do setor NT*a* será o expoente da soma dos movimentos do sol e do nó no mesmo tempo. Seja, portanto, o arco extremamente pequeno *a*A aquele que a linha reta T*ba*, girando de acordo com a lei mencionada, descreve uniformemente num dado intervalo de tempo, e o setor extremamente pequeno TA*a* será como a soma das velocidades com que o sol e o nó são levados em duas direções diferentes neste tempo. Agora, a velocidade do sol é quase uniforme, sua desigualdade sendo tão pequena que apenas produz a menor desigualdade no movimento médio dos nós. A outra parte desta soma, a saber, a quantidade média da velocidade do nó, é aumentada no recesso desde as sizígias numa razão ao quadrado do seno de sua distância ao sol (pelo Corolário, Proposição 31 deste livro), e, sendo maior em suas quadraturas com o sol em K, está na mesma razão para a velocidade do sol assim como SK está para TS, isto é, como (a diferença dos quadrados de TK e TH, ou) o retângulo KHM para TH^2. Mas a elipse NBH divide o setor AT*a*, o expoente da soma destas duas velocidades, em duas partes AB*ba* e BT*b*, proporcionais às velocidades. Pois, prolongue BT ao círculo em *β*, e a partir do ponto B incida sobre o maior eixo a perpendicular BG, que sendo prolongada de ambos os lados possa encontrar o círculo nos pontos F e *f*; e como o espaço AB*ba* está para o setor TB*b* assim como o retângulo AB*β* está para BT^2 (este retângulo sendo igual à diferença dos quadrados de TA e TB, já que a linha reta A*β* é igualmente cortada em T, e desigualmente em B), portanto quando o espaço AB*ba* é o maior de todos em K, esta razão será a mesma que a razão do retângulo

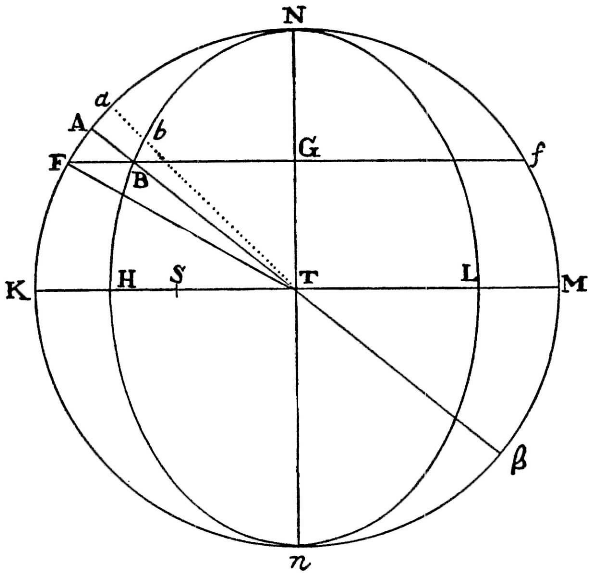
KHM para HT^2. Mas a maior velocidade média do nó, como mostrou-se, acima estará nesta mesma razão para a velocidade do sol, e, portanto, nas quadraturas o setor AT*a* é dividido em partes proporcionais às velocidades. E como o retângulo KHM está para HT^2 assim como FB*f* está para BG^2, e o retângulo ABβ é igual ao retângulo FB*f*, portanto a pequena área AB*ba*, onde ela é maior, está para o setor restante TB*b* assim como o retângulo ABβ está para BG^2. Mas a razão destas áreas pequenas sempre esteve como o retângulo ABβ para BT^2 e, portanto, a área pequena AB*ba* no lugar A é menor do que sua pequena área correspondente nas quadraturas na razão ao quadrado de BG para BT, isto é, na razão ao quadrado do seno da distância do sol desde o nó. Logo, a soma de todas as pequenas áreas AB*ba*, a saber, o espaço ABN, será como o movimento do nó no tempo em que o sol percorreu o arco NA desde que ele deixou o nó, e o espaço remanescente, a saber, o setor elíptico NTB, será como o movimento médio do sol no mesmo tempo. E como o movimento anual médio do nó é aquele movimento que ele realiza no tempo em que o sol completa um período de seu percurso, o movimento médio do nó desde o sol estará para o movimento médio do próprio sol assim como a área do círculo está para a área da elipse, isto é, como a linha reta TK para a linha reta TH, que é uma média proporcional entre TK e TS, ou, o que dá no mesmo, como a proporcional média TH para a linha reta TS.

"Proposição II

"Sendo dado o movimento médio dos nós da lua, descobrir seu movimento verdadeiro.

"Seja o ângulo A a distância do sol ao lugar médio do nó, ou o movimento médio do sol desde o nó. Então, se tomamos o ângulo B, cuja tangente está para a tangente do ângulo A assim como TH está para TK, isto é, como a raiz quadrada da razão do movimento horário médio do sol para o movimento horário médio do sol desde o nó, quando o nó está na quadratura, este ângulo B será a distância do sol ao lugar verdadeiro do nó. Pois ligue FT, e, pela demonstração da última Proposição, o ângulo FTN será a distância do sol ao lugar médio do nó, e o ângulo ATN a distância do lugar verdadeiro, e as tangentes destes ângulos estão entre si assim como TK está para TH.

"Corolário – Portanto, o ângulo FTA é a equação dos nós da lua, e o seno deste ângulo, onde ele é maior nos octantes, está para o raio assim



como KH está para TK + TH. Mas o seno desta equação em qualquer outro lugar A está para o maior seno assim como o seno das somas dos ângulos FTN + ATN está para o raio, isto é, aproximadamente como o seno do dobro da distância do sol até o lugar médio do nó (a saber, 2FTN) para o raio.

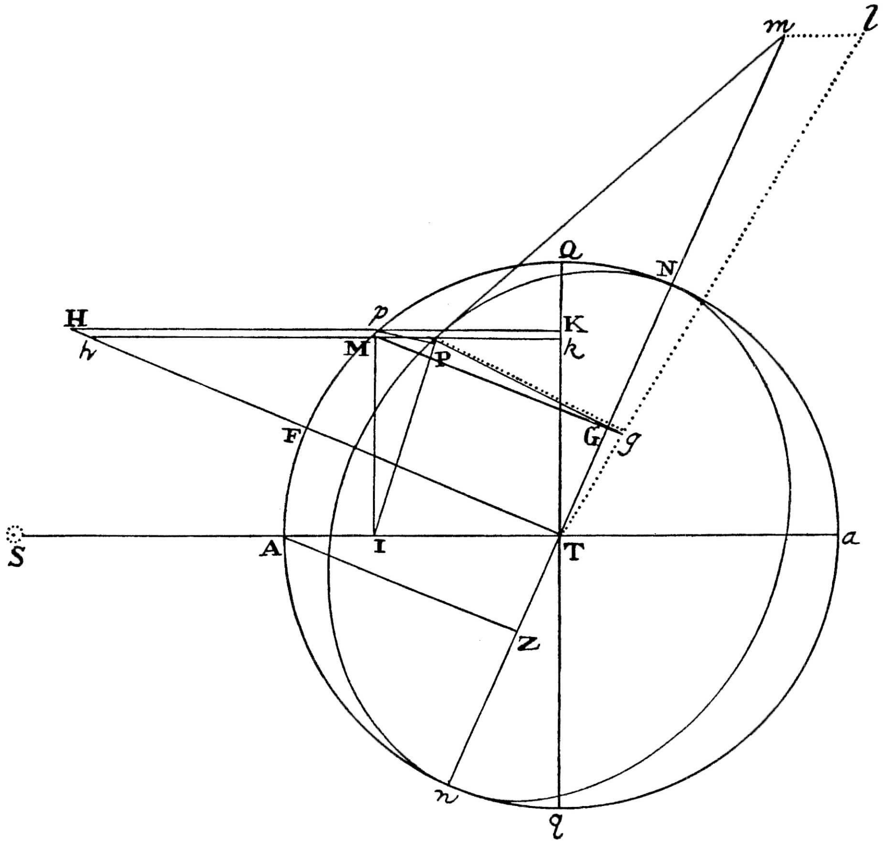
"Escólio

"Se o movimento horário médio dos nós nas quadraturas for 16''16'''$37^{iv}42^{v}$, isto é, num ano sideral completo, 39º38'7''50''', TH estará para TK assim como a raiz quadrada da razão do número 9,0827646 para o número 10,0827646, isto é, como 18,6524761 para 19,6524761. E, portanto, TH está para HK assim como 18,6524761 está para 1, isto é, como o movimento do sol num ano sideral para o movimento médio do nó 19°18'1''23⅔'''.

"Mas se o movimento médio dos nós da lua em 20 anos julianos é 386°50'16'', como é obtido a partir das observações utilizadas na teoria da lua, o movimento médio dos nós num ano sideral será 19°20'31''58''' e TH estará para HK assim como 360° está para 19°20'31''58'''; isto é, como 18,61214 para 1 e, portanto, o movimento horário médio dos nós nas quadraturas resultará ser 16''18'''48^{iv}. E a maior equação dos nós nos octantes será 1°29'57''."

PROPOSIÇÃO XXXIV. PROBLEMA XV

Descobrir a variação horária da inclinação da órbita da lua para o plano da eclíptica.



Sejam A e *a* as sizígias, Q e *q* as quadraturas, N e *n* os nós, P o lugar da lua em sua órbita, *p* a projeção ortográfica deste lugar sobre o plano da eclíptica, e *m*T*l* o movimento momentâneo dos nós como acima. Se sobre T*m* incidimos a perpendicular PG, e ligando *p*G a prolongamos até que ela encontre T*l* em *g*, e ligamos também P*g*, o ângulo PG*p* será a inclinação da órbita da lua para o plano da eclíptica quando a lua está em P, e o ângulo P*gp* será a inclinação da mesma após ter transcorrido um pequeno momento de tempo e, portanto, o ângulo GP*g* será a variação momentânea da inclinação. Mas este ângulo GP*g* está para o ângulo GT*g* assim como TG está para PG e P*p* para PG conjuntamente. E, portanto, se para o momento de tempo assumimos uma hora, como o ângulo GT*g* (pela Proposição 30) está para o ângulo 33''10'''33^{iv} assim como IT.PG.AZ está para AT^3, o ângulo GP*g* (ou a

variação horária da inclinação) estará para o ângulo 33"10'''33^{iv} assim como IT.AZ.TG.$\frac{Pp}{PG}$ está para AT^3. Q.E.I.

E assim seria se a lua girasse uniformemente numa órbita circular. Mas se a órbita é elíptica, o movimento médio dos nós será diminuído na proporção do eixo menor para o maior, como mostramos acima, e a variação da inclinação também será diminuída na mesma proporção.

Corolário I – Sobre N*n* trace a perpendicular TF, e seja *p*M o movimento horário da lua no plano da eclíptica, sobre QT incida as perpendiculares *p*K e M*k*, e as prolongue até que elas encontrem TF em H e *h*, então IT estará para AT assim como K*k* está para M*p*, e TG para H*p* assim como TZ está para AT. Portanto, IT.TG será igual a $\frac{Kk\,.\,Hp\,.\,TZ}{Mp}$, isto é, igual à área H*p*M*h* multiplicada na razão $\frac{TZ}{Mp}$ e, portanto, a variação horária da inclinação estará para 33"10'''33^{iv} assim como a área H*p*M*h* multiplicada por AZ. $\frac{TZ}{Mp}\,.\,\frac{Pp}{PG}$ está para AT^3.

Corolário II – E, portanto, se a terra e os nós fossem após cada hora levados de volta de seus lugares novos e instantaneamente restaurados para seus lugares velhos, de forma que sua situação pudesse continuar sendo dada por todo um mês periódico, a variação total da inclinação durante este mês estaria para 33"10'''33^{iv} como o agregado de todas as áreas H*p*M*h*, gerado no tempo de uma revolução do ponto *p* (com a atenção devida ao somar devidos aos seus sinais próprios + e -), multiplicado por AZ . TZ. $\frac{Pp}{PG}$ está para *Mp* . AT^3, isto é, como o círculo total QA*qa* multiplicado por AZ. TZ . $\frac{Pp}{PG}$ está para *Mp* . AT^3, isto é, como a circunferência QA*qa* multiplicada por AZ. TZ. $\frac{Pp}{PG}$ está para 2*Mp* . AT^2.

Corolário III – E, portanto, numa posição dada dos nós, a variação horária média a partir da qual, se continuada uniformemente por todo o mês, aquela variação mensal poderia ser gerada, está para 33"10'''33^{iv} assim como AZ . TZ. $\frac{Pp}{PG}$ está para $2AT^2$, ou como P*p* . $\frac{AZ\,.\,TZ}{\frac{1}{2}AT}$ está para PG.4AT, isto é (já que P*p* está para PG como o seno da inclinação mencionada para o raio, e $\frac{AZ\,.\,TZ}{\frac{1}{2}AT}$ está para 4AT como o seno do dobro do ângulo AT*n* para

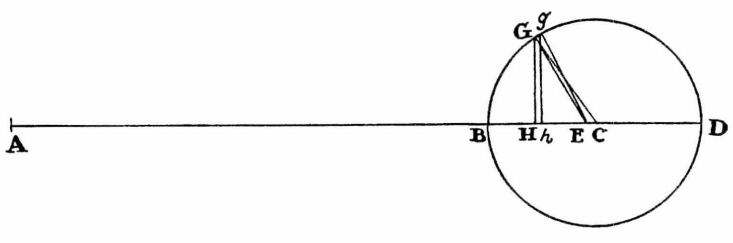
quatro vezes o raio), como o seno da mesma inclinação multiplicada pelo seno do dobro da distância entre os nós e o sol para quatro vezes o quadrado do raio.

COROLÁRIO IV – Observando que a variação horária da inclinação, quando os nós estão nas quadraturas, está (por esta Proposição) para o ângulo 33''10'''33^{iv} assim como IT.AZ.TG.$\frac{Pp}{PG}$ está para AT^3, isto é, assim como $\frac{IT \cdot TG}{\frac{1}{2}AT} \cdot \frac{Pp}{PG}$ está para 2AT, isto é, como o seno do dobro da distância da lua desde as quadraturas multiplicada por $\frac{Pp}{PG}$ está para o dobro do raio, a soma de todas as variações horárias durante o tempo em que a lua, na situação dos nós, passa da quadratura para a sizígia (isto é, no espaço de 177⅙ horas) estará para a soma de tantos ângulos 33''10'''33^{iv} ou 5878'', assim como a soma de todos os senos do dobro da distância da lua desde as quadraturas multiplicada por $\frac{Pp}{PG}$ está para a soma de tantos diâmetros, isto é, como o diâmetro multiplicado por $\frac{Pp}{PG}$ está para a circunferência, isto é, se a inclinação for 5°1', assim como $7 \cdot \frac{874}{10000}$ está para 22, ou como 278 está para 10000. E, portanto, a variação total, composta da soma de todas as variações horárias no tempo mencionado, é 163'', ou 2'43''.

PROPOSIÇÃO XXXV. PROBLEMA XVI

Descobrir a inclinação da órbita da lua para o plano da eclíptica num tempo dado.

Seja AD o seno da maior inclinação, e AB o seno da menor. Divida ao meio BD em C, e ao redor do centro C, com o raio BC, descreva o círculo



BGD. Em AC tome CE na mesma proporção para EB assim como EB está para o dobro de BA. E se no tempo dado colocamos o ângulo AEG igual ao dobro da distância dos nós para as quadraturas, e sobre AD incidimos a perpendicular GH, AH será o seno da inclinação desejada.

Pois GE^2 é igual a

$$GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2 - 2BH.BE = BE^2 + 2EC.BH = 2EC.AB + 2EC.BH = 2EC.AH;$$

logo, como 2EC é dado, GE^2 será como AH. Agora seja AE*g* o dobro da distância dos nós desde as quadraturas num momento de tempo dado posterior, e o arco G*g*, devido ao ângulo dado GE*g*, será como a distância GE. Mas H*h* está para G*g* assim como GH está para GC e, portanto, H*h* é como o retângulo GH.G*g*, ou GH.GE, isto é, como $\frac{GH}{GE} . GE^2$, ou $\frac{GH}{GE} . AH$, isto é, conjuntamente como AH e o seno do ângulo AEG. Se, portanto, em qualquer caso, AH for o seno da inclinação, ele aumentará na mesma taxa em que o faz o seno da inclinação (pelo Corolário III da Proposição precedente) e, portanto, vai sempre continuar igual a este seno. Mas quando o ponto G incide sobre o ponto B ou sobre D, AH é igual a este seno e, portanto, permanece sempre igual a ele. Q.E.D.

Nesta demonstração supus que o ângulo BEG, representando o dobro da distância dos nós desde as quadraturas, aumentava uniformemente, pois não posso deter-me em quaisquer detalhes de desigualdade. Agora suponha que BEG é um ângulo reto, e que G*g* é neste caso o aumento horário do dobro da distância dos nós até o sol, então (pelo Corolário III da última Proposição) a variação horária da inclinação no mesmo caso estará para 33''10'''33^{iv} assim como o retângulo de AH, o seno da inclinação, multiplicado pelo seno do ângulo reto BEG, o dobro da distância dos nós até o sol, está para quatro vezes o quadrado do raio, isto é, assim como AH, o seno da inclinação média, está para quatro vezes o raio, isto é, observando que a inclinação média é aproximadamente 5°8½', assim como seu seno 896 está para 40 000, o quádruplo do raio, ou assim como 224 está para 10000. Mas a variação total correspondente a BD, a diferença dos senos, está para esta variação horária assim como o diâmetro BD está para o arco G*g*, isto é, conjuntamente como o diâmetro BD está para a semicircunferência BGD, e assim como o tempo de 2079⁷⁄₁₀ horas, no qual o nó avança das quadraturas para as sizígias, está para uma hora, isto é, assim como 7 está para 11, e 2079⁷⁄₁₀ está para 1. Portanto, compondo todas estas proporções, teremos a variação total BD para 33''10'''33^{iv} assim como 224.7.2079⁷⁄₁₀ está para 110000, isto é, assim como 29645 está para 1000, de onde a variação BD resulta ser 16'23½''.

E esta é a maior variação da inclinação, abstraindo da situação da lua em sua órbita, pois, se os nós estão nas sizígias, a inclinação não sofre mudança com as várias posições da lua. Mas se os nós estão nas quadraturas, a inclinação é menor quando a lua está nas sizígias do que quando ela está nas quadraturas por uma diferença de 2'43", como mostramos (Corolário IV da Proposição precedente), e a variação média total BD, diminuída por 1'21½", a metade deste excesso, torna-se 15'2", quando a lua está nas quadraturas; e, aumentada pela mesma, torna-se 17'45" quando a lua está nas sizígias. Se, portanto, a lua está nas sizígias, a variação total na passagem dos nós das quadraturas para as sizígias será 17'45" e, portanto, se a inclinação for 5°17'20", quando os nós estão nas sizígias, ela será 4°59'35" quando os nós estão nas quadraturas e a lua nas sizígias. A verdade disto é confirmada pelas observações.

Agora se se quer determinar a inclinação da órbita quando a lua está nas sizígias, e os nós em qualquer lugar entre elas e as quadraturas, suponha que AB está para AD assim como o seno de 4°59'35" está para o seno de 5°17'20", e considere o ângulo AEG igual ao dobro da distância dos nós desde as quadraturas, e AH será o seno da inclinação desejada. A esta inclinação da órbita a inclinação da mesma é igual quando a lua está 90° distante dos nós. Em outras situações da lua, esta desigualdade mensal a que a variação da inclinação está sujeita no cálculo da latitude da lua, é balanceada, e de certa forma eliminada pela desigualdade mensal do movimento dos nós (como dissemos antes) e, portanto, pode ser desprezada no cálculo da latitude mencionada.

Escólio

Desejava mostrar por estes cálculos dos movimentos lunares que pela teoria da gravidade os movimentos da lua podem ser calculados a partir de suas causas físicas. Pela mesma teoria encontrei além disto que a equação anual do movimento médio da lua surge da dilatação variável que a órbita da lua sofre devido à ação do sol de acordo com o Corolário VI, Proposição 66, Livro I. A força desta ação é maior no sol de perigeu, e dilata a órbita da lua; no sol de apogeu ela é menor, e permite que a órbita seja novamente contraída. A lua move-se mais lentamente na órbita dilatada e mais rapidamente na contraída; e a equação anual pela qual esta desigualdade é regulada desaparece no apogeu e no perigeu do sol. Na distância média entre o sol e a terra ela chega a aproximadamente 11'50"; a outras distâncias do sol

ela é proporcional à equação do centro do sol, e é adicionada ao movimento médio da lua, enquanto a terra está passando de seu afélio para seu periélio, e subtraída quando a terra está no semicírculo oposto. Considerando o raio da grande órbita 1000, e $16\frac{7}{8}$ para a excentricidade da terra, esta equação, quando da maior grandeza, pela teoria da gravidade chega a 11'49''. Mas a excentricidade da terra parece ser alguma coisa maior, e esta equação será aumentada na mesma proporção que a excentricidade. Supondo a excentricidade ser $16\frac{11}{12}$, a maior equação será 11'51''.

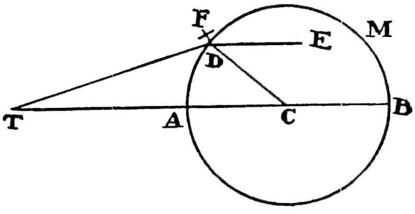
Encontrei além disto que o apogeu e os nós da lua movem-se mais rapidamente no periélio da terra, onde a força da ação do sol é maior, do que em seu afélio, e isto inversamente como o cubo do raio da distância da terra até o sol. Daqui surgem equações anuais destes movimentos proporcionais à equação do centro do sol. Mas o movimento do sol varia inversamente como o quadrado da distância da terra ao sol, e a maior equação do centro que esta desigualdade gera é 1°56'20'', correspondente à excentricidade do sol mencionada acima, $16\frac{11}{12}$. Mas se o movimento do sol variasse inversamente como o cubo da distância, esta desigualdade teria gerado a maior equação 2°54'30''. Portanto, as maiores equações que as desigualdades dos movimentos do apogeu e nós da lua geram estão para 2°54'30'' assim como o movimento diurno médio do apogeu da lua e o movimento diurno médio de seus nós estão para o movimento diurno médio do sol. Portanto, a maior equação do movimento médio do apogeu resulta ser 19'43'', e a maior equação do movimento médio dos nós 9'24''. A primeira equação é adicionada, e a última subtraída, quando a terra está passando de seu periélio para seu afélio, e o contrário quando a terra está no semicírculo oposto.

Pela teoria da gravidade encontrei de forma semelhante que a ação do sol sobre a lua é um pouco maior quando o diâmetro transverso da órbita da lua passa através do sol do que quando o mesmo é perpendicular em relação à linha que liga a terra ao sol; e portanto, a órbita da lua é alguma coisa mais larga no primeiro caso do que no último. E daqui surge uma outra equação do movimento médio da lua, dependendo da situação do apogeu da lua com relação ao sol, que é maior quando o apogeu da lua está nos octantes do sol, e desaparece quando o apogeu chega nas quadraturas ou sizígias, sendo adicionado ao movimento médio enquanto o apogeu da lua está passando da quadratura do sol para a sizígia, e subtraído enquanto o apogeu está passando da sizígia para a quadratura. Esta equação, que vou chamar de semi-anual, quando maior nos octantes do apogeu, chega a aproximadamente 3'45'', tanto quanto pude determinar a partir dos fenômenos, sendo esta sua quantidade na distância média entre o sol e a terra. Mas ela é

aumentada e diminuída inversamente como o cubo da distância do sol e, portanto, é aproximadamente 3'34" quando esta distância é maior, e 3'56" quando menor. Mas quando o apogeu da lua está fora dos octantes, ela torna-se menor, e está para seu valor maior assim como o seno do dobro da distância entre o apogeu da lua e a sizígia ou quadratura mais próxima está para o raio.

Pela mesma teoria da gravidade, a ação do sol sobre a lua é um pouco maior quando a linha dos nós da lua passa sobre o sol do que quando ela é ortogonal à linha que liga o sol e a terra. Daqui surge uma outra equação do movimento médio da lua, que vou chamar de segunda semi-anual. Esta é maior quando os nós estão nos octantes do sol e desaparece quando eles estão nas sizígias ou quadraturas, e nas outras posições dos nós é proporcional ao seno do dobro da distância entre qualquer nó e a sizígia ou quadratura mais próxima. E ela é adicionada ao movimento médio da lua, se o sol está atrás do nó que é mais próximo a ele, e é subtraída, se na frente; e nos octantes, onde ela é da maior grandeza, ela chega a 47" na distância média entre o sol e a terra, como obtenho a partir da teoria da gravidade. Nas outras distâncias do sol, esta equação, maior nos octantes dos nós, varia inversamente como o cubo da distância entre o sol e a terra e, portanto, no perigeu do sol ela chega a aproximadamente 49", e em seu apogeu a aproximadamente 45".

Pela mesma teoria da gravidade, o apogeu da lua avança na maior taxa quando ele está ou em conjunção ou em oposição com o sol, mas em suas quadraturas com o sol ele vai para trás, e a excentricidade chega no primeiro caso ao seu maior valor e no último ao seu menor, pelos Corolários VII, VIII e IX, Proposições 66, Livro I. E estas desigualdades, pelos Corolários mencionados, são muito grandes, e geram o princípio que chamo de a equação semi-anual do apogeu. Esta equação semi-anual chega a 12°18' em seu maior valor, tão aproximadamente quanto pude determinar a partir dos fenômenos. Nosso compatriota, Horrox, foi o primeiro a propor a teoria que a lua move-se numa elipse ao redor da terra que está situada em seu foco mais baixo. O Dr. Halley melhorou a noção, colocando o centro da elipse num epiciclo cujo centro gira uniformemente ao redor da terra, e a partir do movimento deste epiciclo surgem as desigualdades mencionadas na progressão e regressão do apogeu, e na quantidade de excentricidade. Suponha que a distância média entre a lua e a terra seja dividida em 100 000 partes, seja T a terra, e TC a excentricidade média da lua de 5505 destas partes. Prolongue TC até B, de forma que CB possa ser o seno da maior equação semi-anual 12°18' para o raio TC; e o círculo BDA descrito ao redor do centro C, com o



raio CB, será o epiciclo de que falamos, em cujo centro é colocada a órbita da lua, girando de acordo com a ordem das letras BDA. Coloque o ângulo BCD igual a duas vezes o argumento anual, ou duas vezes a distância entre o local verdadeiro do sol e o lugar do apogeu da lua uma vez corrigido, e CTD será a equação semi-anual do apogeu da lua, e TD a excentricidade de sua órbita, tendendo ao lugar do apogeu agora duas vezes corrigido. Mas, conhecendo o movimento médio da lua, o lugar de seu apogeu e sua excentricidade, assim como o eixo maior de sua órbita, 200 000, podem ser determinados pelos métodos comumente conhecidos a partir destes dados o lugar verdadeiro da lua em sua órbita, juntamente com sua distância até a terra.

No periélio da terra, onde é maior a força do sol, o centro da órbita da lua move-se mais rapidamente ao redor do centro C do que no afélio, e isto inversamente como o cubo da distância entre o sol e a terra. Mas, como a equação do centro do sol está incluída no argumento anual, o centro da órbita da lua move-se mais rapidamente em seu epiciclo BDA, inversamente como o quadrado da distância entre o sol e a terra. Portanto, para que ele possa mover-se ainda mais rapidamente, inversamente como a distância, suponha que de D, o centro da órbita, é traçada uma linha reta DE, tendendo em direção ao apogeu da lua uma vez corrigido, isto é, paralelo a TC, e coloque o ângulo EDF igual ao excesso do argumento anual já mencionado sobre a distância entre o apogeu da lua e o perigeu posterior do sol, ou, o que dá no mesmo, considere o ângulo CDF igual ao complemento da anomalia verdadeira do sol para 360°, e esteja DF para DC assim como duas vezes a excentricidade da grande órbita está para a distância média entre o sol e a terra, e o movimento diurno médio do sol desde o apogeu da lua está para o movimento diurno médio do sol desde seu próprio apogeu conjuntamente, isto é, como 33⅞ para 1000, e 52'27"16"' para 59'8"10"' conjuntamente, ou como 3 para 100, e imagine que o centro da órbita da lua colocada no ponto F gire num epiciclo cujo centro é D e raio DF, enquanto o ponto D move-se na circunferência do círculo DABD, pois desta forma o centro da órbita da lua chega a descrever uma certa linha curva ao redor do centro C, com uma velocidade que será quase inversamente como o cubo da distância entre o sol e a terra, como deve ser.

O cálculo deste movimento é difícil, mas pode ser tornado mais fácil pela seguinte aproximação. Assumindo, como acima, a distância média entre a lua e a terra de 100 000 partes, e a excentricidade TC de 5 505 destas partes, a linha CB ou CD será encontrada 1172¾, e DF 35⅕ destas partes, e esta linha DF à distância TC subtende na terra o ângulo cuja remoção do centro da órbita do lugar D para o lugar F gera no movimento deste centro; duplique esta linha DF numa posição paralela, à distância entre o foco superior da órbita da lua e a terra, subtendendo na terra o mesmo ângulo que DF subtendia antes, o qual aquela remoção gera no movimento deste foco superior; mas à distância entre a lua e a terra esta linha dobrada 2DF no foco superior, numa posição paralela à primeira linha DF, subtende um ângulo na lua, que a remoção mencionada gera no movimento da lua, ângulo este que pode portanto ser chamado a segunda equação do centro da lua. Esta equação, na distância média entre a lua e a terra, é aproximadamente como o seno do ângulo que a linha DF contém com a linha traçada entre o ponto F e a lua, e quando maior chega a 2'25". Mas o ângulo que a linha DF contém com a linha traçada do ponto F até a lua é encontrado ou subtraindo o ângulo EDF da anomalia média da lua, ou adicionando a distância entre a lua e o sol à distância entre o apogeu da lua e o apogeu do sol. E assim como o raio está para o seno do ângulo encontrado desta maneira, da mesma forma 2'25" está para a segunda equação do centro, a ser adicionada, se a soma mencionada anteriormente for menor do que um semicírculo, a ser subtraída, se maior. E a longitude da lua pode ser encontrada nas sizígias dos astros a partir do lugar da lua em sua órbita assim corrigida.

A atmosfera da terra à altura de 35 ou 40 milhas refrata a luz do sol. Esta refração espalha e dispersa a luz sobre a sombra da terra, e a luz dissipada próxima dos limites da sombra dilata a sombra. Devido a isto, ao diâmetro da sombra, como ele surge pela paralaxe, adiciono 1 ou 1⅓ minutos nas eclipses lunares.

Mas a teoria da lua deve ser examinada e provada a partir dos fenômenos, primeiro nas sizígias, então nas quadraturas, e por último nos octantes. E quem quer que queira realizar o trabalho encontrará ser útil assumir os seguintes movimentos médios do sol e da lua no Observatório Real de Greenwich, ao meio-dia do último dia de dezembro, no ano 1700: o movimento médio do sol ♑ 20°43'40", e de seu apogeu ♋ 7°44'30", o movimento médio da lua ♒ 15°21'00", de seu apogeu, ♓ 8°20'00", e de seu nó ascendente ♌ 27°24'20", e a diferença dos meridianos entre o Observatório de Greenwich e o Observatório Real de Paris, $0^h9^m20^s$. Mas o movimento médio da lua e de seu apogeu ainda não foram obtidos com precisão suficiente.

Proposição XXXVI. Problema XVII

Descobrir a força do sol para mover o mar.

A força do sol ML ou PT para perturbar os movimentos da lua estava (pela Proposição 25), nas quadraturas da lua, para a força da gravidade conosco, assim como 1 para 638092,6; e a força TM - LM ou 2PK nas sizígias da lua é o dobro desta quantidade. Mas, descendo à superfície da terra, estas forças são diminuídas na proporção das distâncias ao centro da terra, isto é, na proporção de 60½ para 1. Portanto, a força anterior sobre a superfície da terra está para a força da gravidade assim como 1 para 38604600 e por esta força o mar é abaixado nos lugares que estão distantes 90 graus do sol. Mas pela outra força, que é duas vezes tão grande, o mar é levantado não apenas nos lugares diretamente abaixo do sol, mas também naqueles que estão diretamente opostos a ele, e a soma destas forças está para a força da gravidade assim como 1 para 12868200. E como a mesma força gera o mesmo movimento, se ela abaixa as águas naqueles lugares que estão distantes 90 graus do sol, ou as sobe nos lugares que estão diretamente sob o sol e diretamente opostos a ele, a soma mencionada anteriormente será a força total do sol para perturbar o mar, e terá o mesmo efeito como se toda ela fosse empregada em subir o mar nos lugares diretamente sob o sol e diretamente opostos a ele e não agisse em absoluto nos lugares que estão 90 graus afastados do sol.

E esta é a força do sol para perturbar o mar em qualquer lugar dado onde o sol está ao mesmo tempo na vertical e na sua distância média da terra. Em outras posições do sol, sua força para subir o mar é diretamente proporcional ao seno verso do dobro de sua altura acima do horizonte do lugar e inversamente proporcional ao cubo da distância à terra.

Corolário – Como a força centrífuga das partes da terra, surgindo do movimento diurno da terra, que está para a força da gravidade assim como 1 está para 289, sobe as águas sobre o equador a uma altura que excede aquela sobre os pólos por 85472 pés de Paris, como acima, na Proposição 19, a força do sol, que mostramos agora estar para a força da gravidade assim como 1 está para 12868200 e, portanto, está para a força centrífuga assim como 289 está para 12868200, ou como 1 para 44527, será capaz de levantar as águas nos lugares diretamente sob o sol e diretamente opostos a ele a uma altura que excede aquela nos lugares que estão 90 graus afastados do sol por apenas um pé de Paris e 113⅟30 polegadas, pois esta medida está para a medida de 85472 pés assim como 1 está para 44527.

PROPOSIÇÃO XXXVII. PROBLEMA XVIII

Descobrir a força da lua para mover o mar.

A força da lua para mover o mar deve ser deduzida de sua razão para a força do sol, e esta razão deve ser determinada pela razão dos movimentos do mar, que são os efeitos destas forças. Na desembocadura do rio Avon, três milhas abaixo de Bristol, a altura da subida da água nas sizígias dos astros de verão e de outono (pelas observações de Samuel Sturmy) chega a aproximadamente 45 pés, mas nas quadraturas a apenas 25. A primeira destas alturas surge da soma das forças mencionadas anteriormente, a última de suas diferenças. Se, portanto, S e L representam respectivamente as forças do sol e da lua enquanto eles estão no equador, assim como em suas distâncias médias da terra, teremos L + S para L - S assim como 45 para 25, ou como 9 para 5.

Em Plymouth (pelas observações de Samuel Colepress) a maré em sua altura média sobe a aproximadamente 16 pés, e na primavera e no outono sua altura nas sizígias pode exceder aquela nas quadraturas por mais de 7 ou 8 pés. Suponha a maior diferença destas alturas ser de 9 pés, e L + S estará para L - S assim como 20½ para 11½, ou como 41 para 23, proporção que concorda suficientemente bem com a anterior. Mas devido à grande maré em Bristol, é melhor nos basear nas observações de Sturmy e, portanto, até que tenhamos mais certeza, vamos usar a proporção de 9 para 5.

Mas devido aos movimentos recíprocos das águas, as maiores marés não acontecem nas épocas das sizígias dos astros, mas, como dissemos antes, são as terceiras em ordem após as sizígias, ou (marcando a partir das sizígias) seguem-se após a terceira aproximação da lua ao meridiano do lugar após as sizígias, ou melhor (como observa Sturmy) são as terceiras após o dia da lua nova ou cheia, ou bem aproximadamente após a décima-segunda hora a partir da lua nova ou cheia e, portanto, acontecem aproximadamente sobre a quadragésima terceira hora após a lua nova ou cheia. Mas neste porto elas acontecem ao redor da sétima hora após a aproximação da lua ao meridiano do lugar e, portanto, seguem-se após a aproximação da lua ao meridiano, quando a lua está distante do sol, ou avançou desde sua oposição com o sol por aproximadamente 18 ou 19 graus. Assim as estações de verão e inverno não atingem seu máximo nos próprios solstícios, mas quando o sol avançou além dos solstícios ao redor da décima parte de seu percurso total, isto é, por aproximadamente 36 ou 37 graus. Da mesma forma, a maior maré sobe após a aproximação da lua ao meridiano do lugar, quando a lua

passou pelo sol, *ou pela oposição a ele*, por aproximadamente a décima parte do movimento total entre uma maré *mais alta* e a maré *mais alta seguinte*. Suponha esta distância ao redor de 18½ graus, e a força do sol nesta distância da lua das sizígias e quadraturas terá um momento menor para aumentar e diminuir aquela parte do movimento do mar que provém do movimento da lua do que nas próprias sizígias e quadraturas na proporção do raio para o co-seno do dobro desta distância, ou de um ângulo de 37 graus, isto é, na razão de 10 000 000 para 7 986 355 e, portanto, na analogia precedente temos de colocar 0,7986355 no lugar de S.

Mas além disto, a força da lua nas quadraturas deve ser diminuída devido à sua declinação em relação ao equador, pois a lua nestas quadraturas, ou melhor a 18½ graus depois das quadraturas, declina em relação ao equador por aproximadamente 23°13', e a força de cada astro para mover o mar é diminuída à medida que ele declina do equador aproximadamente como o quadrado do co-seno da declinação. Logo, a força da lua nestas quadraturas é apenas 0,8570327L. Temos, portanto, L + 0,7986355S para 0,8570327L - 0,7986355S assim como 9 para 5.

Ademais, os diâmetros da órbita em que a lua deve mover-se, deixando de lado o aspecto da excentricidade, estão um para o outro assim como 69 está para 70 e, portanto, a distância entre a lua e a terra nas sizígias está para sua distância nas quadraturas, outras coisas permanecendo iguais, assim como 69 está para 70. E suas distâncias, quando avançada 18½ graus além das sizígias, onde foi gerada a maior maré, e quando passou pelas quadraturas em 18½ graus, onde foi produzida a menor maré, estão para sua distância média assim como 69,098747 e 69,897345 estão para 69½. Mas a força da lua para mover o mar varia inversamente como o cubo de sua distância. Logo, suas forças, nas distâncias maior e menor estão para sua força na distância média assim como 0,9830427 e 1,017522 estão para 1. Portanto, 1,017522L.0,7986355S está para 0,9830427.0,8570327L - 0,7986355S assim como 9 está para 5, e S está para L assim como 1 para 4,4815. Portanto, como a força do sol está para a força da gravidade assim como 1 está para 12 868 200, a força da lua estará para a força da gravidade assim como 1 está para 2 871 400.

COROLÁRIO I – Como as águas atraídas pela força do sol sobem à altura de 1 pé e 11⅟₃₀ polegadas, a força da lua irá subir as mesmas à altura de 8 pés e 7⁵⁄₂₂ polegadas, e as forças conjuntas de ambos vão subir as mesmas à altura de 10½ pés, e quando a lua está em seu perigeu, à altura de 12½ pés, e mais, especialmente quando o vento sopra na mesma direção que a maré. E uma força desta grandeza é mais do que suficiente para produzir todos os

movimentos do mar, e concorda bem com a razão destes movimentos, pois nos mares que estão livres e abertos de leste a oeste, como no Oceano Pacífico, e naquelas regiões dos Oceanos Atlântico e Etiópico que estão fora dos trópicos, as águas sobem comumente a 6, 9, 12 ou 15 pés, mas no Oceano Pacífico, que é de uma profundidade maior, assim como de uma extensão maior, se diz que as marés são maiores do que nos Oceanos Atlântico e Etiópico, pois, para elevar por completo uma maré é necessário uma extensão de mar de leste a oeste não menor do que 90 graus. No Oceano Etiópico as águas sobem a uma altura menor dentro dos trópicos do que nas zonas temperadas, devido a estreiteza do mar entre a África e as partes sulinas da América. No meio do mar aberto as águas não podem subir sem descer juntas e, ao mesmo tempo, nas costas leste e oeste quando, não obstante, em nossos mares estreitos, elas devem incidir nestas praias alternadamente. Devido a isto há comumente apenas uma pequena maré cheia e baixa nas ilhas que estão distantes do continente. E pelo contrário, as marés altas e baixas devem ser maiores do que o normal em alguns portos onde as águas são forçadas com grande violência para dentro e para fora através de canais rasos para encher e esvaziar as baías alternadamente, como em Plymouth e Chepstow Bridge na Inglaterra, nas montanhas de São Miguel, e na cidade de Avranches, na Normandia, e em Cambaia e Pegu nas Índias Orientais. Nestes lugares o mar é impelido para dentro e para fora com tal violência que algumas vezes coloca as praias sob a água e outras vezes as deixa secas por muitas milhas. E esta força do influxo e efluxo não se detém até que ela tenha subido e abaixado as águas a 30, 40, 50 ou mais pés. E uma explicação semelhante diz respeito aos canais ou estreitos longos e rasos, como o estreito de Magalhães, e àqueles canais que cercam a Inglaterra. A maré nestes portos e estreitos é grandemente aumentada devido à violência do fluxo e refluxo. Mas em praias que estão em direção ao mar profundo e aberto com um desnível pronunciado, onde as águas podem subir e descer livremente sem esta precipitação de fluxo e refluxo, a razão das marés concorda com as forças do sol e da lua.

COROLÁRIO II – Como a força da lua para mover o mar está para a força da gravidade assim como 1 para 2 871 400, é evidente que esta força é desprezível em experiências estáticas ou hidrostáticas, ou mesmo nas de pêndulos. É apenas nas marés que esta força se manifesta perceptivelmente.

COROLÁRIO III – Como a força da lua para mover o mar está para a força semelhante do sol assim como 4,4815 para 1, e estas forças (pelo Corolário XIV, Proposição 66, Livro I) são conjuntamente proporcionais às densidades dos corpos do sol e da lua e aos cubos de seus diâmetros aparentes, a densidade da lua está para a densidade do sol diretamente como

4,4815 para 1, e inversamente como o cubo do diâmetro da lua para o cubo do diâmetro do sol, isto é (observando que os diâmetros aparentes médios da lua e do sol são 31'16½" e 32'12"), assim como 4891 para 1000. Mas a densidade do sol estava para a densidade da terra assim como 1000 para 4000 e, portanto, a densidade da lua está para a densidade da terra assim como 4891 está para 4000, ou como 11 para 9. Portanto, o corpo da lua é mais denso e mais terrestre do que a própria terra.

COROLÁRIO IV – E como o diâmetro verdadeiro da lua (a partir das observações dos astrônomos) está para o diâmetro verdadeiro da terra assim como 100 está para 365, a massa da matéria da lua estará para a massa da matéria da terra assim como 1 para 39,788.

COROLÁRIO V – E a gravidade acelerativa na superfície da lua será ao redor de três vezes menor do que a gravidade acelerativa na superfície da terra.

COROLÁRIO VI – E a distância do centro da lua ao centro da terra estará para a distância do centro da lua ao centro de gravidade comum da terra e da lua assim como 40,788 para 39,788.

COROLÁRIO VII – E a distância média do centro da lua ao centro da terra será (nos octantes da lua) aproximadamente $60\frac{2}{5}$ dos maiores semidiâmetros da terra, pois o maior semidiâmetro da terra era de 19 658 600 pés de Paris, e a distância média entre os centros da terra e da lua, consistindo de $60\frac{2}{5}$ de tais semidiâmetros, é igual a 1 187 379 440 pés. E esta distância (pelo Corolário precedente) está para a distância do centro da lua ao centro de gravidade comum entre a terra e a lua assim como 40,788 está para 39,788, esta última distância, portanto, é de 1 158 268 534 pés. E como a lua, com relação às estrelas fixas, realiza sua revolução em $27^d7^h43\frac{4}{9}^m$, o seno verso deste ângulo que a lua percorre em um minuto é 12 752 341 para o raio 1 000 000 000 000 000, e assim como o raio está para este seno verso, assim está 1 158 268 534 para 14,7706353 pés. Portanto, a lua caindo em direção à terra por esta força que a mantém em órbita percorreria num tempo de um minuto 14,7706353 pés e, se aumentamos esta força na proporção de $178\frac{29}{40}$ para $177\frac{29}{40}$, teremos a força total da gravidade na órbita da lua, pelo Corolário, Proposição 3, e a lua caindo por esta força percorreria no tempo de um minuto 14,8538067 pés. E na 60ª parte da distância da lua ao centro da terra, isto é, à distância de 197 896 573 pés do centro da terra, um corpo caindo por seu peso percorreria de forma semelhante no tempo de um segundo 14,8538067 pés. E, portanto, à distância de 19 615 800, que compõe um semidiâmetro médio da terra, um corpo pesado percorreria ao cair no mesmo tempo 15,11175, ou 15 pés, 1 polegada e $4\frac{1}{11}$ linhas. Esta será a queda dos corpos na latitude de 45 graus. E pela tabela anterior, encontrada na

Proposição 20, a queda na latitude de Paris será um pouco maior por um excesso de aproximadamente ⅔ partes de uma linha. Portanto, por este cálculo, corpos pesados na latitude de Paris caindo no vácuo irão percorrer muito aproximadamente no tempo de um segundo 15 pés de Paris, 1 polegada e $4\frac{25}{33}$ linhas. E se a gravidade for diminuída removendo-se uma quantidade igual à força centrífuga naquela latitude que surge do movimento diurno da terra, os corpos pesados lá caindo irão percorrer no tempo de um segundo 15 pés, 1 polegada e 1½ linhas. E com esta velocidade caem realmente os corpos pesados na latitude de Paris, como mostramos acima nas Proposições 4 e 19.

COROLÁRIO VIII – A distância média entre os centros da terra e da lua nas sizígias da lua é igual a 60 dos maiores semidiâmetros da terra, subtraindo-se apenas ao redor de uma 30ª parte de um semidiâmetro, e nas quadraturas da lua a distância média dos mesmos centros é de 60⅚ de tais semidiâmetros da terra, pois estas duas distâncias estão para a distância média da lua nos octantes assim como 69 e 70 estão para 69½, pela Proposição 28.

COROLÁRIO IX – A distância média entre os centros da terra e da lua nas sizígias da lua é de 60 semidiâmetros médios da terra e uma 10ª parte de um semidiâmetro, e nas quadraturas da lua a distância média entre os mesmos centros é de 61 semidiâmetros médios da terra, subtraindo-se uma 30ª parte de um semidiâmetro.

COROLÁRIO X – Nas sizígias da lua sua paralaxe horizontal média nas latitudes de 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90 graus é de 57'20", 57'16", 57'14", 57'12", 57'10", 57'8", 57'4", respectivamente.

Nestes cálculos não considero a atração magnética da terra, cuja quantidade é muito pequena e desconhecida. Se esta quantidade for alguma vez obtida e se as medidas em graus sobre o meridiano, os comprimentos dos pêndulos isócronos nas paralelas diferentes, as leis dos movimentos do mar e a paralaxe da lua, juntamente com os diâmetros aparentes do sol e da lua, puderem ser determinados mais exatamente a partir dos fenômenos, poderemos então ser capazes de realizar estes cálculos com uma precisão maior.

PROPOSIÇÃO XXXVIII. PROBLEMA XIX

Descobrir a forma do corpo da lua.

Se o corpo da lua fosse fluido como nosso mar, a força da terra para subir este fluido nas partes mais próximas e mais afastadas estaria para a força da lua com a qual nosso mar é levantado nos lugares sob a lua e opostos a

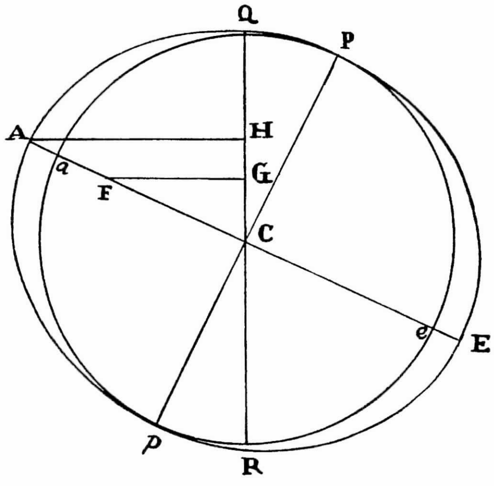
ela assim como a gravidade acelerativa da lua em direção à terra está para a gravidade acelerativa da terra em direção a lua, e, conjuntamente, assim como o diâmetro da lua está para o diâmetro da terra, isto é, assim como 39,788 para 1 e 100 para 365 conjuntamente, ou como 1081 para 100. Portanto, como nosso mar, pela força da lua, é levantado em 8⅗ pés, o fluido lunar seria levantado pela força da terra a 93 pés. Devido a isto a forma da lua seria um esferóide, cujo diâmetro maior prolongado passaria através do centro da terra, e excederia os diâmetros perpendiculares a ele por 186 pés. Uma tal figura, portanto, a lua possui, e deve ter tido desde o início. Q.E.I.

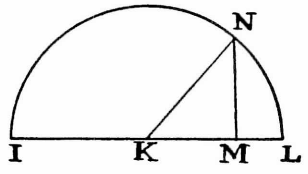
COROLÁRIO – A isto se deve que a mesma face da lua é sempre voltada para a terra. O corpo da lua não poderia estar em qualquer outra posição, pois sempre retornaria a esta situação por um movimento libratório. Estas librações, contudo, devem ser extremamente lentas, devido à fraqueza das forças que as excitam, de forma que a face da lua, que deveria estar sempre direcionada para a terra, pode, devido ao motivo designado na Proposição 17, ser girada em direção ao outro foco da órbita da lua sem corrigir-se imediatamente e girar novamente em direção à terra.

LEMA I

Se APEp representa a terra uniformemente densa, marcada com o centro C, os pólos P e p, e o equador AE; e se ao redor do centro C, com o raio CP, supomos ser descrita a esfera Pape, e QR denotar o plano sobre o qual uma linha reta traçada do centro do sol ao centro da terra fica em ângulo reto; e supomos além disto que as várias partículas de todo o exterior da terra PapAPepE, fora da altura da dita esfera, tentam se afastar em direção a ambos os lados do plano QR, cada partícula por uma força proporcional à sua distância a este plano; afirmo, em primeiro lugar, que a força e eficácia total de todas as partículas que estão situadas em AE, o círculo do equador, e dispostas uniformemente fora do globo, cercando-o da forma de um anel, para girar a terra ao redor de seu centro, está para a força e eficácia total de tantas partículas naquele ponto A do equador que está à maior distância do plano QR, para girar a terra ao redor de seu centro com um movimento circular semelhante assim como 1 está para 2. E este movimento circular será realizado ao redor de um eixo que está na seção comum do equador e do plano QR.

Pois seja descrito o semicírculo INL a partir do centro K com o diâmetro IL. Suponha a semicircunferência INL dividida em inumeráveis partes





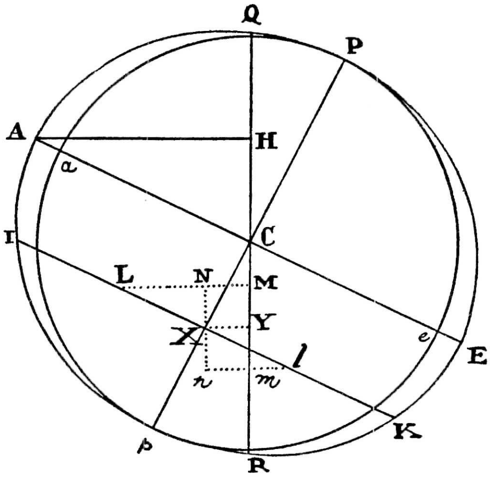
iguais, e a partir das várias partes N para o diâmetro IL incida os senos NM. Então as somas dos quadrados de todos os senos NM serão iguais às somas dos quadrados dos senos KM, e ambas somas juntas serão iguais às somas dos quadrados de tantos semidiâmetros KN. Portanto, a soma dos quadrados de todos os senos NM será somente à metade maior do que a soma dos quadrados de tantos semidiâmetros KN.

Suponha agora a circunferência do círculo AE dividida no mesmo número de pequenas partes iguais, e que a partir de cada parte F uma perpendicular FG incide sobre o plano QR assim como a perpendicular AH a partir do ponto A. Então a força com que a partícula F se afasta do plano QR será (pela suposição) como esta perpendicular FG, e esta força multiplicada pela distância CG representará o poder da partícula F para girar a terra ao redor de seu centro. E, portanto, o poder de uma partícula no lugar F estará para o poder de uma partícula no lugar A assim como FGxGC está para AHxHC, isto é, assim como FC^2 está para AC^2. Portanto o poder total de todas as partículas F, em seus próprios lugares F, estará para o poder do mesmo número de partículas no lugar A assim como a soma de todos os FC^2 está para a soma de todos os AC^2, isto é (pelo que demonstramos antes), assim como 1 para 2. Q.E.D.

E como a ação destas partículas é exercida na direção das linhas afastando-se perpendicularmente do plano QR, e isto igualmente de cada lado deste plano, elas irão girar ao redor da circunferência do círculo do equador, juntamente com o corpo aderente da terra, ao redor de um eixo que está tanto no plano QR quanto no equador.

LEMA II

Supondo ainda as mesmas coisas, afirmo, em segundo lugar, que a força ou poder total de todas as partículas situadas em todo lugar ao redor da esfera para girar a terra ao redor do dito eixo está para a força total do mesmo número de partículas, dispostas uniformemente ao redor da circunferência total do equador AE na forma de um anel para girar toda a terra com o mesmo movimento circular assim como 2 está para 5.



Pois seja IK qualquer círculo menor paralelo ao equador AE, e sejam L*l* quaisquer duas partículas iguais neste círculo, situadas fora da esfera P*ape*. Se sobre o plano QR, que está em ângulo reto com um raio traçado ao sol, incidimos as perpendiculares LM e *lm*, as forças totais com que estas partículas se afastam do plano QR serão proporcionais às perpendiculares LM e *lm*. Seja a linha reta L*l* traçada paralela ao plano P*ape*, e divida-a ao meio em X, e através do ponto X trace N*n* paralela ao plano QR, e encontrando as perpendiculares LM e *lm* em N e *n*, e sobre o plano QR incida a perpendicular XY. E as forças contrárias das partículas L e *l* para girar ao redor da terra na direção contrária são como LM.MC e *lm.m*C, isto é, como LN.MC + NM.MC e *ln.m*C – *nm.m*C, ou LN.MC + NM.MC e LN.*m*C – NM.*m*C, e LN.M*m* – NM.(MC + *m*C), a diferença entre as duas, é a força conjunta de ambas para fazer com que a terra gire. A parte positiva desta diferença LN.M*m*, ou 2LN.NX, está para 2AH.HC, a força das duas partículas do mesmo tamanho situadas em A, assim como LX^2 está para AC^2, e a parte negativa NM.(MC + *m*C), ou 2XY.CY, está para 2AH.HC, a força das mesmas duas partículas si-

tuadas em A, assim como CX^2 está para AC^2. E, portanto, a diferença das partes, isto é, a força das duas partículas L e *l*, tomadas conjuntamente, para girar a terra ao redor, está para a força das duas partículas iguais às anteriores e situadas no lugar A para girar a terra de forma semelhante, assim como $LX^2 - CX^2$ está para AC^2. Mas supondo-se a circunferência IK do círculo IK dividida num número infinito de pequenas partes iguais L, todas as LX^2 estarão para o número semelhante de IX^2 assim como 1 para 2 (pelo Lema 1), e para o mesmo número de AC^2 assim como IX^2 está para $2AC^2$, e o mesmo número de CX^2 para o mesmo tanto de AC^2 assim como $2CX^2$ está para $2AC^2$. Portanto, as forças combinadas de todas as partículas na circunferência do círculo IK estão para as forças conjuntas do mesmo tanto de partículas no lugar A assim como $IX^2 - 2CX^2$ está para $2AC^2$ e, portanto, (pelo Lema 1) para as forças conjuntas do mesmo número de partículas na circunferência do círculo AE assim como $IX^2 - 2CX^2$ está para AC^2.

Agora supondo-se P*p*, o diâmetro da esfera, dividido num número infinito de partes iguais, sobre as quais se supõe estar um número igual de círculos IK, a matéria na circunferência de cada círculo IK será como IX^2. Portanto, a força desta matéria para fazer com que a terra gire será como IX^2 por $IX^2 - 2CX^2$, e a força da mesma matéria, se ela estivesse situada na circunferência do círculo AE, seria como IX^2 por AC^2. E, portanto, a força de todas as partículas de toda a matéria situada fora da esfera nas circunferências de todos os círculos está para a força do mesmo número de partículas situadas na circunferência do maior círculo AE assim como todos os IX^2 por $IX^2 - 2CX^2$ estão para o mesmo número de IX^2 por AC^2, isto é, como todos os $AC^2 - CX^2$ por $AC^2 - 3CX^2$ estão para o mesmo tanto de $AC^2 - CX^2$ por AC^2, isto é, como todos os $AC^4 - 4AC^2.CX^2 + 3CX^4$ estão para o mesmo tanto de $AC^4 - AC^2.CX^2$, isto é, como toda a quantidade fluente cuja fluxão é $AC^4 - 4AC^2.CX^2 + 3CX^4$ está para toda quantidade fluente cuja fluxão é $AC^4 - AC^2.CX^2$ e, portanto, pelo método das fluxões, assim como $AC^4.CX - \frac{4}{3}AC^2.CX^3 + \frac{3}{5}CX^5$ está para $AC^4.CX - \frac{1}{3}AC^2.CX^3$, isto é, se para CX escrevemos o todo C*p*, ou AC, assim como $\frac{4}{15}AC^5$ está para $\frac{2}{3}AC^5$, isto é, como 2 está para 5. Q.E.D.

Lema III

Supondo ainda as mesmas coisas, afirmo, em terceiro lugar, que o movimento de toda a terra ao redor do eixo mencionado acima decorrente dos movimentos de todas as partículas, estará para o movimento do mencionado anel ao

redor do mesmo eixo numa razão composta da razão da matéria na terra para a matéria no anel, e da razão de três quadrados do arco do quadrante de qualquer círculo para dois quadrados de seu diâmetro, isto é, na razão da matéria para a matéria, e do número 925 275 para o número 1 000 000.

Pois o movimento de um cilindro que gira ao redor de seu eixo em repouso está para o movimento da esfera inscrita girando junto com ele assim como quaisquer quatro quadrados iguais estão para três círculos inscritos em três destes quadrados[1], e o movimento deste cilindro está para o movimento de um anel extremamente fino que circunda a esfera e o cilindro em seu contato comum assim como o dobro da matéria no cilindro está para o triplo da matéria no anel, e este movimento do anel, continuado uniformemente ao redor do eixo do cilindro, está para o movimento uniforme do mesmo ao redor de seu próprio diâmetro realizado no mesmo tempo periódico assim como está a circunferência de um círculo para o dobro de seu diâmetro.

Hipótese II

Se fossem removidas as outras partes da terra, e o anel remanescente fosse transladado sozinho ao redor do sol na órbita da terra pelo movimento anual, enquanto ao mesmo tempo pelo movimento diurno ele girasse ao redor de seu próprio eixo inclinado em relação ao plano da eclíptica por um ângulo de 23½ graus, o movimento dos pontos equinociais seria o mesmo, quer o anel fosse fluido ou se ele fosse constituído de uma matéria dura e rígida.

Proposição XXXIX. Problema XX

Descobrir a precessão dos equinócios.

O movimento horário médio dos nós da lua numa órbita circular, quando os nós estão nas quadraturas, era de 16''35'''$16^{iv}36^{v}$. A metade dele, 8''17'''$38^{iv}18^{v}$ (pelas razões explicadas acima), é o movimento horário médio dos nós em tal órbita, movimento este que num ano sideral completo é de 20°11'46''. Como, portanto, os nós da lua em tal órbita retrocederiam

1. Apêndice, Nota 20.

anualmente 20°11'46" e, se houvessem mais luas, o movimento dos nós de cada uma (pelo Corolário XVI, Proposição 66, Livro I) seria como seu tempo periódico, se sobre a superfície da terra uma lua girasse no tempo de um dia sideral, o movimento anual dos nós desta lua estaria para 20°11'46" assim como 23^h56^m, o dia sideral, está para $27^d7^h43^m$, o tempo periódico de nossa lua, isto é, assim como 1436 está para 39 343. E a mesma coisa aconteceria aos nós de um anel de luas circundando a terra, quer estas luas não tocassem uma à outra mutuamente, quer elas fossem fundidas e transformadas num anel contínuo, ou quer cada anel se tornasse rígido e inflexível.

Vamos então supor que este anel tem uma quantidade de matéria igual a toda da terra exterior P*ap*AP*ep*E, que está fora da esfera P*ape* (ver Fig., Lema 2). Como esta esfera está para aquela terra exterior assim como aC^2 está para AC^2 - aC^2, isto é (observando que PC ou *a*C, o menor semidiâmetro da terra, está para AC, o maior semidiâmetro da mesma, assim como 229 está para 230), assim como 52 441 está para 459; se este anel circundasse a terra ao redor do equador, e ambos girassem juntos ao redor do diâmetro do anel, o movimento do anel (pelo Lema 3) estaria para o movimento da esfera interior assim como 459 está para 52 441 e 1 000 000 para 925 275 conjuntamente, isto é, assim como 4590 está para 485 223. Portanto, o movimento do anel estaria para a soma dos movimentos do anel e da esfera assim como 4590 está para 489 813. Portanto, se o anel adere-se à esfera, e comunica seu movimento a ela, pelo qual seus nós ou pontos equinociais retrocedem, o movimento remanescente no anel estará para seu movimento anterior assim como 4590 está para 489 813, devido ao qual o movimento dos pontos equinociais será diminuído na mesma razão. Portanto, o movimento dos pontos equinociais do corpo, composto do anel e da esfera, estará para o movimento de 20°11'46" assim como 1 436 está para 39 343 e 4 590 para 489 813 conjuntamente, isto é, assim como 100 para 292 369. Mas as forças pelas quais os nós de um número de luas (como foi explicado acima), e portanto pelas quais os pontos equinociais retrocedem (isto é, as forças 3IT, na Fig., Proposição 30), estão nas várias partículas como as distâncias destas partículas ao plano QR, e por estas forças as partículas se afastam deste plano. Portanto (pelo Lema 2), se a matéria do anel fosse espalhada por toda a superfície da esfera, na forma da figura P*ap*AP*ep*E, de maneira a formar esta parte exterior da terra, a força ou poder total de todas as partículas para girar a terra ao redor de qualquer diâmetro do equador e, portanto, para mover os pontos equinociais, iria tornar-se menor do que antes na proporção de 2 para 5. Portanto, a regressão anual dos equinócios estaria agora para 20°11'46" assim como 10 está para 73092, isto é, seria de 9"56"'50^{iv}.

Mas como o plano do equador é inclinado em relação ao da eclíptica, este movimento diminui na razão do seno 91 706 (que é o co-seno de 23½ graus) para o raio 100 000, e o movimento remanescente será agora 9''7'''20^{iv}, que é a precessão anual dos equinócios decorrente da força do sol.

Mas a força da lua para mover o mar estava para a força do sol aproximadamente como 4,4815 está para 1, e a força da lua para mover os equinócios está para aquela do sol na mesma proporção. Logo, a precessão anual dos equinócios decorrente da força da lua será 40''52'''52^{iv}, e a precessão anual total decorrente das forças conjuntas de ambos será 50''00'''12^{iv}, cujo valor concorda com os fenômenos, pois a precessão dos equinócios, pelas observações astronômicas, é aproximadamente 50'' anualmente.

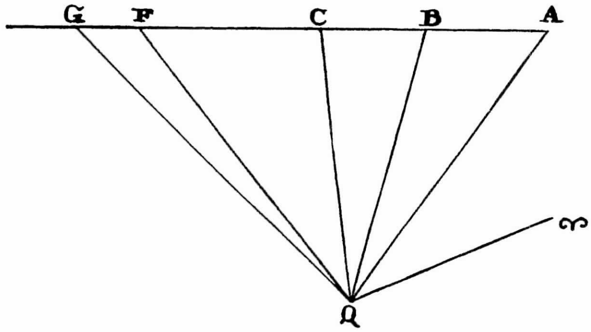
Se a altura da terra no equador excede sua altura nos pólos por mais do que 17⅙ milhas, sua matéria será mais rarefeita próximo da superfície do que no centro, e a precessão dos equinócios será aumentada pelo excesso da altura e diminuída pela rarefação maior.

E agora que descrevemos o sistema do sol, da terra, da lua e dos planetas, resta que acrescentemos algo sobre os cometas.

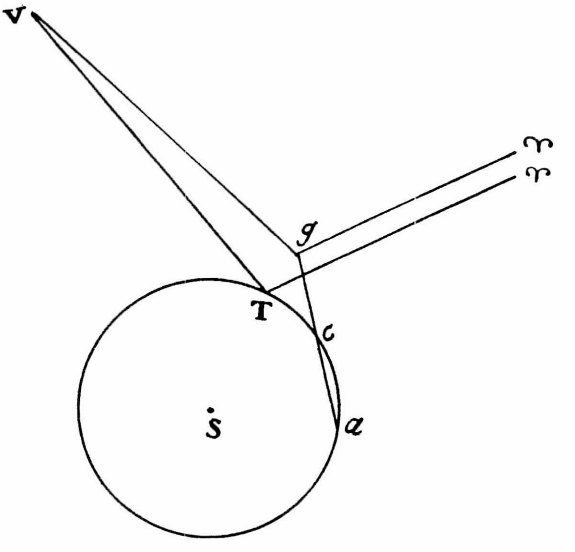
LEMA IV

Os cometas estão mais afastados do que a lua e se encontram nas regiões dos planetas.

Como os cometas foram colocados pelos astrônomos além da lua, já que eles não apresentam paralaxe diurna, da mesma forma sua paralaxe anual é uma prova convincente de sua penetração nas regiões dos planetas, pois todos os cometas que se movem num percurso direto de acordo com a ordem dos signos, no final de suas aparições tornam-se mais lentos ou retrógrados do que o normal, se a terra está entre eles e o sol, e mais rápidos do que o normal, se a terra está se aproximando a uma oposição heliocêntrica com eles. Por outro lado, aqueles que se movem contrariamente à ordem dos signos, perto do fim de suas aparições aparecem mais rápidos do que eles teriam de estar, se a terra está entre eles e o sol, e mais lentos, e talvez retrógrados, se a terra está do outro lado de sua órbita. Isto procede principalmente das diversas situações que a terra adquire no curso de seu movimento, da mesma forma que acontece aos planetas, que aparecem algumas vezes retrógrados, algumas vezes mais lentamente, e algumas vezes mais rapidamente, progressivos, conforme o movimento da terra concorda com



aquele do planeta, ou é direcionado para o lado contrário. Se a terra move-se na mesma direção que o cometa, mas, por um movimento angular ao redor do sol, muito mais rapidamente de modo que linhas retas traçadas da terra ao cometa convergem em direção das partes além do cometa, o cometa visto da terra, devido a seu movimento mais lento, aparecerá retrógrado; e mesmo se a terra é mais lenta do que o cometa, sendo subtraído o movimento da terra, o movimento do cometa vai pelo menos aparecer retardado; mas se a terra tende em direção contrária ao cometa, o movimento do cometa vai aparecer acelerado. E a distância do cometa pode ser inferida a partir desta aparente aceleração, ou retardação, ou movimento regressivo. Sejam ♈ QA, ♈ QB, ♈ QC três longitudes observadas do cometa ao redor do tempo de sua primeira aparição, e ♈ QF sua última longitude observada antes de sua desaparição. Trace a linha reta ABC, cujas partes AB e BC, interceptadas entre as linhas retas QA e QB, QB e QC, possam estar uma para a outra assim como os dois tempos entre as três primeiras observações. Prolongue AC até G, de forma que AG possa estar para AB assim como o tempo entre a primeira e última observações está para o tempo entre a primeira e segunda, e ligue QG. Agora, se o cometa se movesse uniformemente numa linha reta, e a terra ou permanecesse parada, ou fosse da mesma forma levada para frente numa linha reta por um movimento uniforme, o ângulo ♈ QG seria a longitude do cometa no tempo da última observação. Portanto, o ângulo FQG, que é a diferença da longitude, procede da desigualdade dos movimentos do cometa e da terra. E se a terra e o cometa se deslocam em direções contrárias, este ângulo é adicionado ao ângulo ♈ QG, e acelera o movimento aparente do cometa; mas se o cometa move-se na mesma direção que a terra, ele é subtraído, e ou retarda o movimento do cometa, ou talvez o torna retrógrado, como acabamos de explicar. Este ângulo, portanto, decorrente principalmente do movimento da terra, é para ser considerado corretamente a paralaxe do cometa, aqui sendo desprezados algum au-



mento ou diminuição pequenos que possam surgir do movimento desigual do cometa em sua órbita. A partir desta paralaxe deduzimos assim a distância do cometa. Seja S o sol, *ac*T a grande órbita, *a* o lugar da terra na primeira observação, *c* o lugar da terra na terceira observação, T o lugar da terra na última observação, e T ♈ uma linha reta traçada ao início de Áries. Faça o ângulo ♈ TV igual ao ângulo ♈ QF, isto é, igual à longitude do cometa no momento em que a terra está em T; ligue *ac*, e a prolongue para *g*, de forma que *ag* possa estar para *ac* assim como AG está para AC; e *g* será o lugar onde a terra teria chegado no tempo da última observação, se ela tivesse continuado a mover-se uniformemente na linha reta *ac*. Portanto, se traçamos *g* ♈ paralela a T ♈, e fazemos o ângulo ♈ *g*V igual ao ângulo ♈ QG, este ângulo ♈ *g*V será igual à longitude do cometa visto do lugar *g*, e o ângulo TV*g* será a paralaxe que surge da tranferência da terra do lugar *g* para o lugar T; e portanto V será o lugar do cometa no plano da eclíptica. E este lugar V é comumente mais baixo do que a órbita de Júpiter.

A mesma coisa pode ser deduzida a partir da curvatura do caminho dos cometas, pois estes corpos movem-se quase que em grandes círculos, enquanto suas velocidades são grandes, mas próximo do fim do seu percurso, quando aquela parte do seu movimento aparente que surge da paralaxe tem uma proporção maior para seu movimento aparente total, eles comumente se desviam destes círculos, e quando a terra vai para um lado, eles desviam para o outro. E esta deflexão, como ela corresponde ao movimento da terra, tem de surgir principalmente da paralaxe, e sua quantidade é tão considerável que, por meus cálculos, situa os cometas que estão desaparecendo

bem mais baixos do que Júpiter. Daqui segue-se que quando eles se aproximam de nós em seus perigeus e afélios, eles descem freqüentemente abaixo das órbitas de Marte e dos planetas inferiores.

A grande aproximação dos cometas é também confirmada pela luz de suas cabeças, pois a luz de um corpo celeste, iluminada pelo sol, e se afastando para as partes remotas, diminui como a quarta potência da distância, a saber, como o quadrado, devido ao aumento da distância ao sol, e como um outro quadrado, devido à diminuição do diâmetro aparente. Portanto, se são dados a quantidade de luz e o diâmetro aparente de um cometa, sua distância também será dada, considerando-se a distância do cometa para a distância de um planeta diretamente como seus diâmetros e inversamente como a raiz quadrada de suas luzes. Assim, no cometa do ano de 1682, o Sr. Flamsteed observou com um telescópio de 16 pés, e mediu com um micrômetro, o menor diâmetro de sua cabeça, 2'00"; mas o núcleo ou estrela no meio da cabeça só chegava à décima parte desta medida e, portanto, seu diâmetro era de apenas 11" ou 12"; mas na luz e esplendor de sua cabeça ele ultrapassava aquele do cometa do ano de 1680, e podia ser comparado com as estrelas da primeira ou segunda magnitude. Vamos supor que Saturno com seu anel era aproximadamente quatro vezes mais lúcido, e como a luz do anel era quase igual à luz do globo interior, e o diâmetro aparente do globo é aproximadamente 21", e portanto a luz conjunta do globo e do anel seria igual à luz de um globo cujo diâmetro é 30", segue-se que a distância do cometa estava para a distância de Saturno inversamente como 1 está para $\sqrt{4}$, e diretamente como 12" para 30", isto é, como 24 para 30, ou 4 para 5. Novamente, o cometa no mês de abril de 1665, como nos informa Hewelcke, excedia quase todas as estrelas fixas em esplendor, e mesmo o próprio Saturno, sendo de uma cor muito mais viva; pois este cometa era mais lúcido do que o outro que tinha aparecido ao redor do fim do ano anterior e que tinha sido comparado com as estrelas da primeira magnitude. O diâmetro de sua cabeça era aproximadamente 6', mas o núcleo, comparado com os planetas por meio de um telescópio, era claramente menor do que Júpiter, e algumas vezes julgado menor, algumas vezes julgado igual, ao globo de Saturno dentro do anel. Como, então, os diâmetros das cabeças dos cometas raramente ultrapassam 8' ou 12', e o diâmetro do núcleo ou estrela central é apenas ao redor de uma décima ou talvez décima-quinta parte do diâmetro da cabeça, aparece que estas estrelas têm geralmente ao redor da mesma magnitude aparente que os planetas. Mas como suas luzes podem ser freqüentemente comparadas com a luz de Saturno, e de fato algumas vezes a excedem, é evidente que todos os cometas em seus periélios devem ser co-

locados ou abaixo ou não muito acima de Saturno; e estão muito errados aqueles que os removem para quase tão longe quanto as estrelas fixas; pois se fosse assim, os cometas não poderiam receber mais luz de nosso sol do que nossos planetas recebem das estrelas fixas.

Até o momento não consideramos o obscurecimento que os cometas sofrem daquela quantidade de fumaça espessa que engloba suas cabeças, e devido à qual as cabeças sempre se mostram opacas, como através de uma nuvem. Mas quanto mais um corpo é obscurecido por esta fumaça, o mais próximo ele deve poder chegar ao sol, para que ele possa competir com os planetas na quantidade de luz que ele reflete. Portanto, é provável que os cometas descem bem abaixo da órbita de Saturno, como provamos antes a partir de suas paralaxes. Mas, acima de tudo, isto é evidenciado a partir de suas caudas, que deve ser devida ou à luz do sol refletida por uma fumaça que surge delas, e dispersa através do éter, ou à luz de suas próprias cabeças. No primeiro caso, temos de diminuir a distância dos cometas, a fim de que não sejamos obrigados a admitir que a fumaça surgindo de suas cabeças se propaga através de uma extensão de espaço tão vasta e com uma velocidade e expansão tal que vai parecer de todo inacreditável. No último caso, toda a luz da cabeça e da cauda é para ser atribuída ao núcleo central. Mas, então, se supomos toda esta luz ser unida e condensada dentro do disco do núcleo, certamente o núcleo vai exceder em muito o próprio Júpiter em esplendor, especialmente quando ele emite uma cauda muito grande e lúcida. Se, portanto, sob um diâmetro aparente menor, ele reflete mais luz, ele deve ser muito mais iluminado pelo sol e, portanto, muito mais próximo a ele, e pelo mesmo argumento as cabeças dos cometas dirigem-se algumas vezes para dentro da órbita de Vênus, a saber, quando, estando escondidas sob os raios do sol, eles emitem caudas imensas e esplêndidas, como feixes de fogo, como algumas vezes eles o fazem. Pois, supondo-se toda esta luz reunida numa única estrela, ela excederia algumas vezes não apenas a Vênus, mas a um grande número de Vênus reunidos em um.

Por último, a mesma coisa é inferida a partir da luz das cabeças, que aumenta quando os cometas se afastam da terra em direção ao sol, e diminui no seu retorno do sol em direção à terra. Assim, o cometa do ano de 1665 (pelas observações de Hewelcke), desde o momento em que foi observado pela primeira vez, estava sempre perdendo seu movimento aparente e, portanto, já tinha passado seu perigeu. Apesar disto, o esplendor de sua cabeça estava aumentando diariamente, até que sendo escondido sob os raios do sol, o cometa cessou de aparecer. O cometa do ano de 1683 (pelas observações do mesmo Hewelcke), ao redor do fim de julho, quando apareceu

pela primeira vez, movia-se numa taxa muito baixa, avançando apenas ao redor de 40 ou 45 minutos em sua órbita no período de um dia, mas a partir deste momento seu movimento diurno estava crescendo continuamente, até 4 de setembro, quando ele subiu a aproximadamente 5 graus. Portanto, em todo este intervalo de tempo, o cometa estava se aproximando da terra. Isto é provado de forma similar pelo diâmetro de sua cabeça, medido com um micrômetro. Pois, em 6 de agosto, Hewelcke encontrou-o de apenas 6'5", incluindo a cabeleira, e em 2 de setembro observou que media 9'7". Logo, sua cabeça aparecia bem menor ao redor do início do que em direção ao final do movimento, embora no início, devido a estar mais próximo do sol, ela aparecia bem mais lúcida do que no final, como declara o mesmo Hewelcke. Portanto, em todo este intervalo de tempo, devido a se afastar do sol, ele decrescia em esplendor, apesar de se aproximar em direção à terra. O cometa do ano de 1618, ao redor do meio de dezembro, e aquele do ano de 1680, ao redor do final do mesmo mês, moviam-se com sua maior velocidade, e estavam portanto em seus perigeus, mas o maior esplendor de suas cabeças foi visto duas semanas antes, quando eles tinham acabado de separar-se dos raios do sol, e o maior esplendor de suas caudas um pouco mais cedo, quando ainda mais próximos do sol. A cabeça do primeiro cometa (de acordo com as observações de Cysat), em 1 de dezembro, aparecia maior do que as estrelas de primeira magnitude e, em 16 de dezembro (então no perigeu), estava pouco diminuída em magnitude, mas muito diminuída no esplendor e brilho de sua luz. Em 7 de janeiro Kepler, estando incerto sobre a cabeça, deixou de observar. Em 12 de dezembro a cabeça do último cometa foi vista e observada pelo Sr. Flamsteed, quando distante apenas 9 graus do sol, coisa difícil de fazer numa estrela da terceira magnitude. Em 15 e 17 de dezembro, ele aparecia como uma estrela da terceira magnitude, seu lustre sendo diminuído pelo brilho das nuvens próximas de onde o sol se põe. Em 26 de dezembro, quando movia-se com a maior velocidade, estando quase em seu perigeu, era menor do que a boca de Pégaso, uma estrela da terceira magnitude. Em 3 de janeiro, aparecia como uma estrela da quarta. Em 9 de janeiro, como uma da quinta. Em 13 de janeiro, foi escondido pelo esplendor da lua, então em seu momento crescente. Em 25 de janeiro, chegava a ser igual apenas às estrelas da sétima magnitude. Se comparamos intervalos iguais de tempo, considerados num lado do perigeu e então do outro lado, encontraremos que a cabeça do cometa, que em ambos intervalos de tempo estava longe, mas ainda igualmente afastada da terra, e devia portanto ter brilhado com esplendor igual, aparecia mais brilhante sobre o lado do perigeu em direção ao sol, e desaparecia sobre o outro. Portanto,

a partir da grande diferença de luz numa situação e na outra, concluímos da grande proximidade entre o sol e o cometa na primeira situação, pois a luz dos cometas tende a ser regular, e a aparecer maior quando as cabeças movem-se mais rapidamente, e estão portanto em seus perigeus, exceto na medida em que é aumentada pela proximidade com o sol.

COROLÁRIO I – Portanto os cometas brilham pela luz do sol que eles refletem.

COROLÁRIO II – Pelo que foi dito, podemos entender da mesma forma porque os cometas são vistos tão freqüentemente naquela região em que o sol está, e tão raramente na outra. Se eles fossem visíveis nas regiões bem acima de Saturno, eles apareceriam mais freqüentemente nas partes opostas ao sol, pois tantos quantos houvessem nestas partes estariam mais próximos da terra, enquanto que a presença do sol obscurece e esconde aqueles que aparecem na região onde ele está. Contudo, observando a história dos cometas, encontro que quatro ou cinco vezes mais foram vistos no hemisfério em direção ao sol do que no hemisfério oposto, sem contar aqueles que foram escondidos pela luz do sol, que sem dúvida não são poucos. Pois os cometas descendo nas nossas partes nem emitem caudas, nem são tão bem iluminados pelo sol a ponto de se revelarem a nossos olhos nus, até que eles tenham chegado mais próximos de nós do que Júpiter. Mas a parte muito maior do espaço esférico, que é descrita ao redor do sol com um raio tão pequeno, está sobre aquele lado da terra em direção ao sol, e os cometas nesta parte maior são comumente mais fortemente iluminados, pois eles estão na maior parte mais próximos do sol.

COROLÁRIO III – Daqui também é evidente que os espaços celestes são vazios de resistência. Pois embora os cometas sejam carregados em trajetórias oblíquas e algumas vezes contrariamente ao percurso dos planetas, apesar disto eles movem-se para todo lado com a maior liberdade, preservando seus movimentos por um tempo excessivamente longo, mesmo onde contrários ao curso dos planetas. Muito me equivoco se eles não são uma espécie de planeta girando em órbitas que voltam nelas próprias com um movimento contínuo; pois a opinião de alguns autores, de que eles não são outra coisa que meteoros, uma opinião baseada nas mudanças contínuas que acontecem em suas cabeças, não parecem ter fundamento, pois as cabeças dos cometas são cercadas com imensas atmosferas, e as partes mais baixas destas atmosferas devem ser as mais densas. Portanto, é apenas nas nuvens, não nos corpos dos próprios cometas, que estas mudanças são observadas. Assim, a terra, se ela fosse vista a partir dos planetas, iria, sem dúvida, brilhar pela luz de suas nuvens, e o corpo sólido pouco apareceria através das

nuvens circundantes. Assim também os cinturões de Júpiter são formados nas nuvens deste planeta, pois eles modificam suas posições em relação um ao outro, e o corpo sólido de Júpiter dificilmente é visto através deles; e com maior razão devem os corpos dos cometas estar escondidos sob suas atmosferas, que são tanto mais profundas quanto mais espessas.

PROPOSIÇÃO XL. TEOREMA XX

Que os cometas movem-se em algumas das seções cônicas, tendo seus focos no centro do sol e que por raios traçados ao sol descrevem áreas proporcionais aos tempos.

Esta Proposição decorre do Corolário I, Proposição 13, Livro I, comparada com as Proposições 8, 12 e 13, Livro III.

COROLÁRIO I – Logo, se os cometas giram em órbitas fechadas, as órbitas serão elipses, e seus tempos periódicos estarão para os tempos periódicos dos planetas como a $3/2^{a}$ potência de seus eixos principais. E, portanto, os cometas, que na maior parte de seus percursos estão mais afastados do que os planetas, e devido a isto descrevem órbitas com eixos maiores, vão necessitar de um tempo maior para completar suas revoluções. Assim, se o eixo da órbita de um cometa fosse quatro vezes maior do que o eixo da órbita de Saturno, o tempo da revolução do cometa estaria para o tempo da revolução de Saturno, isto é, para 30 anos, assim como $4\sqrt{4}$ (ou 8) está para 1 e seria, portanto, de 240 anos.

COROLÁRIO II – Mas suas órbitas serão tão próximas a parábolas, que as parábolas podem ser usadas como suas órbitas sem qualquer erro perceptível.

COROLÁRIO III – E, portanto, pelo Corolário VII, Proposição 16, Livro I, a velocidade de cada cometa estará sempre para a velocidade de qualquer planeta, supondo-se que este gire na mesma distância num círculo ao redor do sol, aproximadamente como a raiz quadrada do dobro da distância do planeta ao centro do sol para a distância do cometa ao centro do sol. Vamos supor que o raio da grande órbita, ou o maior semidiâmetro da elipse que a terra descreve, seja de 100 000 000 partes. Então a terra por seu movimento diurno médio vai percorrer 1 720 212 destas partes, e 71 675½ por seu movimento horário. E, portanto, o cometa, à mesma distância média da terra ao sol, com uma velocidade que está para a velocidade da terra como $\sqrt{2}$ para 1, percorreria por seu movimento diurno 2 432 747 partes, e 101 364½ partes por seu movimento horário. Mas a distâncias maiores ou menores o

movimento diurno e horário estará para este movimento diurno e horário inversamente como a raiz quadrada das distâncias, sendo portanto dado[2].

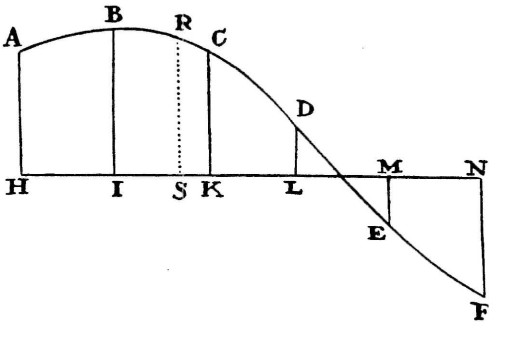
COROLÁRIO IV – Portanto, se o *latus rectum* da parábola é quatro vezes o raio da grande órbita, e o quadrado deste raio é suposto consistir de 100 000 000 partes, a área que o cometa vai percorrer diariamente por um raio traçado ao sol será de 1 216 373½ partes, e a área horária será de 50 682¼ partes. Mas, se o *latus rectum* é maior ou menor em qualquer razão, a área diurna e horária será menor ou maior inversamente como a raiz quadrada desta razão.

LEMA V

Descobrir a linha curva do tipo parabólico que vai passar através de qualquer número dado de pontos[3].

Sejam estes pontos A, B, C, D, E, F, etc., e a partir dos mesmos incida o mesmo número de perpendiculares AH, BI, CK, DL, EM, FN, etc., sobre qualquer linha reta HN dada em posição.

b 2*b* 3*b* 4*b* 5*b*
c 2*c* 3*c* 4*c*
d 2*d* 3*d*
e 2*e*
f



CASO 1 – Se HI, IK, KL etc., os intervalos dos pontos H, I, K, L, M, N etc., são iguais, tome *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b* etc., as primeiras diferenças das perpendiculares AH, BI, CK etc.; suas segundas diferenças, *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c* etc.; suas terceiras, *d*, 2*d*, 3*d* etc., quer dizer, de forma que AH - BI pode ser = *b*, BI - CK = 2b, CK - DL = 3*b*, DL + EM = 4*b*, -EM + FN = 5*b*, etc.; então *b* - 2*b* = *c* etc., e assim por diante até a última diferença, que é aqui *f*. Então, traçando qualquer perpendicular RS, que pode ser considerada como uma ordenada da

2. Apêndice, Nota 21.
3. Apêndice, Nota 22.

curva desejada, para obter o comprimento desta ordenada suponha que os intervalos HI, IK, KL, LM etc., são unidades, e seja AH = a, -HS = p, $\frac{1}{2}p$ por -IS = q, $\frac{1}{3}q$ por + SK = r, $\frac{1}{4}r$ por + SL = s, $\frac{1}{5}s$ por + SM = t; procedendo desta maneira até ME, a penúltima perpendicular, e colocando sinais negativos antes dos termos HS, IS etc., que estão no lado do ponto S em direção a A; e sinais positivos antes dos termos SK, SL etc., que estão sobre o outro lado do ponto S; e, observando bem os sinais, RS será = $a + bp + cq + dr + es + ft$ + etc.

CASO 2 – Mas se HI, IK etc., os intervalos dos pontos H, I, K, L etc., são desiguais, considere b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, etc., as primeiras diferenças das perpendiculares AH, BI, CK etc., divididas pelos intervalos entre estas perpendiculares; c, $2c$, $3c$, $4c$ etc., suas segundas diferenças, divididas pelos intervalos entre cada duas; d, $2d$, $3d$ etc., suas terceiras diferenças, divididas pelos intervalos entre cada três; e, $2e$ etc., suas quartas diferenças, divididas pelos intervalos entre cada quatro; e assim por diante; isto é, de tal forma que b possa ser = $\frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$ etc., então

$$c = \frac{b - 2b}{HK},\ 2c = \frac{2b - 3b}{IL},\ 3c = \frac{3b - 4b}{KM} \text{ etc., então } d = \frac{c - 2c}{HL},\ 2d = \frac{2c - 3c}{IM} \text{ etc.}$$

E sendo encontradas estas diferenças, seja AH = a, -HS = p, p por -IS = q, q por + SK = r, r por +SL = s, s por +SM = t; procedendo desta maneira até ME, a penúltima perpendicular; e a ordenada RS será = $a + bp + cq + dr + es + ft$ + etc.

COROLÁRIO – Portanto, as áreas de todas as curvas podem ser aproximadamente encontradas. Pois se algum número de pontos da curva a quadrar são encontrados, e for suposta uma parábola traçada através destes pontos, a área desta parábola será aproximadamente a mesma que a área da figura curvilínea proposta a quadrar. Mas a parábola pode sempre quadrar-se geometricamente pelos métodos geralmente conhecidos.

LEMA VI

Sendo dados certos lugares observados de um cometa, descobrir o lugar do mesmo em qualquer tempo dado intermediário.

Represente por HI, IK, KL, LM (na Fig. precedente) os tempos entre as observações; HA, IB, KC, LD, ME, cinco longitudes observadas do cometa; e HS o tempo dado entre a primeira observação e a longitude dese-

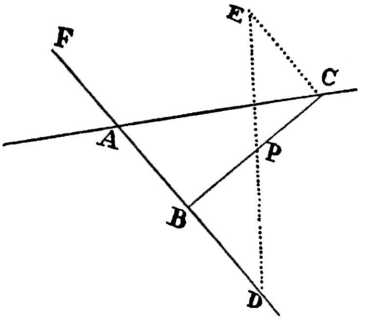
jada. Então, supondo-se uma curva regular ABCDE traçada através dos pontos A, B, C, D, E, e a ordenada RS obtida pelo Lema precedente, RS será a longitude desejada.

Pelo mesmo método, a partir de cinco latitudes observadas, podemos encontrar a latitude num tempo dado.

Se as diferenças das longitudes observadas são pequenas, digamos de 4 ou 5 graus, então três ou quatro observações serão suficientes para achar uma nova longitude e latitude. Se as diferenças são maiores, como de 10 ou 20 graus, cinco observações devem ser usadas.

Lema VII

Traçar através de um ponto dado P *uma linha reta* BC, *cujas partes* PB *e* PC, *cortadas por duas linhas retas* AB *e* AC, *em posição dadas, possam estar uma para a outra numa razão dada.*

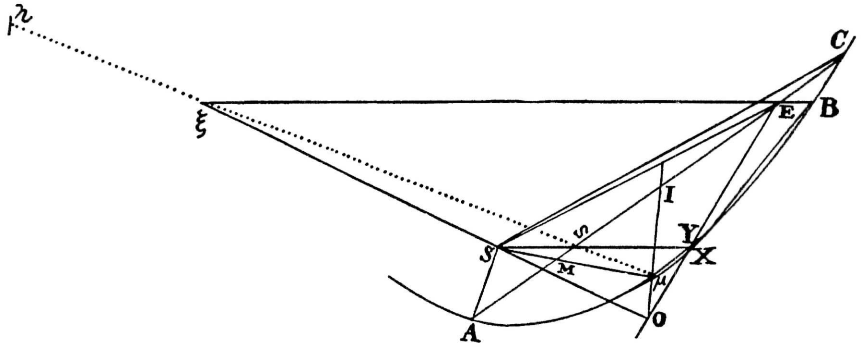


A partir do ponto dado P suponha qualquer linha reta PD traçada até qualquer uma das linhas retas dadas, como AB; e prolongue a mesma em direção a AC, a outra linha reta dada, de forma que PE possa estar para PD na razão dada. Seja EC paralela a AD. Trace CPB, e PC estará para PB assim como PE está para PD. Q.E.F.

Lema VIII

Seja ABC *uma parábola tendo seu foco em* S. *Corte o segmento* ABCI, *cujo diâmetro é* Iμ *e vértice* μ, *com a corda* AC *dividida ao meio em* I. *Prolongando* Iμ *considere* μO *igual a metade de* Iμ. *Ligue* OS, *e prolongue-a para* ξ, *de tal forma que* Sξ *possa ser igual a* 2SO. *Agora, supondo um cometa girando no arco* CBA, *trace* ξB, *cortando* AC *em* E. *Afirmo que o ponto* E *vai cortar da corda* AC *o segmento* AE, *aproximadamente proporcional ao tempo.*

Pois se ligamos EO, cortando o arco parabólico ABC em Y, e traçamos μX tocando o mesmo arco no vértice μ, e encontrando EO em X, a área



curvilínea AEXμA estará para a área curvilínea ACYμA assim como AE está para AC. Portanto, como o triângulo ASE está para o triângulo ASC na mesma razão, a área total ASEXμA estará para a área total ASCYμA assim como AE está para AC. Mas, como ξO está para SO assim como 3 está para 1, e EO está para XO na mesma razão, SX será paralela a EB. Portanto, ligando BX, o triângulo SEB será igual ao triângulo XEB. Logo, se adicionamos o triângulo EXB à área ASEXμA, e da soma subtraímos o triângulo SEB, vai sobrar a área ASBXμA, igual à área ASEXμA e, portanto, na razão para a área ASCYμA assim como AE está para AC. Mas a área ASBYμA é aproximadamente igual à área ASBXμA, e esta área ASBYμA está para a área ASCYμA assim como o tempo de descrição do arco AB está para o tempo de descrição do arco total AC. Portanto, AE está para AC aproximadamente na proporção dos tempos. Q.E.D.

Corolário – Quando o ponto B cai sobre o vértice μ da parábola, AE está para AC precisamente na proporção dos tempos.

Escólio

Se ligamos μξ cortando AC em δ, e nela tomamos ξ*n* proporcional a μB assim como 27MI está para 16Mμ, e traçamos B*n*, este B*n* vai cortar a corda AC na razão dos tempos mais precisamente do que antes; mas o ponto *n* é para ser tomado além ou sobre este lado do ponto ξ, conforme se o ponto B está mais ou menos distante do vértice principal da parábola do que o ponto μ.

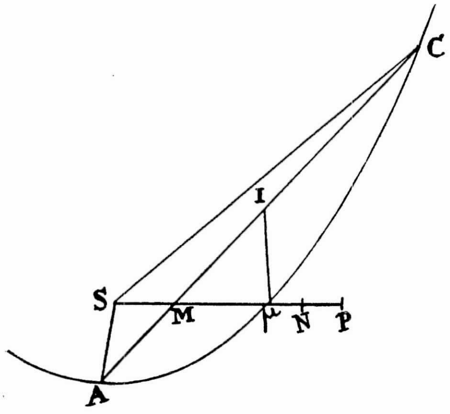
LEMA IX

As linhas retas Iμ *e* μM, *e o comprimento* $\frac{AI^2}{4S\mu}$, *são iguais entre si.*

Pois 4Sμ é o *latus rectum* da parábola pertencente ao vértice μ.

LEMA X[4]

Prolongue Sμ *até* N *e* P, *de forma que* μN *possa ser um terço de* μI, *e* SP *possa estar para* SN *assim como* SN *está para* Sμ; *e no tempo em que um cometa descreveria o arco* AμC, *se for suposto que ele move-se sempre para frente com a velocidade que ele tem numa altura igual a* SP, *ele descreveria um comprimento igual à corda* AC.



Pois supondo que no tempo mencionado o cometa avance uniformemente na linha reta que toca a parábola em μ com a velocidade que ele tem em μ, a área que ele descreveria por um raio traçado ao ponto S seria igual à área parabólica ASCμA e, portanto, o espaço contido sob o comprimento descrito na tangente e o comprimento Sμ estariam para o espaço contido sob os comprimentos AC e SM assim como a área ASCμA está para o triângulo ASC, isto é, assim como SN está para SM. Portanto, AC está para o comprimento descrito na tangente assim como Sμ está para SN. Mas como a velocidade do cometa na altura SP (pelo Corolário VI, Proposição 16, Livro I) está para a velocidade do mesmo na altura Sμ, inversamente como a raiz quadrada de SP para Sμ, isto é, na razão de Sμ para SN, segue-se que o compri-

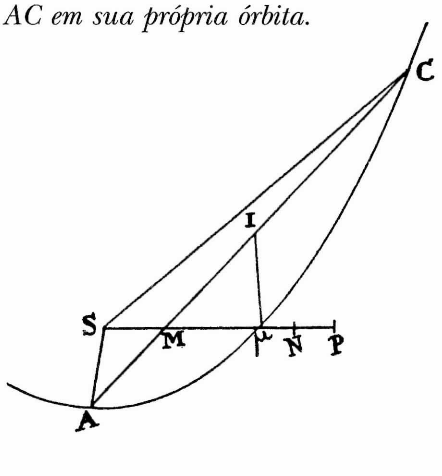
4. Apêndice, Nota 23.

mento descrito com esta velocidade estará para o comprimento no mesmo tempo descrito na tangente, assim como Sμ está para SN. Portanto, como AC, e o comprimento descrito com esta nova velocidade, estão na mesma proporção para o comprimento descrito na tangente, eles devem ser iguais entre si. Q.E.D.

COROLÁRIO – Portanto, um cometa, com aquela velocidade que ele tem na altura Sμ + ⅔Iμ, descreveria no mesmo tempo aproximadamente a corda AC.

LEMA XI

Se um cometa sem qualquer movimento caísse em direção ao sol da altura SN, *ou* Sμ + ⅓Iμ, *e ainda fosse impelido para o sol pela mesma força continuada uniformemente com que ele era impelido inicialmente, o mesmo descreveria ao descer um espaço igual ao comprimento* Iμ *na metade do tempo em que descreveria o arco AC em sua própria órbita.*



Pois no mesmo tempo que o cometa necessitaria para descrever o arco parabólico AC ele descreveria (pelo último Lema) a corda AC com aquela velocidade que ele tem na altura SP; e, portanto, (pelo Corolário VII, Proposição 16, Livro I), supondo-se que no mesmo tempo ele girasse pela força de sua própria gravidade num círculo cujo semidiâmetro era SP, ele descreveria um arco deste círculo, cujo comprimento estaria para a corda da área parabólica AC na razão de 1 para $\sqrt{2}$. Portanto, se com este peso que ele tem em direção ao sol na altura SP, ele fosse solto desta altura em direção ao sol, ele descreveria (pelo Corolário IX, Proposição 16, Livro I) na metade do tempo mencionado um espaço igual ao quadrado da metade da cor-

da mencionada, dividida por quatro vezes a altura SP, isto é, ele descreveria o espaço $\frac{AI^2}{4SP}$. Mas como o peso do cometa em direção ao sol na altura SN está para o peso do mesmo na altura SP assim como SP está para Sμ, o cometa, pelo peso que ele tem na altura SN, ao cair desta altura em direção ao sol, descreveria no mesmo tempo o espaço $\frac{AI^2}{4S\mu}$, isto é, um espaço igual ao comprimento Iμ ou μM. Q.E.D.

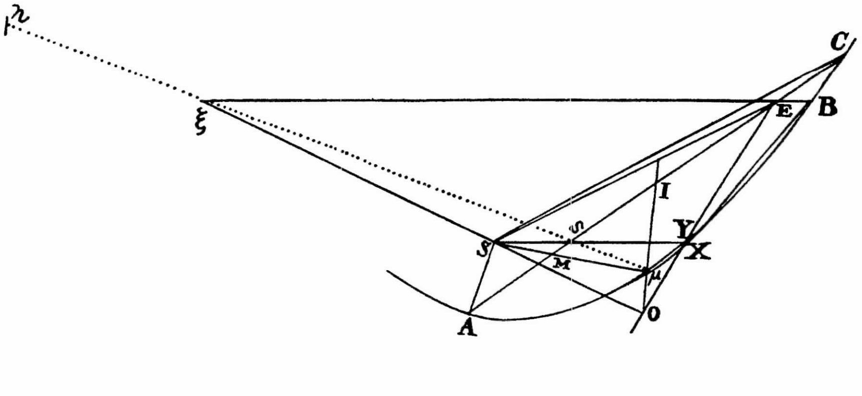
Proposição XLI. Problema XXI

A partir de três observações dadas determinar a órbita de um cometa movendo-se numa parábola.

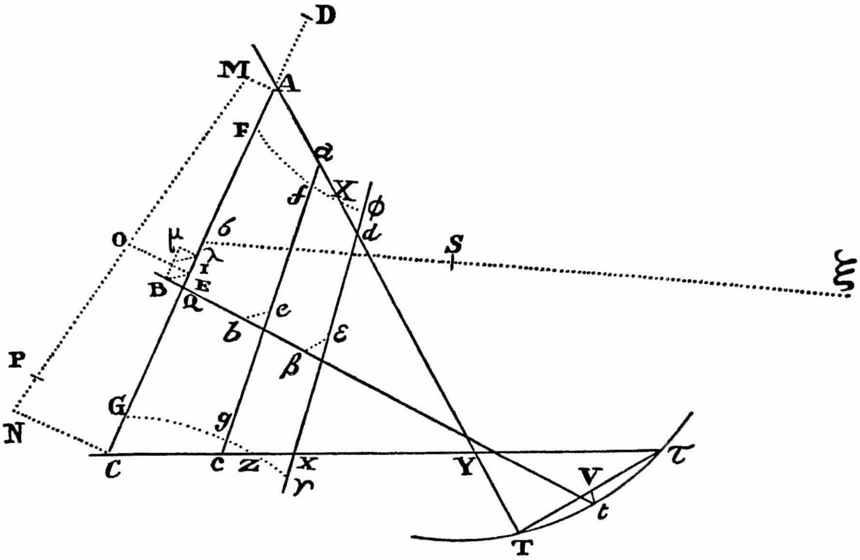
Sendo este um problema muito difícil, tentei muitos métodos de resolvê-lo, e muitos daqueles Problemas cuja composição forneci no primeiro livro tendiam a este propósito. Mas depois disto consegui chegar à solução seguinte, que é um pouco mais simples.

Selecione três observações distantes uma da outra por intervalos de tempo aproximadamente iguais, mas deixe aquele intervalo de tempo em que o cometa move-se mais lentamente ser algo maior do que o outro, a saber, de forma que a diferença dos tempos possa estar para a soma dos tempos assim como a soma dos tempos está para aproximadamente 600 dias, ou que o ponto E possa cair aproximadamente sobre M e possa desviar-se dele mais em direção a I do que em direção a A. Se tais observações diretas não estão disponíveis, deve ser encontrado um novo lugar do cometa pelo Lema 6.

Seja S o sol; T, *t* e τ três lugares da terra em sua órbita; TA, *t*B e τC três longitudes observadas do cometa; V o tempo entre a primeira observa-



ção e a segunda; W o tempo entre a segunda e a terceira; X o comprimento que o cometa podia descrever no tempo total V + W com aquela velocidade que ele tem na distância média entre a terra e o sol, comprimento este que é para ser encontrado pelo Corolário III, Proposição XL, Livro III; e *t*V uma perpendicular sobre a corda Tτ. Na longitude observada média *t*B tome livremente o ponto B como o lugar do cometa no plano da eclíptica; e de lá, em direção ao sol S, trace a linha BE, que pode estar para a perpendicular *t*V assim como o produto de SB e St^2 está para o cubo da hipotenusa do triângulo retângulo cujos lados são SB e a tangente da latitude do cometa na segunda observação para o raio *t*B. E através do ponto E (pelo Lema 7) trace a linha reta AEC, cujas partes AE e EC, terminando nas linhas retas TA e τC, possam estar uma para a outra assim como os tempos V e W. Então, A e C serão aproximadamente os lugares do cometa no plano da eclíptica na primeira e terceira observações, se B era seu lugar assumido corretamente na segunda.



Trace a perpendicular I*i* sobre AC dividida ao meio em I. Através de B imagine a linha B*i* traçada paralela a AC. Imagine a linha S*i* traçada cortando AC em λ, e complete o paralelogramo *i*Iλμ. Tome Iσ igual a 3Iλ, e através do sol S imagine a linha σξ traçada igual a 3Sσ + 3*i*λ. Então, cancelando as letras A, E, C, I, do ponto B em direção ao ponto ξ, imagine traçada a nova linha BE, que pode estar para a anterior BE como o quadrado da razão da distância BS para a quantidade Sμ + ⅓*i*λ. E através do ponto E trace novamente a linha reta AEC pela mesma regra que antes, isto é, de forma que suas partes AE e EC possam estar uma para a outra assim como os tem-

pos V e W entre as observações. Assim, A e C serão mais precisamente os lugares do cometa.

Sobre AC, dividida ao meio em I, trace as perpendiculares AM, CN, IO, das quais AM e CN possam ser tangentes das latitudes na primeira e terceira observações, para os raios TA e τC. Ligue MN, cortando IO em O. Trace o paralelogramo retangular *i*Iλμ, como antes. Tome ID igual a Sμ + ⅔*i*λ sobre IA prolongada. Então, tome MP sobre MN em direção a N, de modo que possa estar para o comprimento X encontrado acima assim como a raiz quadrada da razão da distância média entre a terra e o sol (ou do semidiâmetro da órbita da terra) está para a distância OD. Se o ponto P incide sobre o ponto N; A, B e C serão os três lugares do cometa, através dos quais sua órbita é para ser descrita no plano da eclíptica. Mas se o ponto P não incide sobre o ponto N, na linha reta AC tome CG igual a NP, de forma que os pontos G e P possam estar sobre o mesmo lado da linha NC.

Pelo mesmo método que os pontos E, A, C e G foram encontrados a partir do ponto assumido B, a partir de outros pontos *b* e β escolhidos livremente, obtenha os novos pontos *e, a, c, g*; e ε, α, κ, γ. Então, através de G, *g* e γ trace a circunferência de um círculo G*g*γ, cortando a linha reta τC em Z, e Z será um lugar do cometa no plano da eclíptica. E em AC, *ac* e ακ, tomando AF, *af* e αφ, iguais respectivamente a CG, *cg* e κγ; trace através dos pontos F, *f* e φ, a circunferência de um círculo F*f*φ, cortando a linha reta AT em X; e o ponto X será um outro lugar do cometa no plano da eclíptica. E nos pontos X e Z serão determinados dois lugares do cometa em sua própria órbita traçando as tangentes das latitudes do cometa para os raios TX e τZ. Por último, (pela Proposição 19, Livro I) descrevendo-se com foco S uma parábola passando através destes dois pontos, esta parábola será a órbita do cometa. Q.E.I.

A demonstração desta construção segue dos Lemas precedentes, já que a linha AC é cortada em E na proporção dos tempos, pelo Lema 7, como ela deve ser pelo Lema 8; e BE, pelo Lema 11, é uma porção da linha reta BS ou Bξ no plano da eclíptica, interceptada entre o arco ABC e a corda AEC; e MP (pelo Corolário, Lema 10) é o comprimento da corda deste arco, que o cometa deve descrever em sua órbita apropriada entre a primeira e a terceira observações e, portanto, é igual a MN, desde que B seja um lugar verdadeiro do cometa no plano da eclíptica.

Mas será conveniente não escolher aleatoriamente os pontos B, *b* e β, mas aproximadamente certos. Se o ângulo AQ*t*, no qual a projeção da órbita no plano da eclíptica corta a linha reta *t*B, é conhecido aproximadamente, neste ângulo com B*t* trace a linha AC, que pode estar para ⅘Tτ assim

como a raiz quadrada da razão de SQ para S*t*; e, traçando a linha reta SEB de forma que sua parte EB possa ser igual ao comprimento V*t*, o ponto B será determinado, o qual vamos usar pela primeira vez. Então, cancelando a linha reta AC e traçando de novo AC de acordo com a construção precedente e, além disto, encontrando o comprimento MP, tome o ponto *b* em *t*B, por esta regra, tal que, se TA e τC interceptam-se em Y, a distância Y*b* possa estar para a distância YB numa razão composta da razão de MP para MN, e a raiz quadrada da razão de SB para S*b*. E pelo mesmo método você pode encontrar o terceiro ponto β, caso queira repetir a operação pela terceira vez. Mas se este método é seguido, geralmente duas operações serão suficientes, pois se a distância B*b* for muito pequena, após os pontos F e *f*, e G e *g* serem encontrados, trace as linhas retas F*f* e G*g*, e elas vão cortar TA e τC nos pontos desejados, X e Z.

EXEMPLO

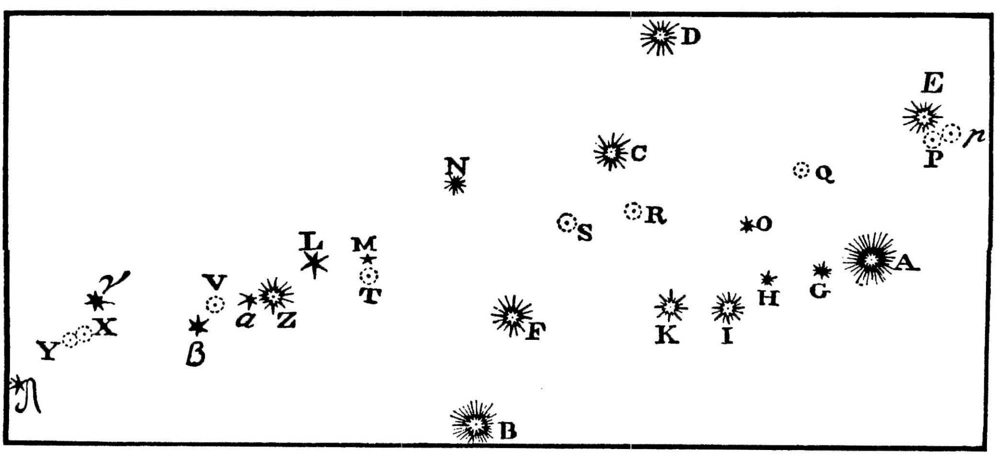
Seja considerando o cometa do ano de 1680. A tabela seguinte mostra seu movimento como observado por Flamsteed e calculado depois por ele a partir de suas observações, e corrigido pelo Dr. Halley a partir das mesmas observações.

	Tempo		Longitude	Cometa	
	Aparente	Verdadeiro	do Sol	Longitude	Latitude norte
	h m	*h m s*	*o ' "*	*o ' "*	*o ' "*
12 Dez., 1680	4, 46	4, 46, 0	♑ 1, 51, 23	♑ 6, 32, 30	8, 28, 0
21	6, 32½	6, 36, 59	11, 06, 44	♒ 5, 08, 12	21, 42, 13
24	6, 12	6, 17, 52	14, 09, 26	18, 49, 23	25, 23, 5
26	5, 14	5, 20, 44	16, 09, 22	28, 24, 13	27, 00, 52
29	7, 55	8, 03, 02	19, 19, 43	♓ 13, 10, 41	28, 09, 58
30	8, 02	8, 10, 26	20, 21, 09	17, 38, 20	28, 11, 53
5 Jan., 1681	5, 51	6, 01, 38	26, 22, 18	♈ 8, 48, 53	26, 15, 7
9	6, 49	7, 00, 53	♒ 0, 29, 02	18, 44, 04	24, 11, 56
10	5, 54	6, 06, 10	1, 27, 43	20, 40, 50	23, 43, 52
13	6, 56	7, 08, 55	4, 33, 20	25, 59, 48	22, 17, 28
25	7, 44	7, 58, 42	16, 45, 36	♉ 9, 35, 0	17, 56, 30
30	8, 07	8, 21, 53	21, 49, 58	13, 19, 51	16, 42, 18
2 Fev.	6, 20	6, 34, 51	24, 46, 59	15, 13, 53	16, 04, 1
5	6, 50	7, 04, 41	27, 49, 51	16, 59, 06	15, 27, 3

A estas podem-se adicionar algumas observações minhas[5].

	Tempo aparente	Cometa	
		Longitude	Latitude norte
	h m	° ′ ″	° ′ ″
25 Fev., 1681	8, 30	♉ 26, 18, 35	12, 46, 46
27	8, 15	27, 04, 30	12, 36, 12
1 Março	11, 0	27, 52, 42	12, 23, 40
2	8, 0	28, 12, 48	12, 19, 38
5	11, 30	29, 18, 0	12, 03, 16
7	9, 30	♊ 0, 4, 0	11, 57, 0
9	8, 30	0, 43, 4	11, 45, 52

Estas observações foram feitas com um telescópio de 7 pés, com um micrômetro e fios colocados no foco do telescópio. Com estes instrumentos determinamos as posições das estrelas fixas entre si e do cometa em relação às estrelas fixas. Represente por A a estrela da quarta magnitude no calcanhar esquerdo de Perseu (*o* de Bayer), B a estrela seguinte da terceira magnitude no pé esquerdo (ζ de Bayer), C uma estrela da sexta magnitude (*n* de Bayer) no calcanhar do mesmo pé, e D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ outras estrelas menores no mesmo pé; e represente por *p*, P, Q, R, S, T, V, X os lugares do cometa nas observações especificadas acima; e, calculando a distância em 80 7/12 partes, AC era 52 1/4 destas partes; BC, 58 5/6; AD, 57 5/12; BD, 82 6/11; CD, 23 2/3; AE, 29 4/7; CE, 57 1/2; DE, 49 11/12; AI, 27 7/12; BI, 52 1/6; CI, 36 7/12; DI, 53 5/11; AK, 38 2/3; BK, 43; CK, 31 5/9; FK, 29; FB, 23; FC, 36 1/4; AH,



5. Apêndice, Nota 24.

$18\frac{6}{7}$; DH, $50\frac{7}{8}$; BN, $46\frac{5}{12}$; CN, $31\frac{1}{3}$; BL, $45\frac{5}{12}$; NL, $31\frac{5}{7}$. HO estava para HI assim como 7 para 6 e, prolongada, passava entre as estrelas D e E, de forma que a distância da estrela D desta linha reta era $\frac{1}{6}$CD. LM estava para LN assim como 2 para 9 e, prolongada, passava através da estrela H. Desta forma foram determinadas as posições das estrelas fixas entre si.

As estrelas fixas	Suas longitudes	Latitude norte	As estrelas fixas	Suas longitudes	Latitude norte
	° ′ ″	° ′ ″		° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26, 41, 50	12, 8, 36	L	♉ 29, 33, 34	12, 7, 48
B	28, 40, 23	11, 17, 54	M	29, 18, 54	12, 7, 20
C	27, 58, 30	12, 40, 25	N	28, 48, 29	12, 31, 9
E	26, 27, 17	12, 52, 7	Z	29, 44, 48	11, 57, 13
F	28, 28, 37	11, 52, 22	α	29, 52, 3	11, 55, 48
G	26, 56, 8	12, 4, 58	β	♊ 0, 8, 23	11, 48, 56
H	27, 11, 45	12, 2, 1	γ	0, 40, 10	11, 55, 18
I	27, 25, 2	11, 53, 11	δ	1, 3, 20	11, 30, 42
K	27, 42, 7	11, 53, 26			

O Sr. Pound observou desde então por uma segunda vez as posições destas estrelas fixas entre si, e obteve suas longitudes e latitudes de acordo com a tabela precedente.

As posições do cometa em relação a estas estrelas fixas foram as seguintes, segundo as observações:

Sexta-feira, 25 de fevereiro, às $8\frac{1}{2}^h$ da noite, a distância do cometa em *p* da estrela E era menor do que $\frac{3}{13}$AE, e maior do que $\frac{1}{5}$AE e, portanto, aproximadamente igual a $\frac{3}{14}$AE; e o ângulo A*p*E era um pouco obtuso, mas quase reto. Pois incidindo desde A uma perpendicular sobre *p*E, a distância entre o cometa e esta perpendicular era $\frac{1}{5}$*p*E.

Na mesma noite, às $9\frac{1}{2}^h$, a distância entre o cometa em P e a estrela E era maior do que $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ AE, e menor do que $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE e, portanto, aproximadamente igual a de $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ AE, ou $\frac{8}{39}$AE. Mas a distância do cometa da perpendicular incidindo da estrela A sobre a linha reta PE era $\frac{4}{5}$PE.

Domingo, 27 de fevereiro, $8\frac{1}{4}^h$ da noite, a distância do cometa em Q da estrela em O era igual à distância das estrelas O e H; e a linha reta QO prolongada passava entre as estrelas K e B. Não pude, devido as nuvens interpostas, determinar a posição da estrela com uma precisão maior.

Terça-feira, 1 de março, 11^h da noite, o cometa em R está exatamente na linha entre as estrelas K e C, de forma que a parte CR da linha reta CRK era um pouco maior do que $\frac{1}{3}$CK, e um pouco menor do que $\frac{1}{3}$CK + $\frac{1}{8}$CR e, portanto, = $\frac{1}{3}$CK + $\frac{1}{16}$CR, ou $\frac{16}{45}$CK.

Quarta-feira, 2 de março, 8^h da noite, a distância do cometa em S da estrela C era aproximadamente $\frac{4}{9}$FC; a distância da estrela F da linha reta CS prolongada era $\frac{1}{24}$FC; e a distância da estrela B até a mesma linha reta era cinco vezes maior do que a distância da estrela F; e a linha reta NS prolongada passava entre as estrelas H e I cinco ou seis vezes mais próxima da estrela H do que da estrela I.

Sábado, 5 de março, $11\frac{1}{2}^h$ da noite, quando o cometa estava em T, a linha reta MT era igual a $\frac{1}{2}$ML, e a linha reta LT prolongada passava entre B e F quatro ou cinco vezes mais próxima de F do que de B, cortando de BF uma quinta ou sexta parte dela em direção a F; e MT prolongada passava no lado de fora do espaço BF em direção à estrela B, quatro vezes mais próxima da estrela B do que da estrela F. M era uma estrela muito pequena, difícil de ser vista pelo telescópio, mas a estrela L era maior, e ao redor da oitava magnitude.

Segunda-feira, 7 de março, $9\frac{1}{2}^h$ da noite, o cometa estando em V, a linha reta *Va* prolongada passava entre B e F, cortando $\frac{1}{10}$BF de BF em direção a F, e estava para a linha reta $V\beta$ assim como 5 para 4. E a distância do cometa da linha reta $a\beta$ era $\frac{1}{2}V\beta$.

Quarta-feira, 9 de março, $8\frac{1}{2}^h$ da noite, o cometa estando em X, a linha reta γX era igual a $\frac{1}{4}\gamma\delta$; e a perpendicular incidindo da estrela δ sobre a linha reta γX era $\frac{2}{5}$ de $\gamma\delta$.

Na mesma noite, às 12^h, o cometa estando em Y, a linha reta γY era igual a $\frac{1}{3}$ de $\gamma\delta$, ou um pouco menos, como talvez $\frac{5}{16}$ de $\gamma\delta$; e uma perpendicular incidindo da estrela δ sobre a linha reta γY era igual a aproximadamente $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$ de $\gamma\delta$. Mas o cometa, estando então extremamente próximo do horizonte, dificilmente era discernível e, portanto, seu lugar não podia ser determinado com a mesma certeza que nas observações precedentes.

A partir destas observações, pelas construções das figuras e cálculos, deduzi as longitudes e latitudes do cometa; e o Sr. Pound, ao corrigir os lugares das estrelas fixas, determinou mais corretamente os lugares do cometa, e estes lugares corrigidos são os expostos acima. Embora meu micrômetro não fosse o melhor, os erros em longitude e latitude (como derivados de minhas observações) dificilmente excediam um minuto. O cometa (de acordo com minhas observações), ao redor do fim de seu movimento, começou a declinar sensivelmente em direção ao norte, a partir da paralela que ele descrevia ao redor do fim de fevereiro.

Agora, para determinar a órbita do cometa a partir das observações descritas acima, selecionei as três feitas por Flamsteed (21 dezembro, 5 janeiro e 25 janeiro), a partir das quais encontrei *St* de 9842,1 partes, e V*t* de 455, supondo que o semidiâmetro da órbita da terra contem 10 000. Então, para a primeira observação, assumindo *t*B de 5657 destas partes, encontrei SB 9747, BE pela primeira vez 412, Sμ 9503, *i*λ 413, BE pela segunda vez 421, OD 10186, X 8528,4, PM 8450, MN 8475, NP 25; a partir disto, pela segunda operação, obtive a distância *tb* 5640; e por esta operação deduzi finalmente as distâncias TX 4775 e τZ 11 322. A partir destes valores, determinando a órbita, obtive seu nó descendente em ♋, e nó ascendente em ♑ 1°53'; a inclinação de seu plano para o plano da eclíptica 61°20⅓', seu vértice (ou o periélio do cometa) distante do nó 8°38', e em ♐ 27°43', com latitude 7°34' sul; seu *latus rectum* 236,8; e a área diurna descrita por um raio traçado ao sol 93 585, supondo o quadrado do semidiâmetro da órbita da terra 100 000 000; que o cometa nesta órbita movia-se diretamente de acordo com a ordem dos signos e, em dezembro, $8^d00^h04^m$ à noite, estava no vértice ou periélio de sua órbita. Determinei tudo isto com régua e compasso, e as cordas dos ângulos, tomadas da tabela dos senos naturais, numa figura muito grande, na qual, a saber, o raio da órbita da terra (consistindo de 10 000 partes) era igual a 16⅓ polegadas de um pé inglês.

Por último, para descobrir se o cometa de fato movia-se na órbita assim determinada, investiguei seus lugares nesta órbita parcialmente por operações aritméticas e parcialmente por régua e compasso, nos tempos de algumas das observações, como pode ser visto na tabela seguinte:

O cometa							
	Distância ao sol	Longitude calculada	Latitude calculada	Longitude observada	Latitude observada	Diferença na longitude	Diferença na latitude
12 Dez.	2792	♑ 6°32'	8°18½	♑ 6°31½	8°26	+ 1	- 7½
29	8403	♓ 13,13⅔	28,00	♓ 13,11¾	28,10 1/12	+ 2	- 10 1/12
5 Fev.	16669	♉ 17,00	15,29⅔	♉ 16,59⅞	15,27⅖	+ 0	+ 2¼
5 Março	21737	29,19¾	12, 4	29,20 6/7	12, 3½	- 1	+ ½

Mas, após isto, o Dr. Halley determinou a órbita por um cálculo aritmético com uma precisão maior do que poderia ser feito com operações gráficas e, mantendo o lugar dos nós em ♋ e ♑ 1°53', e a inclinação do plano da órbita para a eclíptica 61°20⅓', assim como o tempo do cometa no periélio, dezembro $8^d00^h04^m$ ele encontrou a distância do periélio ao nó ascendente

medido na órbita do cometa 9°20', e o *latus rectum* da parábola em 2 430 partes, supondo a distância média entre o sol e a terra ser de 100 000 partes; e a partir destes dados com um cálculo aritmético preciso, calculou os lugares do cometa nos tempos das observações como dado na tabela seguinte.

Tempo verdadeiro	O cometa			Erros em	
	Distância ao sol	Longitude calculada	Latitude calculada	Longitude	Latitude
d h m		° ' "	° ' "	' "	' "
Dez. 12, 4, 46	28028	♑ 6, 29, 25	8, 26, 0	- 3, 5	- 2, 0
21, 6, 37	61076	♒ 5, 6, 30	21, 43, 20	- 1, 42	+ 1, 7
24, 6, 18	70008	18, 48, 20	25, 22, 40	- 1, 3	- 0, 25
26, 5, 20	75576	28, 22, 45	27, 1, 36	- 1, 28	+ 0, 44
29, 8, 3	84021	♓ 13, 12, 40	28, 10, 10	+ 1, 59	+ 0, 12
30, 8, 10	86661	17, 40, 5	28, 11, 20	+ 1, 45	- 0, 33
Jan. 5, 6, 1½	101440	♈ 8, 49, 49	26, 15, 15	+ 0, 56	+ 0, 8
9, 7, 0	110959	18, 44, 36	24, 12, 54	+ 0, 32	+ 0, 58
10, 6, 6	113162	20, 41, 0	23, 44, 10	+ 0, 10	+ 0, 18
13, 7, 9	120000	26, 0, 21	22, 17, 30	+ 0, 33	+ 0, 2
25, 7, 59	145370	♉ 9, 33, 40	17, 57, 55	- 1, 20	+ 1, 25
30, 8, 22	155303	13, 17, 41	16, 42, 7	- 2, 10	- 0, 11
Fev. 2, 6, 35	160951	15, 11, 11	16, 4, 15	- 2, 42	+ 0, 14
5, 7, 4½	166686	16, 58, 55	15, 29, 13	- 0, 41	+ 2, 0
25, 8, 41	202570	26, 15, 46	12, 48, 0	- 2, 49	+ 1, 10
Mar. 5, 11, 39	216205	29, 18, 35	12, 5, 40	+ 0, 35	+ 2, 14

Este cometa também apareceu em novembro anterior, e foi observado em Coburgo, na Saxônia, pelo Sr. Gottfried Kirch, no 4º dia deste mês, no 6º e 11º. A partir de suas posições em relação às estrelas fixas mais próximas observadas com precisão suficiente, algumas vezes com um telescópio de dois pés e algumas com um de dez pés; a partir da diferença das longitudes de Coburgo e Londres, 11°; e a partir dos lugares das estrelas fixas observadas pelo Sr. Pound, o Dr. Halley determinou os lugares do cometa como segue:

3 de novembro, 17^h2^m, tempo aparente em Londres, o cometa estava em ♌ 29°51', com 1°17'45" de latitude norte.

5 de novembro, 15^h58^m, o cometa estava em ♍ 3°23', com 1°6' de latitude norte.

10 de novembro, 16^h 31^m, o cometa estava igualmente distante de duas estrelas em ♌, que são designadas σ e τ em Bayer; mas ele não chegou

a tocar a linha reta que as liga, mas estava muito pouco distante dela. No catálogo de Flamsteed esta estrela σ estava então em ♍ 14°15', com 1°41' de latitude norte aproximadamente, e τ em ♍ 17°3½' com 0°34' latitude sul; e o ponto médio entre estas estrelas era ♍ 15°39¼', com 0°33½' de latitude norte. Suponha que a distância do cometa a esta linha reta seja aproximadamente de 10' ou 12'; e a diferença da longitude do cometa e aquele ponto médio será 7'; e a diferença da latitude aproximadamente 7½'; e, portanto, segue-se que o cometa estava em ♍ 15°32', com aproximadamente 26' de latitude norte.

A primeira observação da posição do cometa com relação a certas estrelas fixas pequenas tinha toda a precisão que pode ser desejada, a segun-

Tempo verdadeiro	Longitude observada	Latitude N observada	Longitude calculada	Latitude calculada	Erros em longitude	Erros em latitude
d h m	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
Nov. 3, 16, 47	♌ 29, 51, 0	1, 17, 45	♌ 29, 51, 22	1, 17, 32 N	+ 0, 22	- 0, 13
5, 15, 37	♍ 3, 23, 0	1, 6, 0	♍ 3, 24, 32	1, 6, 9	+ 1, 32	+ 0, 9
10, 16, 18	15, 32, 0	0, 27, 0	15, 33, 2	0, 25, 7	+ 1, 2	- 1, 53
16, 17, 00			♎ 8, 16, 45	0, 53, 7 S		
18, 21, 34			18, 52, 15	1, 26, 54		
20, 17, 0			28, 10, 36	1, 53, 35		
23, 17, 5			♏ 13, 22, 42	2, 29, 0		
Dez. 12, 4, 46	♑ 6, 32, 30	8, 28, 0	♑ 6, 31, 20	8, 29, 6 N	- 1, 10	+ 1, 6
21, 6, 37	♒ 5, 8, 12	21, 42, 13	♒ 5, 6, 14	21, 44, 42	- 1, 58	+ 2, 29
24, 6, 18	18, 49, 23	25, 23, 5	18, 47, 30	25, 23, 35	- 1, 53	+ 0, 30
26, 5, 21	28, 24, 13	27, 0, 52	28, 21, 42	27, 2, 1	- 2, 31	+ 1, 9
29, 8, 3	♓ 13, 10, 41	28, 9, 58	♓ 13, 11, 14	28, 10, 38	+ 0, 33	+ 0, 40
30, 8, 10	17, 38, 0	28, 11, 53	17, 38, 27	28, 11, 37	+ 0, 7	- 0, 16
Jan. 5, 6, 1½	♈ 8, 48, 53	26, 15, 7	♈ 8, 48, 51	26, 14, 57	- 0, 2	- 0, 10
9, 7, 1	18, 44, 4	24, 11, 56	18, 43, 51	24, 12, 17	- 0, 13	+ 0, 21
10, 6, 6	20, 40, 50	23, 43, 32	20, 40, 23	23, 43, 25	- 0, 27	- 0, 7
13, 7, 9	25, 59, 48	22, 17, 28	26, 0, 8	22, 16, 32	+ 0, 20	- 0, 56
25, 7, 59	♉ 9, 35, 0	17, 56, 30	♉ 9, 34, 11	17, 56, 6	- 0, 49	- 0, 24
30, 8, 22	13, 19, 51	16, 42, 18	13, 18, 28	16, 40, 5	- 1, 23	- 2, 13
Fev. 2, 6, 35	15, 13, 53	16, 4, 1	15, 11, 59	16, 2, 17	- 1, 54	- 1, 54
5, 7, 4½	16, 59, 6	15, 27, 3	16, 59, 17	15, 27, 0	+ 0, 11	- 0, 3
25, 8, 41	26, 18, 35	12, 46, 46	26, 16, 59	12, 45, 22	- 1, 36	- 1, 24
Mar. 1, 11, 10	27, 52, 42	12, 23, 40	27, 51, 47	12, 22, 28	- 0, 55	- 1, 12
5, 11, 39	29, 18, 0	12, 3, 16	29, 20, 11	12, 2, 50	+ 2, 11	- 0, 26
9, 8, 38	♊ 0, 43, 4	11, 45, 52	♊ 0, 42, 43	11, 45, 35	- 0, 21	- 0, 17

da também foi suficientemente precisa. Na terceira observação, que foi a menos precisa, pode haver um erro de 6' ou 7', mas dificilmente maior. A longitude do cometa, como obtida na primeira e mais precisa observação, sendo calculada na órbita parabólica mencionada acima, é ♌ 29°30'32", sua latitude norte 1°25'7", e sua distância ao sol 115546.

Além disto, o Dr. Halley, observando que um cometa notável tinha aparecido quatro vezes em intervalos iguais de 575 anos (isto é, no mês de setembro depois de Júlio César ter sido morto; 531 d.C., no consulado de Lampadius e Orestes; em 1106 d.C., no mês de fevereiro: e no final do ano de 1680; e isto com uma cauda longa e notável, exceto quando foi visto após a morte de César, quando, devido à situação inconveniente da terra, a cauda não era tão proeminente), dispôs-se a achar uma órbita elíptica cujo eixo maior deve ser 1382957 partes, contendo 10000 destas partes a distância média entre a terra e o sol, órbita que um cometa pode recorrer em 575 anos. Colocando o nó ascendente em ♋ 2°2', a inclinação do plano da órbita para o plano da eclíptica num ângulo de 61°6'48", o periélio do cometa neste plano em ♐ 22°44'25", o tempo igual do periélio dezembro $7^d23^h9^m$, a distância do periélio ao nó ascendente no plano da eclíptica 9°17'35", e seu eixo conjugado 18481,2, ele calculou os movimentos do cometa nesta órbita elíptica. Os lugares do cometa, como deduzidos das observações, e como surgindo dos cálculos feitos nesta órbita, podem se vistos na tabela anterior.

As observações deste cometa concordam do início ao fim tão perfeitamente com o movimento do cometa na órbita que acabou de ser descrita assim como os movimentos dos planetas concordam com as teorias a partir das quais eles são calculados. Por esta concordância evidenciam claramente que foi um mesmo cometa que apareceu todo este tempo e também que a órbita deste cometa está aqui definida corretamente.

Na tabela precedente omitimos as observações de 16, 18, 20 e 23 de novembro por não serem suficientemente precisas, embora nestes tempos várias pessoas tenham observado o cometa. Em 17 de novembro, Ponthio e seus companheiros, às 6^h da manhã em Roma (isto é, 5^h10^m em Londres), por linhas direcionadas às estrelas fixas, observaram o cometa em ♎ 8°30', com latitude 0°40' sul. Suas observações podem ser vistas num tratado que Ponthio publicou relacionado a este cometa. Cellio, que estava presente, e comunicou suas observações numa carta a Cassini, viu o cometa na mesma hora em ♎ 8°30', com latitude 0°30' sul. Ele foi visto de forma semelhante por Gallet na mesma hora em Avignon (isto é, às 5^h42^m da manhã em Londres) em ♎ 8° sem latitude. Mas, pela teoria, o cometa estava neste tempo em ♎ 8°16'45", e sua latitude era 0°53'7" sul.

Em 18 de novembro, às 6^h30^m da manhã em Roma (isto é, às 5^h40^m em Londres), Ponthio observou o cometa em ♎ 13°30’, com latitude 1°20’ sul; e Cellio em ♎ 13°30’, com latitude 1°00’ sul. Mas às 5^h30^m da manhã em Avignon, Gallet o viu em ♎ 13°00’, com latitude 1°00’ sul. Na Universidade de La Fleche, na França, às 5^h da manhã (isto é, às 5^h9^m em Londres), ele foi visto por Ango, entre duas estrelas pequenas, uma das quais é a intermediária das três que estão numa linha reta na mão ao sul de Virgem, a ψ de Bayer; e a outra é a mais afastada da asa, a θ de Bayer. Portanto, o cometa estava então em ♎ 12°46’ com latitude 50’ sul. E fui informado pelo Dr. Halley, que no mesmo dia em Boston, na Nova Inglaterra, na latitude de 42½’, às 5^h da manhã (isto é, às 9^h44^m da manhã em Londres) o cometa foi visto próximo de ♎ 14°, com latitude 1°30’ sul.

Em 19 de novembro, às $4½^h$ da manhã, em Cambridge, o cometa (pela observação de um homem jovem) estava distante de Spica ♍ ao redor de 2° em direção ao noroeste. Agora Spica estava neste tempo em ♎ 19°23’47”, com latitude 2°1’59” sul. No mesmo dia, às 5^h da manhã, em Boston, na Nova Inglaterra, o cometa estava distante de Spica ♍ 1°, com a diferença de 40’ em latitude. No mesmo dia, na ilha da Jamaica, ele estava distante ao redor de 1° de Spica ♍. No mesmo dia, o Sr. Arthur Storer, no rio Patuxent, próximo de Hunting Creek, em Maryland, nos confins da Virgínia, na latitude 38½°, às 5^h da manhã (isto é, às 10^h em Londres), viu o cometa acima de Spica ♍, e muito próximo a ela, a distância entre eles sendo de aproximadamente ¾ de um grau. E da comparação destas observações concluo que às 9^h44^m em Londres o cometa estava em ♎ 18°50’, com aproximadamente 1°25’ de latitude sul. Agora, pela teoria, o cometa estava neste tempo em ♎ 18°52’15”, com 1°26’54” de latitude sul.

Em 20 de novembro, Montenari, Professor de Astronomia em Pádua, às 6^h da manhã em Veneza (isto é, 5^h10^m em Londres), viu o cometa em ♎ 23°, com latitude 1°30’ sul. No mesmo dia, em Boston, ele estava distante de Spica ♍ por aproximadamente 4° de longitude leste e, portanto, estava aproximadamente em ♎ 23°24’.

Em 21 de novembro, Ponthio e seus companheiros, às $7¼^h$ da manhã, observaram o cometa em ♎ 27°50’, com latitude 1°16’ sul; Cellio, em ♎ 28°; Ango às 5^h da manhã, em ♎ 27°45’; Montenari em ♎ 27°51’. No mesmo dia, na ilha da Jamaica, ele foi visto próximo ao início de ♏, e ao redor da mesma latitude que Spica ♍, isto é, 2°2’. No mesmo dia, às 5^h da manhã, em Ballasore, nas Índias Orientais (isto é, às 11^h20^m da noite precedente em Londres), a distância do cometa a Spica ♍ foi considerada 7°35’ para o leste. Ele estava numa linha reta entre Spica e Libra e, portanto, estava então

em ♎ 26°58', com aproximadamente 1°11' de latitude sul; e após 5^h40^m (isto é, às 5^h da manhã em Londres), ele estava em ♎ 28°12' com 1°16' de latitude sul. Agora, pela teoria, o cometa estava então em ♎ 28°10'36", com 1°53'35" de latitude sul.

Em 22 de novembro o cometa foi visto por Montenari em ♏ 2°33'; mas em Boston, na Nova Inglaterra, ele foi encontrado ao redor de ♏ 3°, e com quase a mesma latitude que antes, isto é, 1°30'. No mesmo dia, às 5^h da manhã em Ballasore, o cometa foi observado em ♏ 1°50'; e, portanto, às 5^h da manhã em Londres, o cometa estava em ♏ 3°5', aproximadamente. No mesmo dia às $6\frac{1}{2}^h$ da manhã em Londres, o Dr. Hooke observou-o ao redor de ♏ 3°30', e isto na linha reta que passa através de Spica ♍ e Cor Leonis; não, de fato, exatamente, mas desviando um pouco desta linha em direção ao norte. Montenari observou da mesma forma que neste dia e em alguns dias após, uma linha reta traçada do cometa através de Spica passava pelo lado sul de Cor Leonis a uma distância muito pequena dela. A linha reta através de Cor Leonis e Spica ♍ cortava a eclíptica em ♍ 3°46' a um ângulo de 2°51' e, se o cometa estivesse nesta linha e em ♏ 3°, sua latitude teria sido 2°26'; mas como Hooke e Montenari concordam em que o cometa estava a uma distância pequena desta linha em direção ao norte, sua latitude deve ter sido menor. No dia 20, pela observação de Montenari, sua latitude era quase a mesma que aquela de Spica ♍, isto é, ao redor de 1°30'. Mas pela concordância de Hooke, Montenari e Ango, a latitude estava aumentando continuamente e, portanto, deveria ser, no dia 22, sensivelmente maior do que 1°30'; e, tomando uma média entre os limites extremos estabelecidos até agora, 2°26' e 1°30', a latitude será ao redor de 1°58'. Hooke e Montenari concordam em que a cauda do cometa estava direcionada para Spica ♍, declinando um pouco desta estrela em direção ao sul de acordo com Hooke, mas em direção ao norte de acordo com Montenari; e, portanto, esta declinação era dificilmente perceptível; e a cauda, estando aproximadamente paralela ao equador, desviava-se um pouco da oposição do sol em direção ao norte.

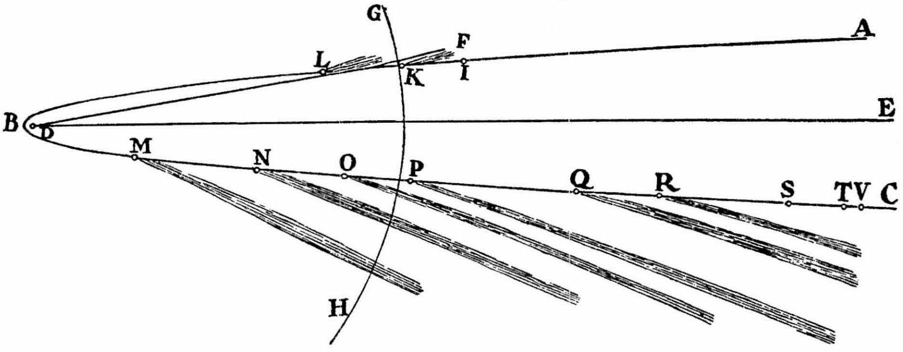
Em 23 de novembro, às 5^h da manhã, em Nuremberg (isto é, às $4\frac{1}{2}^h$ em Londres), o Sr. Zimmerman viu o cometa em ♏ 8°8', com 2°31' de latitude sul, seu lugar sendo obtido tomando suas distâncias das estrelas fixas.

Em 24 de novembro, antes do sol nascer, o cometa foi visto por Montenari em ♏ 12°52' no lado norte da linha reta através de Cor Leonis e Spica ♍ e, portanto, sua latitude era algo menor do que 2°38'; e como a latitude, como dissemos, pelas observações concordantes de Montenari, Ango e Hooke, estava aumentando continuamente, era agora, portanto, no dia 24, algo maior do que 1°58'; e, tomando a quantidade média, pode ser conside-

rada 2°18', sem qualquer erro perceptível. Ponthio e Gallet mantêm que a latitude estava diminuindo agora; e Cellio e o observador na Nova Inglaterra, que ela continuava a mesma, a saber, ao redor de 1°, ou 1½°. As observações de Ponthio e Cellio são mais grosseiras, especialmente aquelas que foram feitas tomando os azimutes e alturas, assim como são também as observações de Gallet. São melhores as que foram feitas tomando a posição do cometa para as estrelas fixas, por Montenari, Hooke, Ango, e o observador na Nova Inglaterra, e algumas vezes por Ponthio e Cellio. No mesmo dia, às 5^h da manhã em Ballasore, o cometa foi observado em ♏ 11°45'; e, portanto, às 5^h da manhã em Londres, estava em ♏ 13°, aproximadamente. E, pela teoria, o cometa estava neste tempo em ♏ 13°22'42''.

Em 25 de novembro, antes do nascer do sol, Montenari observou o cometa aproximadamente em ♏ 17¾°; e Cellio observou ao mesmo tempo que o cometa estava numa linha reta entre a estrela brilhante na coxa direita de Virgem e a balança sul de Libra; e esta linha reta corta o caminho do cometa em ♏ 18°36'. E, pela teoria, o cometa estava em ♏ 18⅓°, aproximadamente.

Logo, é evidente que estas observações concordam com a teoria, tanto quanto concordam entre si. E por esta concordância fica evidente que foi um mesmo cometa que apareceu todo o tempo de 4 de novembro a 9 de março. A trajetória deste cometa cortou duas vezes o plano da eclíptica e, portanto, não era uma linha reta. Ela cortou a eclíptica não em partes opostas do céu, mas no final de Virgem e começo de Capricórnio, incluindo um arco de aproximadamente 98°. Portanto, o caminho do cometa desviou-se muito da trajetória de um grande círculo, pois no mês de novembro ele declinava pelo menos 3° da eclíptica em direção ao sul, e no mês de dezembro seguinte ele declinava 29° da eclíptica em direção ao norte; as duas partes da órbita em que o cometa descia em direção ao sol, e ascendia de novo desde o sol, declinavam uma da outra por um ângulo aparente de mais de 30°, como observado por Montenari. Este cometa viajou por nove signos, a saber, do último grau de ♌ ao início de ♊, além do signo de ♌, através do qual ele passou antes de começar a ser visto, e não há outra teoria pela qual um cometa possa atravessar uma parte tão grande do céu com um movimento regular. O movimento deste cometa era muito desigual, pois ao redor de 20 de novembro ele percorreu ao redor de 5° num dia. Sendo então seu movimento retardado entre 26 de novembro e 12 de dezembro, a saber, no espaço de 15½ dias, ele percorreu apenas 40°. Mas seu movimento sendo depois acelerado, ele percorreu aproximadamente 5° por dia, até que seu movimento começou a ser novamente retardado. E a teoria que corresponde exatamente com um movimente tão desigual, e através de uma parte tão grande dos



céus, que segue as mesmas leis que a teoria dos planetas, e que concorda precisamente com observações astronômicas precisas, não pode ser outra coisa que a verdade.

E, pensando que não seria impróprio, proponho na figura anexa, desenhada no plano da curva, uma representação verdadeira da órbita que este cometa descreveu e da cauda que ele emitiu nos vários lugares. Neste desenho ABC representa a órbita do cometa, D o sol, DE o eixo da órbita, DF a linha dos nós, GH a intesecção da esfera da órbita da terra com o plano da órbita do cometa, I o lugar do cometa em 4 de novembro, 1680; K o lugar do mesmo em 11 de novembro; L o lugar do mesmo em 19 de novembro; M seu lugar em 12 de dezembro; N seu lugar em 21 de dezembro; O seu lugar em 29 de dezembro; P seu lugar no dia 5 de janeiro seguinte; Q seu lugar em 25 de janeiro; R seu lugar em 5 de fevereiro; S seu lugar em 25 de fevereiro; T seu lugar em 5 de março; e V seu lugar em 9 de março. Para determinar o comprimento da cauda, fiz as seguintes observações.

Em 4 e 6 de novembro a cauda não apareceu; em 11 de novembro a cauda começou a mostrar-se, mas não aparecia mais longa do que ½ grau através de um telescópio de 10 pés; em 17 de novembro a cauda foi vista por Ponthio mais longa do que 15°; em 18 de novembro, na Nova Inglaterra, a cauda aparecia 30° alongada, e diretamente oposta ao sol, estendendo-se ao planeta Marte, que estava então em ♍, 9°54'; em 19 de novembro, em Maryland, encontrou-se a cauda 15° ou 20° alongada; em 10 de dezembro (pela observação do Sr. Flamsteed), a cauda passava através do meio da distância interceptada entre a cauda da serpente de Ofiúco e a estrela δ na asa sul de Áquila, e terminava próximo das estrelas A, ω, *b* nas tabelas de Bayer. Portanto, o final da cauda estava em ♑ 19½°, com latitude ao redor de 34¼° norte; em 11 de dezembro, ela subiu para a cabeça de Sagitário (α e β de Bayer), terminando em ♑ 26°43', com latitude 38°34' norte; em 12 de dezembro, ela passou através do meio de Sagitário, sem chegar muito mais lon-

ge; terminando em ♒ 4°, com latitude 42½° norte, aproximadamente. Mas isto diz respeito ao comprimento da parte mais brilhante da cauda; pois, com uma luz mais fraca, observada, também, talvez, no céu mais sereno de Roma, em 12 de dezembro, 5^h40^m, pela observação de Ponthio, a cauda chegou a 10° acima da parte traseira do Cisne, e seu lado em direção ao oeste e em direção ao norte estava 45' distante desta estrela. Mas ao redor deste tempo a cauda tinha uma largura de 3° em direção a extremidade superior; e portanto o meio dela estava distante 2°15' desta estrela em direção ao sul, e a extremidade superior estava em ♓ 22°, com latitude 61° norte; e, portanto, a cauda era aproximadamente 70° alongada; em 21 de dezembro, ela estendia-se quase até a Cadeira de Cassiopéia, distante igualmente de β e de Schedir, de forma que sua distância a cada uma das duas era igual à distância de uma a outra e, portanto, terminava em ♈ 24°, com latitude 47½°; em 29 de dezembro, entrou em contato com Scheat à sua esquerda, e preencheu exatamente o espaço entre as duas estrelas no pé norte de Andrômeda, tendo um comprimento de 54°; e, portanto, terminava em ♉ 19°, com 35° de latitude; em 5 de janeiro, ela tocava a estrela π no peito de Andrômeda em seu lado direito, e a estrela μ da cinta em sua esquerda; e, de acordo com nossas observações, era 40° alongada; mas ela era curva, e seu lado convexo dava para o sul; e próximo da cabeça do cometa ela fazia um ângulo de 4° com o círculo que passava através do sol e da cabeça do cometa; mas em direção a outra extremidade ela estava inclinada em relação a este círculo num ângulo de aproximadamente 10° ou 11°; e a corda da cauda continha com este círculo um ângulo de 8°. Em 13 de janeiro, a cauda terminava entre Alamech e Algol, com uma luz que era perceptível suficientemente; mas com uma luz fraca ela terminava defronte da estrela κ no lado de Perseu. A distância do final da cauda ao círculo passando através do sol e do cometa era 3°50'; e a inclinação da corda da cauda para este círculo era de 8½°. Em 25 e 26 de janeiro ela brilhou com uma luz fraca até o comprimento de 6° ou 7°; e, por uma ou duas noites após, quando havia um céu muito claro, ela se estendia ao comprimento de 12°, ou pouco mais, com uma luz que era muito fraca e muito difícil de ser vista; mas seu eixo estava dirigido diretamente para a estrela brilhante no ombro oriental de Auriga e, portanto, desviava-se da oposição do sol em direção ao norte por um ângulo de 10°. Por último, em 10 de fevereiro, observei com um telescópio a cauda 2° alongada, pois aquela luz mais fraca de que falei não aparecia através das lentes. Mas Ponthio escreve que, em 7 de fevereiro, ele viu a cauda 12° alongada. Em 25 de fevereiro, o cometa estava sem cauda, e assim continuou até que desapareceu.

Agora qualquer um que refletir sobre a órbita descrita, e considerar devidamente as outras aparições deste cometa, vai se convencer facilmente que os corpos dos cometas são sólidos, compactos, fixos e duráveis, como os corpos dos planetas. Pois se eles não fossem nada além de vapores ou exalações da terra, do sol e de outros planetas, este cometa, em sua passagem pelas redondezas do sol teria sido dissipado imediatamente, pois o calor do sol é como a densidade de seus raios, isto é, inversamente como o quadrado da distância dos lugares ao sol. Portanto, como em 8 de dezembro, quando o cometa estava em seu periélio, a distância dele ao centro do sol estava para a distância da terra ao mesmo como ao redor de 6 para 1000, o calor do sol sobre o cometa estava neste tempo para o calor do sol de verão conosco assim como 1000000 está para 36, ou como 28000 para 1. Mas o calor para ferver a água é ao redor de três vezes maior do que o calor que a terra adquire no sol de verão, como experimentei; e o calor do ferro aquecido ao vermelho (se minha conjectura está correta) é ao redor de três ou quatro vezes maior do que o calor da água fervendo. E, portanto, o calor que a terra seca do cometa pode ter recebido dos raios do sol, enquanto em seu periélio, era ao redor de 2000 vezes maior do que o calor do ferro aquecido ao vermelho. Mas os vapores e exalações, e toda matéria volátil, devem ter sido consumidos e dissipados imediatamente por um calor tão violento.

Este cometa, portanto, deve ter recebido um calor imenso do sol, e mantido este calor por um tempo muitíssimo longo. Pois um globo de ferro de uma polegada de diâmetro, aquecido ao vermelho e exposto ao ar livre, dificilmente perderá todo seu calor no tempo de uma hora, mas um globo maior manterá seu calor por mais tempo na razão de seu diâmetro, pois a superfície (proporcionalmente à qual ele é esfriado pelo contato com o ar ambiente) é menor na mesma razão com relação à quantidade da matéria quente incluída. Portanto, um globo de ferro igual à nossa terra aquecido ao vermelho, isto é, com um diâmetro de cerca de 40000000 pés, dificilmente esfriaria num número igual de dias, ou em mais de 50000 anos. Mas suspeito que a duração do calor possa, devido a algumas causas latentes, aumentar numa razão ainda menor do que aquela do diâmetro, e ficaria satisfeito se a razão verdadeira fosse investigada através de experiências.

É para ser observado além disto, que o cometa emitiu no mês de dezembro, logo após ele ter sido aquecido pelo sol, uma cauda muito mais longa e muito mais esplêndida, do que no mês anterior de novembro, quando ainda não tinha chegado em seu periélio. E universalmente, as caudas maiores e mais resplandecentes sempre surgem dos cometas imediatamente após eles passarem pelas redondezas do sol. Portanto, o calor recebido

pelo cometa contribui para o aumento da cauda. Disto penso que seja possível inferir que a cauda nada mais é do que um vapor muito fino, que a cabeça ou núcleo do cometa emite por seu calor.

Mas tivemos três opiniões diversas sobre as caudas dos cometas. Alguns sustentam que elas não são nada mais do que feixes da luz solar transmitidos através das cabeças dos cometas, que eles supõem ser transparentes; outros, que elas procedem da refração que a luz sofre ao passar da cabeça do cometa para a terra; e, finalmente, outros sustentam que elas são uma espécie de nuvem ou vapor subindo constantemente das cabeças dos cometas, e tendendo em direção às partes opostas ao sol. A primeira é a opinião daqueles que ainda não estão familiarizados com a óptica, pois os feixes do sol são vistos numa sala escurecida apenas devido à luz que é refletida deles pelas pequenas partículas de poeira e fumaça que estão sempre flutuando no ar. Por esta razão, no ar impregnado com uma fumaça espessa, estes feixes aparecem com grande brilho, e impressionam o olho mais fortemente; em um ar mais fino ficam mais fracos e são mais difíceis de discernir; mas nos céus, onde não há matéria para refletir a luz, eles nunca podem ser vistos. A luz não é vista como ela está no feixe, mas apenas quando é refletida daí para nossos olhos, pois a visão não pode ser produzida de outra forma senão pelos raios incidindo sobre os olhos. Portanto, deve haver alguma matéria refletora nas partes onde as caudas dos cometas são vistas. De outra forma, como todos os espaços celestes são igualmente iluminados pela luz do sol, nenhuma parte dos céus poderia aparecer com mais esplendor do que uma outra. A segunda opinião está sujeita a muitas dificuldades. As caudas dos cometas nunca são vistas matizadas com aquelas cores que comumente são inseparáveis da refração, e a transmissão distinta da luz das estrelas fixas e planetas até nós é uma demonstração que o éter ou meio celeste não é dotado com qualquer poder refrativo. O acontecimento, algumas vezes alegado, de que as estrelas fixas foram vistas algumas vezes pelos egípcios com uma cabeleira, por ser um fato raro, deve ter sido devido a uma refração casual das nuvens. E a radiação e cintilação das estrelas fixas deve ser devida às refrações dos olhos e do ar, pois ao colocar um telescópio no olho estas radiações e cintilações desaparecem imediatamente. A agitação trêmula do ar e dos vapores ascendentes faz com que os raios da luz sejam alternadamente desviados do espaço estreito da pupila do olho; mas tal coisa não acontece na abertura muito mais ampla da objetiva de um telescópio, razão pela qual a cintilação ocorre no primeiro caso, mas cessa no último. Esta cessação no último caso é uma demonstração da transmissão regular da luz através dos céus, sem qualquer refração perceptível. Mas, para remover uma

objeção que pode ser feita pelo não aparecimento de cauda nos cometas que brilham apenas com uma luz fraca, como se os raios secundários fossem então muito fracos para afetar os olhos, sendo por este motivo que as caudas das estrelas fixas não aparecem, temos de considerar que através dos telescópios a luz das estrelas fixas pode ser aumentada acima de cem vezes, e apesar disto nenhuma cauda é vista; que a luz dos planetas é ainda mais abundante sem qualquer cauda; mas que os cometas são vistos algumas vezes com caudas imensas, enquanto que a luz de suas cabeças é apenas fraca e nublada. Pois assim aconteceu no cometa do ano de 1680, quando no mês de dezembro ele era apenas igual em luz às estrelas da segunda magnitude e, contudo, emitia uma cauda notável, estendendo-se ao comprimento de 40°, 50°, 60°, ou 70°, e ainda mais; e após isto, nos dias 27 e 28 de janeiro, quando a cabeça aparecia apenas como uma estrela da 7ª magnitude, a cauda (como dissemos acima), com uma luz que era claramente perceptível, embora fraca, alcançava 6° ou 7° em comprimento, e com uma luz lânguida que era mais difícil de ver, até 12° e acima. Mas em 9 e 10 de fevereiro, quando a olhos nus a cabeça não mais aparecia, vi através de um telescópio a cauda com 2° de comprimento. E, ademais, se a cauda era devida à desagregação da matéria celeste, e se desviava da oposição ao sol conforme a figura dos céus, estes desvios nos mesmos lugares dos céus deviam estar sempre direcionados às mesmas partes. Mas o cometa do ano de 1680, foi visto em Londres no dia 28 de dezembro às $8\frac{1}{2}^{h}$ da noite em ♓ 8°41', com latitude norte 28°6', enquanto o sol estava em ♑ 18°26'. E o cometa do ano 1577, no dia 29 de dezembro, estava em ♓ 8°41', com latitude norte 28°40', e o sol, como antes, em aproximadamente ♑ 18°26'. Em ambos os casos a situação da terra era a mesma, e o cometa aparecia no mesmo lugar no céu; contudo no primeiro caso a cauda do cometa (tanto por minhas observações quanto pelas observações de outros) desviava da oposição ao sol em direção ao norte por um ângulo de 4½ graus, enquanto que no último caso havia (de acordo com as observações de Tycho) um desvio de 21 graus em direção ao sul. Portanto, a desagregação dos céus sendo assim refutada, conclui-se que o fenômeno das caudas dos cometas deve ser derivado de alguma matéria refletora.

As leis observadas pelas caudas dos cometas confirmam também que estas caudas surgem de suas cabeças e tendem em direção às partes opostas ao sol. Por exemplo, que as caudas, estando nos planos das órbitas dos cometas que passam através do sol, se desviam constantemente da oposição ao sol em direção às partes que as cabeças dos cometas deixaram em seus avanços ao longo destas órbitas. Que para um espectador, colocado nestes planos, elas aparecem nas partes diretamente opostas ao sol, mas, à medida que o

espectador se afasta destes planos, seus desvios começam a aparecer, e tornam-se diariamente maiores. Que o desvio, outras coisas permanecendo iguais, aparece menor quando a cauda é mais oblíqua em relação à órbita do cometa, assim como quando a cabeça do cometa se aproxima mais do sol, especialmente se o ângulo de desvio é estimado próximo da cabeça do cometa. Que as caudas que não têm desvio aparecem retas, mas que as caudas que se desviam são semelhantemente encurvadas numa curvatura certa. Que esta curvatura é maior quando o desvio é maior, sendo mais perceptível quando a cauda é mais longa, outras coisas permanecendo iguais, pois nas caudas mais curtas a curvatura dificilmente é percebida. Que o ângulo do desvio é menor próximo da cabeça do cometa, mas maior em direção à outra extremidade da cauda, porque o lado convexo da cauda aponta em direção às partes de onde o desvio é feito, e que estão sobre uma linha reta traçada infinitamente do sol até a cabeça do cometa. E que as caudas que são longas e largas, e brilham com uma luz mais forte, aparecem mais resplandecentes e definidas mais exatamente sobre o lado convexo do que sobre o côncavo. Logo, é evidente que os fenômenos das caudas dos cometas dependem dos movimentos de suas cabeças, e de forma alguma dos lugares do céu em que suas cabeças são vistas; e que, portanto, as caudas dos cometas não surgem da refração dos céus, mas de suas próprias cabeças, que fornecem a matéria que forma a cauda. Pois, como em nosso ar, a fumaça de um corpo aquecido sobe ou perpendicularmente se o corpo está em repouso, ou obliquamente se o corpo move-se obliquamente, o mesmo acontece nos céus, onde todos os corpos gravitam em direção ao sol, a fumaça e o vapor devem (como já dissemos) subir a partir do sol, e devem ou subir perpendicularmente se o corpo fumegante está em repouso, ou obliquamente se o corpo, em todo transcorrer de seu movimento, está sempre deixando aqueles lugares de onde as partes superiores ou mais altas do vapor tinham subido antes; e esta inclinação será menor onde o vapor sobe com mais velocidade, a saber, próximo do corpo fumegante, quando este está próximo do sol. Mas, como a inclinação varia, a coluna de vapor será encurvada; e como o vapor no lado precedente é um pouco mais recente, *isto é, subiu um pouco mais tarde do corpo*, ele será, portanto, algo mais denso neste lado, e tem de refletir mais luz devido a isto, assim como ser melhor definido. Não acrescento nada concernente à agitação incerta repentina das caudas dos cometas, e suas formas irregulares, descritas algumas vezes pelos autores, já que elas podem surgir das mutações de nosso ar, e dos movimentos de nossas nuvens, obscurecendo em parte estas caudas; ou, talvez, das partes da Via Láctea que podem ter sido confundidas com as partes das caudas dos cometas quando eles passavam por ali.

Podemos entender facilmente que as atmosferas dos cometas fornecem uma quantidade de vapor grande o suficiente para preencher espaços tão imensos a partir da rarefação de nosso próprio ar, pois o ar próximo da superfície de nossa terra ocupa um espaço 850 vezes maior do que a água do mesmo peso. Portanto, um cilindro de ar com 850 pés de altura tem um peso igual a um cilindro de água da mesma largura e com apenas um pé de altura. Mas um cilindro de ar chegando ao topo da atmosfera tem um peso igual a um cilindro de água com uma altura ao redor de 33 pés. E, portanto, se for retirada de todo o cilindro de ar a parte mais baixa de 850 pés, a parte remanescente superior terá um peso igual a um cilindro de água com 32 pés de altura. E daqui (e da hipótese, confirmada por muitas experiências, que a compressão do ar é como o peso da atmosfera que o pressiona, e que a força da gravidade é inversamente como o quadrado da distância ao centro da terra) procedendo por cálculo, pelo Corolário, Proposição 22, Livro II, encontro que na altura de um semidiâmetro da terra, contado a partir da superfície da terra, o ar é mais rarefeito do que conosco numa razão muito maior do que a de todo o espaço dentro da órbita de Saturno para um espaço esférico com o diâmetro de uma polegada. Portanto, se uma esfera de nosso ar com apenas uma polegada de espessura estivesse tão rarefeita como o ar na altura de um semidiâmetro da terra a partir da superfície da terra, ela encheria todas as regiões dos planetas até a órbita de Saturno, e muito além dela. Portanto, como o ar a distâncias maiores é imensamente rarefeito, e a cabeleira ou atmosfera dos cometas é comumente ao redor de dez vezes mais alta, contando a partir de seus centros, do que a superfície dos núcleos, e as caudas sobem ainda mais alto, elas são, portanto, extremamente rarefeitas. E embora, devido às atmosferas muito mais espessas dos cometas e à grande gravitação de seus corpos em direção ao sol, assim como das partículas de seu ar e vapores em direção uma à outra, possa acontecer que o ar nos espaços celestes e nas caudas dos cometas não sejam tão amplamente rarefeitos, contudo a partir deste cálculo é evidente que uma quantidade muito pequena de ar e vapor é mais do que suficiente para produzir todas as aparências das caudas dos cometas; pois que elas têm, de fato, uma rarefação muito notável aparece do brilho das estrelas através delas. A atmosfera da terra, iluminada pela luz do sol, embora com poucas milhas de espessura, obscurece e extingue bem a luz não apenas de todas as estrelas, mas mesmo da própria lua, enquanto que as menores estrelas brilham através da espessura imensa das caudas dos cometas, iluminadas da mesma forma pelo sol, sem a menor diminuição de seu esplendor. E geralmente tampouco é maior o brilho das caudas da maioria dos cometas do que o nosso ar quan-

do, com uma espessura de uma ou duas polegadas, reflete numa sala escurecida a luz de feixes de luz que entra por um furo na janela.

E podemos determinar bem satisfatoriamente o tempo gasto durante a subida do vapor da cabeça do cometa até a extremidade da cauda, traçando uma linha reta da extremidade da cauda até o sol e marcando o lugar onde esta linha reta intercepta a órbita do cometa. Pois o vapor que está agora na extremidade da cauda, se ele subisse numa linha reta a partir do sol, deve ter começado a subir da cabeça no tempo em que a cabeça estava no ponto da intersecção. É verdade que o vapor não sobe numa linha reta a partir do sol, mas, mantendo o movimento recebido do cometa antes de sua subida, e compondo este movimento com seu movimento de subida, eleva-se obliquamente. Portanto, a solução do Problema será mais exata se traçamos a linha que intercepta a órbita paralela ao comprimento da cauda, ou melhor (devido ao movimento curvilíneo do cometa) divergindo um pouco da linha ou comprimento da cauda. E por este princípio encontrei que o vapor que, em 25 de janeiro estava na extremidade da cauda, tinha começado a subir da cabeça antes de 11 de dezembro e, portanto, gastou em toda sua subida 45 dias; mas toda a cauda que apareceu em 10 de dezembro tinha terminado sua subida no espaço de dois dias transcorridos desde o tempo em que o cometa estava em seu periélio. Portanto, o vapor subiu com a maior velocidade no início e nas redondezas do sol, e depois disto continuou a subir com um movimento continuamente retardado por sua própria gravidade. Quanto mais alto subia, mais adicionava ao comprimento da cauda. E a cauda, enquanto era possível vê-la, era feita de quase todo o vapor que tinha surgido desde o tempo em que o cometa estava em seu periélio. E tampouco a parte do vapor que tinha subido primeiro e que formava a extremidade da cauda cessou de aparecer, até que sua distância muito grande, tanto do sol de onde recebia sua luz, quanto de nossos olhos, tornou-a invisível. Por esta mesma razão as caudas dos outros cometas que são curtas não sobem de suas cabeças com um movimento contínuo e rápido desaparecendo logo depois, mas são colunas de vapores e exalações permanentes e duradouras que, subindo das cabeças com um movimento lento de muitos dias, e compartilhando do movimento das cabeças que receberam desde o início, continuam a acompanhá-las através dos céus. Disto temos novamente um outro argumento, provando que os espaços celestes são vazios e sem resistência, pois neles não apenas os corpos sólidos dos planetas e cometas, mas também os vapores extremamente rarefeitos das caudas dos cometas, mantêm seus movimentos rápidos com grande liberdade e por um tempo muito longo.

Kepler atribui a subida das caudas dos cometas às atmosferas de suas cabeças, e suas direções para as partes opostas ao sol à ação dos raios da luz que levam com eles a matéria das caudas dos cometas. E, sem qualquer incongruência, podemos supor que, em espaços tão livres, uma matéria tão fina como a do éter possa ceder à ação dos raios da luz do sol, embora estes raios não sejam capazes de mover perceptivelmente as substâncias densas de nossas partes, que são impedidas com uma resistência tão palpável. Um outro autor pensa que possa haver uma espécie de partículas de matéria dotadas com um princípio da leveza, assim como outras o são com um poder da gravidade; que a matéria das caudas dos cometas possa ser do primeiro tipo, e que sua subida desde o sol possa ser devido à sua leveza; mas, considerando que a gravidade dos corpos terrestres é como a matéria dos corpos e, portanto, não pode ser mais nem menos na mesma quantidade de matéria, estou inclinado a acreditar que esta subida pode bem proceder da rarefação da matéria da cauda dos cometas. A subida da fumaça numa chaminé é devida ao impulso do ar com o qual ela está envolvida. O ar rarefeito sobe pelo calor, pois sua gravidade específica é diminuída, e em sua subida leva consigo a fumaça que flutua nele; e por que não poderia subir a cauda de um cometa a partir do sol da mesma maneira? Pois os raios do sol não agem sobre os meios que eles penetram a não ser pela reflexão e refração; e aquelas partículas refletoras aquecidas por esta ação, aquecem a matéria do éter que é envolvida com elas. Esta matéria é rarefeita pelo calor que adquire e como, por esta rarefação, é diminuída a gravidade específica com a qual tendia em direção ao sol, vai subir a partir dele e carregar com ela as partículas refletoras das quais é composta a cauda do cometa. Mas a subida dos vapores é acentuada por sua revolução ao redor do sol, em conseqüência da qual eles tentam se afastar do sol, enquanto que a atmosfera do sol e a outra matéria dos céus estão ou totalmente paradas, ou são movidas apenas com uma revolução mais lenta derivada da rotação do sol. E estes são os motivos da subida das caudas dos cometas nas redondezas do sol, onde suas órbitas são encurvadas numa curvatura maior, e os próprios cometas estão mergulhados nas partes mais densas e, portanto, mais pesadas da atmosfera solar. Devido a isto eles emitem então caudas de um comprimento imenso, pois as caudas que surgem então, mantendo seu próprio movimento, e entrementes gravitando em direção ao sol, giram em elipses ao redor do sol de forma semelhante ao que fazem as cabeças, e por este movimento sempre acompanham as cabeças e se aderem livremente a elas. Pois a gravitação dos vapores em direção ao sol não pode forçar as caudas a abandonar as cabeças e descer ao sol, como tampouco a gravitação das cabeças pode obrigá-las a cair das caudas. Devido à sua

gravidade comum, eles devem ou cair juntos em direção ao sol, ou ser retardados juntos em sua subida comum a partir dele. E portanto (se pelas causas já descritas ou por quaisquer outras), as caudas e cabeças dos cometas podem adquirir facilmente e manter livremente qualquer posição entre si, sem perturbação ou impedimento daquela gravitação comum.

As caudas, portanto, que surgem nas posições de periélio dos cometas acompanham suas cabeças até partes bem remotas, e junto com as cabeças irão ou voltar novamente até nós, após um longo transcurso de anos, ou serão rarefeitas e gradualmente desaparecerão. Depois, nas descidas das cabeças em direção ao sol, novas caudas curtas serão emitidas das cabeças com um movimento lento e gradualmente estas caudas serão aumentadas imensamente, especialmente naqueles cometas que em suas distâncias de periélio descem tão baixo até a atmosfera do sol. Pois todo vapor nestes espaços livres está num estado perpétuo de rarefação e dilatação, e devido a isto é que as caudas de todos os cometas são mais largas em suas extremidades superiores do que próximo de suas cabeças. E não é improvável que o vapor, assim continuamente rarefeito e dilatado, possa finalmente ser dissipado e espalhado por todo o céu, sendo pouco a pouco atraído em direção aos planetas por sua gravidade e misturado com sua atmosfera. Pois assim como os mares são absolutamente necessários para a constituição de nossa terra, já que a partir deles o sol, por seu calor, exala uma quantidade suficiente de vapores que, sendo juntados nas nuvens, possa cair na forma de chuva, para molhar a terra e para a produção e nutrição dos vegetais; ou, sendo condensados com o frio no topo das montanhas (como alguns filósofos julgam com razão), possa refluir em fontes e rios; da mesma forma para a conservação dos mares e fluidos dos planetas, parecem ser necessários os cometas, pois, por suas exalações e vapores condensados, as sobras dos fluidos planetários gastos na vegetação e putrefação, e convertidos em terra seca, são continuamente supridos e compostos. Pois todos os vegetais derivam seus crescimentos completamente a partir dos fluidos, e depois disto, em grande medida, são transformados em terra seca pela putrefação, e uma espécie de lodo é sempre encontrado sedimentado no fundo dos fluidos putrificados. E é por isto que a quantidade de terra sólida é aumentada continuamente. E os fluidos, se não são supridos de fora, devem estar diminuindo continuamente, até se esgotar por fim. Suspeito, além disto, que é principalmente dos cometas que vem o espírito, que é na verdade a menor, mas mais sutil e útil parte de nosso ar, tão necessária para manter a vida de todas as coisas.

As atmosferas dos cometas, em sua descida em direção ao sol, ao findar-se nas caudas, são gastas e diminuem, e tornam-se mais estreitas, ao

menos sobre aquele lado voltado para o sol. E ao se afastar do sol, quando elas pouco esgotam-se nas caudas, são novamente alargadas, se Hewelcke marcou corretamente suas aparições. Mas elas são vistas com o menor tamanho logo após terem sido mais aquecidas pelo sol e devido a isto emitem as caudas mais longas e mais resplandecentes. Talvez, ao mesmo tempo, os núcleos sejam cercados com uma fumaça mais densa e mais preta nas partes mais baixas de suas atmosferas, pois a fumaça que surge por um calor grande e intenso é comumente mais densa e mais preta. Assim a cabeça deste cometa que estamos descrevendo, a iguais distâncias do sol e da terra, aparecia mais escura após ele ter passado por seu periélio do que aparecia antes; pois no mês de dezembro era comumente comparado com as estrelas da terceira magnitude, mas em novembro com aquelas da primeira ou segunda; e aqueles que viram ambas aparições descreveram a primeira como de um cometa distinto e maior do que o da segunda. Pois em 19 de novembro este cometa apareceu para um jovem em Cambridge, embora com uma luz fraca e pálida, igual contudo a Spica Virginis; e naquele tempo ele emitiu luz com maior brilho do que o fez depois. E Montenari observou-o em 20 de novembro maior do que as estrelas da primeira magnitude, sua cauda sendo então 2 graus alongada. E o Sr. Storer (pelas cartas que chegaram às minhas mãos) escreve que no mês de dezembro, quando a cauda aparecia do maior tamanho e esplendor, a cabeça era pequena, e muito menor do que aquela que foi vista no mês de novembro antes do sol nascer e, conjeturando sobre a causa da aparência, julgou que provinha da existência de uma quantidade maior de matéria na cabeça inicialmente, que foi gradualmente gasta depois.

E, pela mesma razão, descobri que as cabeças de outros cometas que tinham caudas do maior tamanho e esplendor, apareceram obscuras e pequenas. Pois em 5 de março de 1668, às 7^h da noite no Brasil, Valentin Estancel viu um cometa próximo ao horizonte, em direção ao sudoeste, com uma cabeça tão pequena que dificilmente era discernível, mas com uma cauda esplêndida acima das medidas, de forma que sua reflexão pelo mar era vista facilmente por aqueles que estavam na praia, parecia como um feixe ardente estendendo-se com um comprimento de 23 graus de oeste a sul, quase paralelo ao horizonte. Mas este esplendor excessivo continuou por apenas três dias, diminuindo rapidamente depois e enquanto o esplendor estava diminuindo, o tamanho da cauda aumentava. Também em Portugal se diz que tomou um quarto dos céus, isto é, 45 graus, estendendo-se de oeste a leste com um esplendor muito notável, embora toda a cauda não fosse vista nestas partes, pois a cabeça estava sempre escondida sob o hori-

zonte. Devido ao aumento do tamanho e diminuição do esplendor da cauda, conclui-se que a cabeça estava então se afastando do sol, e havia estado muito próxima dele em seu periélio, como aconteceu com o cometa de 1680. E lemos, na *Crônica Saxônica*, de um cometa semelhante aparecendo no ano de 1106, *cuja estrela era pequena e obscura* (como aquela de 1680), *mas o esplendor de sua cauda era muito brilhante, e como um imenso feixe ardente estendia-se numa direção entre o leste e o norte*, como Hewelcke também soube por Simeon, o monge de Durham. Este cometa apareceu no início de fevereiro, ao redor do anoitecer, e em direção à parte sudoeste do céu. A partir disto e da posição da cauda, inferimos que a cabeça estava próxima do sol. Matthew Paris afirma, *Ele estava distante do sol ao redor de um cúbito*, desde as três horas* (ou melhor seis) *até às nove, exibindo uma longa cauda.* Assim também foi aquele cometa resplandecente descrito por Aristóteles, *Meteorologia*, I, 6. *Sua cabeça não podia ser vista, pois ela havia se posto antes do sol, ou ao menos estava escondida sob os raios do sol; no dia seguinte ela mal podia ser vista; pois, havendo se afastado muito ligeiramente do sol, ela se pôs imediatamente após ele. E a luz espalhada da cabeça, obscurecida pelo esplendor tão grande* (da cauda) *ainda não aparecia. Mas depois disto* (como diz Aristóteles) *quando o esplendor* (da cauda) *tinha diminuído,* (a cabeça do) *cometa recobrou seu brilho original; e o esplendor* (de sua cauda) *alcançava agora um terço dos céus* (isto é, até 60°). *Esta aparição foi no inverno* (o quarto ano da 101ª Olimpíada), *e, subindo até a cinta de Orion, lá desapareceu.* É verdade que o cometa de 1618, que saiu diretamente de debaixo dos raios do sol com uma cauda muito grande, parecia igualar, se não ultrapassar, as estrelas da primeira magnitude; mas também é certo que muitos outros cometas apareceram ainda maiores do que este e exibindo caudas mais curtas. Diz-se que alguns destes apareceram tão grandes quanto Júpiter, outros tão grandes quanto Vênus, ou mesmo como a lua.

Dissemos que os cometas são uma espécie de planetas girando em órbitas muito excêntricas ao redor do sol. E assim como nos planetas que não têm caudas, aqueles que giram em órbitas menores e mais próximas do sol são comumente menores, também nos cometas é provável que aqueles que em seu periélio se aproximam mais do sol tenham geralmente uma grandeza menor, tal que eles não possam agitar muito o sol por suas atrações. Sobre os diâmetros transversos de suas órbitas e os tempos periódicos de suas revoluções, deixo-os para serem determinados comparando os cometas que após longos intervalos de tempo retornam novamente na mesma órbita. Entrementes a Proposição seguinte pode lançar alguma luz sobre esta pesquisa.

*. N. T.: Antiga medida de comprimento igual a cerca de 50 cm.

Proposição XLII. Problema XXII

Corrigir a órbita de um cometa obtida como acima.

Operação 1 – Assuma aquela posição do plano da órbita que foi determinada de acordo com a Proposição precedente e selecione três lugares do cometa, deduzidos de observações muito precisas e a grandes distâncias entre si. Então represente por A o tempo entre a primeira observação e a segunda, e por B o tempo entre a segunda e a terceira. Mas é conveniente que num destes tempos o cometa esteja em seu perigeu, ou pelo menos não distante dele. A partir destes lugares aparentes obtenha por operações trigonométricas os três lugares verdadeiros do cometa no plano assumido da órbita. Descreva então através dos lugares obtidos, e ao redor do centro do sol como foco, uma seção cônica por operações aritméticas, de acordo com a Proposição 21, Livro I. Sejam D e E as áreas desta figura que são terminadas por raios traçados do sol aos lugares obtidos, a saber, D a área entre a primeira observação e a segunda, e E a área entre a segunda e a terceira. E seja T o tempo total em que toda a área D + E seria descrita com a velocidade do cometa obtida pela Proposição 16, Livro I.

Operação 2 – Mantendo a inclinação do plano da órbita para o plano da eclíptica, aumente a longitude dos nós do plano da órbita pela adição de 20' ou 30', que será chamada de P. Então a partir dos três lugares observados do cometa mencionados anteriormente encontre (como antes) os três lugares verdadeiros neste novo plano; assim como também a órbita passando através destes lugares, e as duas áreas da mesma descritas entre as duas observações, que serão chamadas de d e e; e seja t o tempo total em que a área total $d + e$ deve ser descrita.

Operação 3 – Mantendo a longitude dos nós na primeira operação, aumente a inclinação do plano da órbita para o plano da eclíptica adicionando a ele 20' ou 30', que será chamado de Q. Então, a partir dos três lugares aparentes do cometa mencionados anteriormente encontre os três lugares verdadeiros neste novo plano, assim como a órbita passando através dele, e as duas áreas do mesmo descritas entre as observações, que serão chamadas de δ e ε; e seja τ o tempo total em que a área total $\delta + \varepsilon$ deve ser descrita.

Tomando então C para 1 assim como A está para B; G para 1 assim como D para E; g para 1 assim como d para e; e γ para 1 assim como δ para ε; seja S o tempo verdadeiro entre a primeira observação e a terceira e, observando bem os sinais + e -, encontre os números m e n que fazem $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$; e $2T - 2S = mT - mt + nT - n\tau$. E, se na primeira operação,

I representa a inclinação do plano da órbita para o plano da eclíptica, e K a longitude de qualquer nó, então I + nQ será a inclinação verdadeira do plano da órbita para o plano da eclíptica, e K + mP a longitude verdadeira do nó. E, por último, na primeira, segunda e terceira operações, se as quantidades R, r e ρ representam os parâmetros da órbita, e as quantidades $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$ e $\frac{1}{\gamma}$ os diâmetros transversos da mesma, então $R + mr - mR + n\rho - nR$ será o parâmetro verdadeiro, e $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ será o diâmetro transverso verdadeiro da órbita que o cometa descreve, e a partir do diâmetro transverso dado o tempo periódico do cometa também é dado. Q.E.I. Mas os tempos periódicos das revoluções dos cometas, e os diâmetros transversos de suas órbitas, não podem ser determinados com precisão suficiente a não ser comparando os cometas que apareceram em tempos diferentes. Se, após intervalos iguais de tempo, vários cometas são encontrados que descreveram a mesma órbita, podemos concluir que eles são um mesmo cometa girando na mesma órbita. Então, a partir dos tempos de suas revoluções os diâmetros transversos de suas órbitas serão dados, e a partir destes diâmetros serão determinadas as próprias órbitas elípticas.

Para tanto as órbitas de muitos cometas devem ser calculadas, supondo estas órbitas parabólicas. Pois tais órbitas sempre concordarão aproximadamente com os fenômenos, como aparece não apenas da órbita parabólica do cometa do ano de 1680, que comparei acima com as observações, mas também com aquela do cometa notável que apareceu no ano de 1664 e 1665, sendo observada por Hewelcke, que a partir de suas observações calculou suas longitudes e latitudes, embora com pouca precisão. Mas, a partir das mesmas observações, o Dr. Halley calculou novamente seus lugares e a partir destes novos lugares determinou sua órbita, encontrando seu nó ascendente em ♊ 21°13'55"; a inclinação da órbita para o plano da eclíptica 21°18'40"; a distância de seu periélio ao nó, estimado na órbita do cometa, 49°27'30", seu periélio em ♌ 8°40'30", com latitude heliocêntrica sul 16°01'45"; o cometa tendo estado em seu periélio em 24 de novembro, às 11^h52^m da noite em Londres, ou 13^h8^m em Dantzick; e que o *latus rectum* da parábola era de 410286 partes supondo que a distância média entre o sol e a terra contém 100 000 destas partes. A grande aproximação entre os lugares do cometa calculados nesta órbita e as observações aparece na tabela calculada pelo Dr. Halley:

Tempo aparente em Dantzick	As distâncias observadas do cometa para		Os lugares observados		Os lugares calculados na órbita
Dezembro		° ′ ″		° ′ ″	° ′ ″
d h m	o coração de Leão	46, 24, 20	Long.	♎ 7, 01, 00	♎ 7, 1, 29
3, 18, 29½	a ponta de Virgem	22, 52, 10	Lat. S.	21, 39, 0	21, 38, 50
4, 18, 1½	o coração de Leão	46, 2, 45	Long.	♎ 6, 15, 0	♎ 6, 16, 5
	a ponta de Virgem	23, 52, 40	Lat. S.	22, 24, 0	22, 24, 0
7, 17, 48	o coração de Leão	44, 48, 0	Long.	♎ 3, 6, 0	♎ 3, 7, 33
	a ponta de Virgem	27, 56, 40	Lat. S.	25, 22, 0	25, 21, 40
17, 14, 43	o coração de Leão	53, 15, 15	Long.	♌ 2, 56, 0	♌ 2, 56, 0
	ombro direito de Orion	45, 43, 30	Lat. S.	49, 25, 0	49, 25, 0
19, 9, 25	Procion	35, 13, 50	Long.	♊ 28, 40, 30	♊ 28, 43, 0
	estrela brilhante da mandíbula da Baleia	52, 56, 0	Lat. S.	45, 48, 0	45, 46, 0
20, 9, 53½	Procion	40, 49, 0	Long.	♊ 13, 03, 0	♊ 13, 5, 0
	estrela brilhante da mandíbula da Baleia	40, 04, 0	Lat. S	39, 54, 0	39, 53, 0
21, 9, 9½	ombro direito de Orion	26, 21, 25	Long.	♊ 2, 16, 0	♊ 2, 18, 30
	estrela brilhante da mandíbula da Baleia	29, 28, 0	Lat. S.	33, 41, 0	33, 39, 40
22, 9, 0	ombro direito de Orion	29, 47, 0	Long.	♉ 24, 24, 0	♉ 24, 27, 0
	estrela brilhante da mandíbula da Baleia	20, 29, 30	Lat. S.	27, 45, 0	27, 46, 0
26, 7, 58	estrela brilhante de Áries	23, 20, 0	Long.	♉ 9, 0, 0	♉ 9, 2, 28
	Aldebarã	26, 44, 0	Lat. S.	12, 36, 0	12, 34, 13
27, 6, 45	estrela brilhante de Áries	20, 45, 0	Long.	♉ 7, 5, 40	♉ 7, 8, 45
	Aldebarã	28, 10, 0	Lat. S.	10, 23, 0	10, 23, 13
28, 7, 39	estrela brilhante de Áries	18, 29, 0	Long.	♉ 5, 24, 45	♉ 5, 27, 52
	Palilicium	29, 37, 0	Lat. S.	8, 22, 50	8, 23, 37
31, 6, 45	cinta de Andrômeda	30, 48, 10	Long.	♉ 2, 7, 40	♉ 2, 8, 20
	Palilicium	32, 53, 30	Lat. S.	4, 13, 0	4, 16, 25
Jan. 1665	cinta de Andrômeda	25, 11, 0	Long.	♈ 28, 24, 47	♈ 28, 24, 0
7, 7, 37½	Palilicium	37, 12, 25	Lat. N.	0, 54, 0	0, 53, 0
13, 7, 0	cabeça de Andrômeda	28, 7, 10	Long.	♈ 27, 6, 54	♈ 27, 6, 39
	Palilicium	38, 55, 20	Lat. N.	3, 6, 50	3, 7, 40
24, 7, 29	cinta de Andrômeda	20, 32, 15	Long.	♈ 26, 29, 15	♈ 26, 28, 50
	Palilicium	40, 5, 0	Lat. N.	5, 25, 50	5, 26, 0
Fevereiro			Long.	♈ 27, 4, 46	♈ 27, 24, 55
7, 8, 37			Lat. N.	7, 3, 29	7, 3, 15
22, 8, 46			Long.	♈ 28, 29, 46	♈ 28, 29, 58
			Lat. N.	8, 12, 36	8, 10, 25
Março			Long.	♈ 29, 18, 15	♈ 29, 18, 20
1, 8, 16			Lat. N.	8, 36, 26	8, 36, 12
7, 8, 37			Long.	♉ 0, 2, 48	♉ 0, 2, 42
			Lat. N.	8, 56, 30	8, 56, 56

Em fevereiro, no início do ano de 1665, a primeira estrela de Áries, que vou chamar daqui por diante de γ, estava em ♈ 28°30'15", com 7°8'58" de latitude norte; a segunda estrela de Áries estava em ♈ 29°17'18", com 8°28'16" de latitude norte; uma outra estrela da sétima magnitude, que chamarei de A, estava em ♈ 28°24'45", com 8°28'33" de latitude norte. Em 7 de fevereiro às 7^h30^m em Paris (isto é, 7 de fevereiro às 8^h37^m em Dantzick), o cometa formou um triângulo com as estrelas γ e A, que era reto em γ; e a distância do cometa à estrela γ era igual à distância das estrelas γ e A, isto é, 1°19'46" de um grande círculo; e, portanto, na paralela da latitude da estrela γ ela era de 1°20'26". Portanto, se a partir da longitude da estrela γ for subtraída a longitude 1°20'26", vai sobrar a longitude do cometa ♈ 27°9'49". O Sr. Auzout, a partir desta sua observação, colocou o cometa aproximadamente em ♈ 27°0'; e, pelo desenho em que o Dr. Hooke delineou seu movimento, ele estava então em ♈ 26°59'24". Coloco-o em ♈ 27°4'46", tomando o valor médio entre estes dois extremos.

Pelas mesmas observações o Sr. Auzout obteve que a latitude do cometa neste tempo era 7° e 4' ou 5' para o norte, mas ele teria feito melhor se tivesse obtido 7°3'29", a diferença das latitudes do cometa e da estrela γ sendo igual à diferença da longitude das estrelas γ e A.

No dia 22 de fevereiro, às 7^h30^m em Londres, isto é, 22 de fevereiro às 8^h46^m em Dantzick, a distância do cometa para a estrela A, de acordo com as observações do Dr. Hooke, como foram delineadas por ele próprio num esquema, e também pelas observações do Sr. Auzout, delineadas de maneira semelhante pelo Sr. Petit, era uma quinta parte da distância entre a estrela A e a primeira estrela de Áries, ou 15'57"; e a distância do cometa até uma linha reta ligando a estrela A e a primeira de Áries era uma quarta parte da mesma quinta parte, isto é, 4'; e, portanto, o cometa estava em ♈ 28°29'46", com 8°12'36" de latitude norte.

Em primeiro de março, às 7^h0^m em Londres, isto é, primeiro de março às 8^h16^m em Dantzick, o cometa foi observado próximo da segunda estrela em Áries, a distância entre eles estando para a distância entre a primeira e segunda estrelas em Áries, isto é, para 1°33', assim como 4 está para 45 de acordo com o Dr. Hooke, ou como 2 para 23 de acordo com o Sr. Gottignies. E, portanto, a distância do cometa para a segunda estrela em Áries era de 8'16" de acordo com o Dr. Hooke, ou 8'5" de acordo com o Dr. Gottignies; ou, tomando uma média entre ambas, 8'10". Mas, de acordo com o Sr. Gottignies, o cometa tinha ido além da segunda estrela de Áries ao redor de uma quarta ou quinta parte do espaço que ele usualmente descrevia num dia, a saber, ao redor de 1'35" (no que ele concorda muito bem com o Sr.

Auzout); ou, de acordo com o Dr. Hooke, não tanto, mas talvez apenas 1'. Portanto, se adicionamos à longitude da primeira estrela em Áries 1', e 8'10" a sua latitude, teremos a longitude do cometa ♈ 29°18', com 8°36'26'''de latitude norte.

Em 7 de março, às 7^h30^m de Paris, isto é, 7 de março, às 7^h37^m em Dantzick, a partir das observações do Sr. Auzout, a distância entre o cometa e a segunda estrela em Áries era igual à distância desta estrela para a estrela A, isto é, 52'29"; e a diferença da longitude do cometa e da segunda estrela em Áries era de 45' ou 46', ou, tomando uma quantidade média, 45'30"; e, portanto, o cometa estava em ♉ 0°2'48". Pelo desenho feito pelo Sr. Petit, baseado nas observações do Sr. Auzout, Hewelcke determinou a latitude do cometa em 8°54'. Mas o gravador não traçou corretamente a curvatura da trajetória do cometa perto do final do movimento; e Hevellius, num desenho sobre as observações do Sr. Auzout que ele próprio fez, corrigiu esta curvatura irregular, e assim determinou a latitude do cometa em 8°55'30". E, corrigindo ainda mais esta irregularidade, a latitude pode tornar-se 8°56', ou 8°57'.

Este cometa também foi visto em 9 de março, e neste tempo seu lugar deve ter sido em ♉ 0°18', com 9°3½' de latitude norte, aproximadamente.

Este cometa apareceu por três meses, sendo que neste espaço de tempo viajou por quase seis signos, e num dos dias descreveu quase 20 graus. Seu caminho desviou-se muito de um grande círculo, inclinando-se em direção ao norte, e seu movimento retrógrado tornou-se perto do fim direto. Apesar de seu caminho ter sido tão incomum, aparece contudo pela tabela que a teoria concorda com as observações, do começo ao fim, não menos precisamente do que concordam usualmente as teorias dos planetas com suas observações; mas temos de subtrair ao redor de 2' quando o cometa era o mais rápido, o que podemos fazer removendo 12" do ângulo entre o nó ascendente e o periélio, ou tornando este ângulo 49°27'18". A paralaxe anual destes dois cometas (este e o precedente) era muito proeminente, e por sua quantidade demonstra o movimento anual da terra em sua órbita.

Esta teoria é confirmada de maneira semelhante pelo movimento daquele cometa que no ano 1683 aparecia retrógrado, numa órbita cujo plano fazia quase um ângulo reto com o plano da eclíptica, e cujo nó ascendente (pelo cálculo do Dr. Halley) estava em ♍ 23°23'; a inclinação de sua órbita para a eclíptica 83°11'; seu periélio em ♊ 25°29'30"; sua distância de periélio para o sol 56020 das partes, supondo que o raio da órbita da terra contém 100000 destas partes; e a data de seu periélio foi 2 de julho, às 3^h50^m. E seus lugares calculados pelo Dr. Halley nesta órbita são comparados na tabela seguinte com os lugares observados pelo Sr. Flamsteed.

1683, Tempo equatorial	Lugar do sol	Longitude calculada do cometa	Latitude norte calculada	Longitude observada do cometa	Latitude norte observada	Diferença de longitude	Diferença de latitude
d h m	o ' "	o ' "	o ' "	o ' "	o ' "	' "	' "
Jul. 13, 12, 55	♌ 1, 02, 30	♋ 13, 05, 42	29, 28, 13	♋ 13, 6, 42	29, 28, 20	+ 1, 00	+ 0, 07
15, 11, 15	2, 53, 12	11, 37, 48	29, 34, 0	11, 39, 43	29, 34, 50	+ 1, 55	+ 0, 50
17, 10, 20	4, 45, 45	10, 7, 6	29, 33, 30	10, 8, 40	29, 34, 0	+ 1, 34	+ 0, 30
23, 13, 40	10, 38, 21	5, 10, 27	28, 51, 42	5, 11, 30	28, 50, 28	+ 1, 03	- 1, 14
25, 14, 5	12, 35, 28	3, 27, 53	24, 24, 47	3, 27, 0	28, 23, 40	- 0, 53	- 1, 7
31, 9, 42	18, 09, 22	♊ 27, 55, 3	26, 22, 52	♊ 27, 54, 24	26, 22, 25	- 0, 39	- 0, 27
31, 14, 55	18, 21, 53	27, 41, 7	26, 16, 57	27, 41, 8	26, 14, 50	+ 0, 1	- 2, 7
Ago. 2, 14, 56	20, 17, 16	25, 29, 32	25, 16, 19	25, 28, 46	25, 17, 28	- 0, 46	+ 1, 9
4, 10, 49	22, 02, 50	23, 18, 20	24, 10, 49	23, 16, 55	24, 12, 19	- 1, 25	+ 1, 30
6, 10, 9	23, 56, 45	20, 42, 23	22, 47, 5	20, 40, 32	22, 49, 5	- 1, 51	+ 2, 0
9, 10, 26	26, 50, 52	16, 7, 57	20, 6, 37	16, 5, 55	20, 6, 10	- 2, 2	- 0, 27
15, 14, 1	♍ 2, 47, 13	3, 30, 48	11, 37, 33	3, 26, 18	11, 32, 1	- 4, 30	- 5, 32
16, 15, 10	3, 48, 2	0, 43, 7	9, 34, 16	0, 41, 55	9, 34, 13	- 1, 12	- 0, 3
18, 15, 44	5, 45, 33	♉ 24, 52, 53	5, 11, 15	♉ 24, 49, 5	5, 9, 11	- 3, 48	- 2, 4
			Sul		Sul		
22, 14, 44	9, 35, 49	11, 7, 14	5, 16, 58	11, 07, 12	5, 16, 58	- 0, 2	- 0, 3
23, 15, 52	10, 36, 48	7, 2, 18	8, 17, 9	7, 1, 17	8, 16, 41	- 1, 1	- 0, 28
26, 16, 2	13, 31, 10	♈ 24, 45, 31	16, 38, 0	♈ 24, 44, 00	16, 38, 20	- 1, 31	+ 0, 20

Esta teoria é ainda mais confirmada pelo movimento daquele cometa retrógrado que apareceu no ano de 1682. Seu nó ascendente (pelo cálculo do Dr. Halley) estava em ♉ 21°16'30"; a inclinação de sua órbita para o plano da eclíptica 17°56'00"; seu periélio em ♒ 2°52'50"; sua distância de periélio ao sol continha 58328 partes, supondo que o raio da órbita da terra contem 100 000 destas partes; e a data de sua passagem pelo periélio foi no dia 4 de setembro às $7^{h}39^{m}$. E seus lugares determinados pelas observações do Sr. Flamsteed são comparadas na tabela seguinte com seus lugares calculados por nossa teoria:

1682, Tempo ap.	Lugar do sol	Longitude calculada do cometa	Latitude norte calculada	Longitude observada do cometa	Latitude norte observada	Diferença de longitude	Diferença de latitude
d h m	o ' "	o ' "	o ' "	o ' "	o ' "	' "	' "
Ag. 19, 16, 38	♍ 7, 0, 7	♌ 18, 14, 28	25, 50, 7	♌ 18, 14, 40	25, 49, 55	- 0, 12	+ 0, 12
20, 15, 38	7, 55, 52	24, 46, 23	26, 14, 42	24, 46, 22	26, 12, 52	+ 0, 1	+ 1, 50
21, 8, 21	8, 36, 14	29, 37, 15	26, 20, 3	29, 38, 02	26, 17, 37	- 0, 47	+ 2, 26

(cont.)

1682, Tempo ap.	Lugar do sol	Longitude calculada do cometa	Latitude norte calculada	Longitude observada do cometa	Latitude norte observada	Diferença de longitude	Diferença de latitude
d h m	*o* ' "	*o* ' "	*o* ' "	*o* ' "	*o* ' "	' "	' "
22, 8, 8	9, 33, 55	♍ 6, 29, 53	26, 8, 42	♍ 6, 30, 3	26, 7, 12	- 0, 10	+ 1, 30
29, 08, 20	16, 22, 40	♎ 12, 37, 54	18, 37, 47	♎ 12, 37, 49	18, 34, 5	+ 0, 5	+ 3, 42
30, 7, 45	17, 19, 41	15, 36, 1	17, 26, 43	15, 35, 18	17, 27, 17	+ 0, 43	- 0, 34
Set. 1, 7, 33	19, 16, 9	20, 30, 53	15, 13, 0	20, 27, 4	15, 9, 49	+ 3, 49	+ 3, 11
4, 7, 22	22, 11, 28	25, 42, 0	12, 23, 48	25, 40, 58	12, 22, 0	+ 1, 2	+ 1, 48
5, 7, 32	23, 10, 29	27, 0, 46	11, 33, 08	26, 59, 24	11, 33, 51	+ 1, 22	- 0, 43
8, 7, 16	26, 5, 58	29, 58, 44	9, 26, 46	29, 58, 45	9, 26, 43	- 0, 1	+ 0, 3
9, 7, 26	27, 5, 9	♏ 0, 44, 10	8, 49, 10	♏ 0, 44, 4	8, 48, 25	+ 0, 6	+ 0, 45

Esta teoria também é confirmada pelo movimento retrógrado do cometa que apareceu no ano de 1723. O nó ascendente deste cometa (de acordo com os cálculos do Sr. Bradley, Professor Saviliano de Astronomia em Oxford) estava em ♈ 14°16', a inclinação da órbita para o plano da eclíptica 49°59'. Seu periélio estava em ♉ 12°15'20", sua distância no periélio para o sol era de 998651 partes, sendo que o raio da órbita da terra contém 1000000 destas partes, e a data de sua passagem pelo periélio foi no dia 16 de setembro às $16^h 10^m$. Os lugares deste cometa calculados nesta órbita pelo Sr. Bradley, e comparados com os lugares observados por ele próprio, por seu tio Sr. Pound, e pelo Dr. Halley, podem ser vistos na tabela seguinte.

1723, Tempo equatorial	Longitude observada do cometa	Latitude norte observada	Longitude calculada do cometa	Latitude norte calculada	Diferença de longitude	Diferença de latitude
d h m	*o* ' "	*o* ' "	*o* ' "	*o* ' "	"	"
Out. 9, 8, 5	♒ 7, 22, 15	5, 2, 0	♒ 7, 21, 26	5, 2, 47	+ 49	- 47
10, 6, 21	6, 41, 12	7, 44, 13	6, 41, 42	7, 43, 18	- 50	+ 55
12, 7, 22	5, 39, 58	11, 55, 0	5, 40, 19	11, 54, 55	- 21	+ 5
14, 8, 57	4, 59, 49	14, 43, 50	5, 0, 37	14, 44, 1	- 48	- 11
15, 6, 35	4, 47, 41	15, 40, 51	4, 47, 45	15, 40, 55	- 4	- 4
21, 6, 22	4, 2, 32	19, 41, 49	4, 2, 21	19, 42, 3	+ 11	- 14
22, 6, 24	3, 59, 2	20, 8, 12	3, 59, 10	20, 8, 17	- 8	- 5
24, 8, 2	3, 55, 29	20, 55, 18	3, 55, 11	20, 55, 9	+ 18	+ 9
29, 8, 56	3, 56, 17	22, 20, 27	3, 56, 42	22, 20, 10	- 25	+ 17
30, 6, 20	3, 58, 9	22, 32, 28	3, 58, 17	22, 32, 12	- 8	+ 16
Nov. 5, 5, 53	4, 16, 30	23, 38, 33	4, 16, 23	23, 38, 7	+ 7	+ 26

(cont.)

1723, Tempo equatorial	Longitude observada do cometa	Latitude norte observada	Longitude calculada do cometa	Latitude norte calculada	Diferença de longitude	Diferença de latitude
8, 7, 6	4, 29, 36	24, 4, 30	4, 29, 54	24, 4, 40	- 18	- 10
14, 6, 20	5, 2, 16	24, 48, 46	5, 2, 51	24, 48, 16	- 35	+ 30
20, 7, 45	5, 42, 20	25, 24, 45	5, 43, 13	25, 25, 17	- 53	- 32
Dez. 7, 6, 45	8, 4, 13	26, 54, 18	8, 3, 55	26, 53, 42	+ 18	+ 36

Por estes exemplos é mais do que evidente que os movimentos dos cometas não são menos precisamente representados por nossa teoria do que os movimentos dos planetas por suas teorias. Portanto, por meio desta teoria podemos enumerar as órbitas dos cometas, e assim descobrir o tempo periódico de uma revolução do cometa em qualquer órbita e então, finalmente, teremos os diâmetros transversos de suas órbitas elípticas e suas distâncias de afélio.

Aquele cometa retrógrado que apareceu no ano de 1607 descreveu uma órbita cujo nó ascendente (de acordo com o cálculo do Dr. Halley) estava em ♉ 20°21'; e a inclinação do plano da órbita para o plano da eclíptica era de 17°2'; cujo periélio estava em ♒ 2°16'; e sua distância de periélio ao sol era de 58680 partes sendo que o raio da órbita da terra contém 100 000 destas partes; e o cometa estava em seu periélio em 16 de outubro, às 3^h50^m; órbita esta que concorda muito aproximadamente com a órbita do cometa que foi visto em 1682. Se estes não foram dois cometas diferentes, mas um mesmo cometa, ele irá completar uma revolução no espaço de 75 anos; e o maior eixo de sua órbita estará para o maior eixo da órbita da terra assim como $\sqrt[3]{75^2}$ está para 1, ou aproximadamente como 1778 está para 100. E a distância de afélio deste cometa ao sol estará para a distância média entre a terra e o sol assim como 35 está para 1 aproximadamente. A partir destes dados não será difícil determinar a órbita elíptica deste cometa. Mas, é para supor estas coisas com a condição de que após transcorrerem 75 anos o mesmo cometa retornará novamente na mesma órbita. Os outros cometas parecem chegar a alturas maiores, e parecem necessitar de um tempo maior para realizar suas revoluções.

Mas, devido ao grande número de cometas, da grande distância de seus afélios ao sol, e da lentidão de seus movimentos nos afélios, eles perturbam um ao outro por suas gravitações mútuas, de forma que suas excentricidades e os tempos de suas revoluções possam ser algumas vezes aumentados um pouco e algumas vezes diminuídos. Portanto, não devemos esperar que

o mesmo cometa vá retornar exatamente na mesma órbita e nos mesmos tempos periódicos. Será suficiente se encontrarmos mudanças não maiores do que as que podem surgir das causas que acabamos de mencionar.

E, portanto, pode ser dada uma razão do motivo pelo qual os cometas não estão compreendidos dentro dos limites do zodíaco, como acontece com os planetas, mas, não estando confinados a fronteiras, são dispersos com vários movimentos por todo o céu. O motivo disto é que em seus afélios, onde seus movimentos são extremamente lentos, afastando-se a distâncias maiores um do outro, sofrem menos perturbações devido a suas gravitações mútuas. E é por isto que os cometas que mais descem e, portanto, movem-se mais lentamente em seus afélios, serão também os que mais sobem.

O cometa que apareceu no ano de 1680 estava em seu periélio distante do sol apenas uma sexta parte do diâmetro do sol; e devido à sua velocidade extrema nesta proximidade ao sol, e a alguma densidade da atmosfera do sol, ele deve ter sofrido alguma resistência e retardação. Portanto, sendo atraído cada vez mais próximo ao sol em cada revolução, irá finalmente cair sobre o corpo do sol. Também pode acontecer de ele ser retardado em seu afélio, onde move-se mais lentamente, pelas atrações dos outros cometas, e, em conseqüência, desta retardação pode descer até o sol. Assim as estrelas fixas, que têm sido gastas gradualmente pela luz e vapores emitidos delas por um longo tempo, podem ser abastecidas pelos cometas que caem nelas; e a partir deste suprimento fresco de combustível novo, estas estrelas velhas, adquirindo novo esplendor, podem passar por estrelas novas. Deste tipo são as estrelas fixas que aparecem de repente e emitem luz com um brilho maravilhoso inicialmente, desaparecendo depois gradualmente. Assim foi aquela estrela que apareceu na Cadeira de Cassiopéia, que não foi vista por Cornelis Gemma em 8 de novembro de 1572, embora ele estivesse observando aquela parte dos céus naquela mesma noite e o céu estivesse perfeitamente sereno; mas na noite seguinte (9 de novembro) ele a viu brilhando com um brilho muito maior do que qualquer das estrelas fixas, e pouco inferior a Vênus em esplendor. Tycho Brahe observou-a no 11º dia do mesmo mês, quando ela brilhou com o maior lustre. A partir deste momento, observou-a decair gradualmente e no tempo de 16 meses, ela desapareceu completamente. No mês de novembro, quando ela apareceu primeiro, sua luz era igual àquela de Vênus. No mês de dezembro sua luz estava um pouco diminuída e equiparando-se à de Júpiter. Em janeiro de 1573 ela era menor do que Júpiter e maior do que Sírio, e ao redor do fim de fevereiro e início de março tornou-se igual a esta estrela. Nos meses de abril e maio ela era igual a uma estrela da segunda magnitude; em junho, julho e agosto, a

uma estrela da terceira magnitude; em setembro, outubro e novembro, àquelas da quarta magnitude; em dezembro e janeiro de 1574, àquelas da quinta; em fevereiro, àquelas da sexta magnitude; e em março, ela desapareceu completamente. Sua cor no início era clara, brilhante e inclinando-se para o branco; após isto ela tornou-se um pouco amarela; em março de 1573 tornou-se rubra, como Marte ou Aldebarã; em maio tornou-se de um tipo de brancura fusca, como aquela que observamos em Saturno; e manteve esta cor todo o tempo depois, mas ficando sempre cada vez mais escura. Assim também foi a estrela no pé direito de Serpentarius, observada pela primeira vez pelos alunos de Kepler em 30 de setembro de 1604, com uma luz excedendo aquela de Júpiter, embora na noite anterior ela não tenha sido vista; e a partir deste tempo ela diminuiu gradualmente e, em 15 ou 16 meses, desapareceu completamente. Diz-se que foi uma estrela nova deste tipo, aparecendo com um esplendor atípico, que levou Hiparco a observar e a fazer um catálogo das estrelas fixas. Em relação às estrelas fixas que aparecem e desaparecem alternadamente, aumentando lentamente e gradualmente, dificilmente chegando a ultrapassar as estrelas da terceira magnitude, elas parecem ser de um outro tipo, que giram ao redor de seus eixos e, tendo um lado claro e escuro, mostram estes dois lados diferentes alternadamente. Os vapores que surgem do sol, das estrelas fixas e das caudas dos cometas, podem encontrar-se finalmente com as atmosferas dos planetas e cair neles por sua gravidade, sendo lá condensados e transformados em água e espíritos úmidos e depois, por um calor lento, adquirir gradualmente a forma de sais, enxofres, tinturas, lodo, barro, areia, pedras, coral e outras substâncias terrestres.

» ESCÓLIO GERAL

A hipótese dos vórtices apresenta muitas dificuldades. Para que todo planeta possa descrever áreas proporcionais aos tempos de percurso por um raio traçado ao sol, os tempos periódicos das várias partes dos vórtices devem seguir o quadrado de suas distâncias ao sol. Mas, para que os tempos periódicos dos planetas possam seguir a $\frac{3}{2}$ª potência de suas distâncias ao sol, os tempos periódicos das partes dos vórtices devem estar como a $\frac{3}{2}$ª potência de suas distâncias. Para que os vórtices menores possam manter suas revoluções menores ao redor de Saturno, Júpiter e de outros planetas, deslizando quietamente e sem serem perturbados no vórtice maior do sol, os tempos periódicos das partes do vórtice do sol devem ser iguais. Mas a rotação do sol e dos planetas ao redor de seus eixos, que deveria corresponder aos movimentos de seus vórtices, afasta-se muito de todas estas proporções. Os movimentos dos cometas são extremamente regulares, são governados pelas mesmas leis que os movimentos dos planetas, não podendo de forma alguma ser explicados pela hipótese dos vórtices. Pois os cometas são levados indiferentemente com movimentos muito excêntricos por todas as partes dos céus, com uma liberdade que é incompatível com a noção de um vórtice.

Os corpos lançados em nosso ar sofrem resistência apenas do ar. Retire o ar, como é feito no vácuo do Sr. Boyle, e cessa a resistência; pois

neste vazio uma pena e um pedaço de ouro sólido caem com igual velocidade. E o mesmo argumento deve valer nos espaços celestes acima da atmosfera da terra. Nestes espaços, onde não há ar para opor-se a seus movimentos, todos os corpos movem-se com a maior liberdade, mantendo os planetas e cometas constantemente suas revoluções em órbitas dadas em tipo e posição, de acordo com as leis explicadas acima. Mas embora estes corpos possam, de fato, continuar em suas órbitas pelas meras leis da gravidade, eles não podem de forma alguma ter derivado inicialmente as posições regulares das próprias órbitas a partir destas leis.

Os seis planetas primários giram ao redor do sol em círculos concêntricos com o sol, com movimentos direcionados para as mesmas partes e quase no mesmo plano. Dez luas giram ao redor da terra, de Júpiter e de Saturno, em círculos concêntricos com eles, com a mesma direção do movimento, e aproximadamente nos planos das órbitas destes planetas. Mas não se deve supor que meras causas mecânicas possam ter originado tantos movimentos regulares, já que os cometas percorrem todas as partes dos céus em órbitas muito excêntricas. Devido a este tipo de movimento atravessam facilmente os orbes dos planetas com muita rapidez; e em seus afélios, onde movem-se mais lentamente e detêm-se mais longamente, afastam-se às maiores distâncias um do outro, sofrendo assim a menor perturbação devido a suas atrações mútuas. Este sistema belíssimo do sol, planetas e cometas só pode ter surgido do conselho e domínio de um Ser inteligente e poderoso. E se as estrelas fixas são centros de outros sistemas similares, estes, sendo formados por um conselho sábio semelhante, devem estar todos sujeitos ao domínio de Alguém, especialmente porque luz das estrelas fixas é da mesma natureza que a luz do sol, e de cada sistema a luz passa para todos os outros sistemas. E para evitar que os sistemas das estrelas fixas caíssem um sobre o outro por suas gravidades, ele colocou estes sistemas a imensas distâncias entre si.

Este Ser[1] governa todas as coisas, não como a alma do mundo, mas como Senhor sobre tudo. E devido a seu domínio costuma ser chamado *Senhor Deus* παντοκράτωρ, ou *Amo Universal*. Pois *Deus* é uma palavra relativa que se refere a servos, e *Divindade* é o domínio de Deus não sobre seu próprio corpo, como imaginam aqueles que concebem que Deus é a alma do mundo, mas sobre os servos. O Deus Supremo é um Ser eterno, infinito, absolutamente perfeito. Mas não se pode dizer que um ser assim sem domínio, embora perfeito, seja o Senhor Deus. Pois dizemos meu Deus, seu Deus,

1. Apêndice, Nota 25.

o Deus de Israel, o Deus dos Deuses e Senhor dos Senhores; mas não dizemos, meu Eterno, seu Eterno, o Eterno de Israel, o Eterno dos Deuses; também não dizemos meu Infinito, nem meu Perfeito. Estes são títulos que não dizem respeito a servos. A palavra *Deus** significa usualmente *Senhor*, mas nem todo senhor é um Deus. É o domínio de um ser espiritual que constitui um Deus. Um domínio verdadeiro, supremo ou imaginário faz um Deus verdadeiro, supremo ou imaginário. E a partir de seu domínio verdadeiro segue-se que o verdadeiro Deus é um Ser vivo, inteligente e poderoso. E a partir de suas outras perfeições, segue-se que ele é supremo ou o mais perfeito. Ele é eterno e infinito, onipotente e onisciente. Isto é, sua duração alcança de eternidade a eternidade, sua presença de infinito a infinito, governa todas as coisas e conhece todas as coisas que são ou que podem ser feitas. Ele não é eternidade e infinidade, mas é eterno e infinito. Não é duração ou espaço, mas dura e está presente. Ele dura para sempre e está presente em todo lugar e, ao existir sempre e em todo lugar, constitui a duração e o espaço. Como toda partícula do espaço está *sempre*, e como todo momento indivisível da duração está *em todo lugar*, certamente o Criador e Senhor de todas as coisas não pode ser *nunca* e estar *em nenhuma parte*. Toda alma que tenha percepção é, apesar de em tempos diferentes e em diferentes órgãos de sentido e movimento, sempre a mesma pessoa indivisível. Há partes sucessivas em duração, partes coexistentes no espaço, mas nem uma nem outra podem encontrar-se na pessoa de um homem, ou em seu princípio pensante, e muito menos podem elas ser encontradas na substância pensante de Deus. Todo homem, enquanto algo que tem percepção, é um mesmo homem durante toda sua vida, em todos os seus órgãos sensoriais. Deus é o mesmo Deus, sempre e em todo lugar. Ele é onipresente não apenas *virtualmente*, mas também *substancialmente*, pois a virtude não pode subsistir sem substância. Nele** estão contidas e são movidas todas as coisas, mas

* O Dr. Pocock deriva a palavra latina *Deus* da palavra árabe *du* (no caso oblíquo *di*), que significa *Senhor*. E, neste sentido, os príncipes são chamados de *deuses*, Salmos LXXXII, 6; e João X, 35. E Moisés é chamado um *deus* por seu irmão Aaron e pelo Faraó (Êxodo IV, 16; e VII, 1). E no mesmo sentido as almas dos príncipes mortos eram chamadas antigamente *deuses* pelos pagãos, mas falsamente, devido a sua falta de domínio.

** Esta era a opinião dos antigos. Assim Pitágoras, em Cícero, *De Natura Deorum*, I. Tales, Anaxágoras e Virgílio, em *Geórgicas* IV, 220; e *Eneida* VI, 721. Filon, em *Alegorias*, no início do Livro I. Arato, em seu *Fenômenos*, no início. Assim também os escritores sagrados. Como São Paulo, em Atos XVII, 27 e 28. O Evangelho de São João XIV, 2. Moisés, em Deuteronômio IV, 39; e X, 14. Davi, em Salmos CXXXIX, 7, 8 e 9. Salomão, I Reis VIII, 27. Jó XXII, 12, 13 e 14. Jeremias XXIII, 23 e 24. Os idólatras supunham que o sol, a lua, as estrelas, as almas dos homens e outras

não se afetam mutuamente. Deus não sofre nada pelo movimento dos corpos e os corpos não encontram resistência devido à onipresença de Deus. Todos concedem que o Deus Supremo necessariamente existe, e pela mesma necessidade ele existe *sempre* e *em todo lugar*. Também pelo mesmo motivo ele é todo similar, todo olho, todo ouvido, todo cérebro, todo braço, todo poder para perceber, para entender e para agir, mas de uma maneira que não é em absoluto humana, de uma maneira que não é em absoluto corpórea, de uma maneira completamente desconhecida para nós. Assim como um homem cego não tem idéia das cores, assim também não temos idéia da maneira pela qual Deus todo-sábio percebe e compreende todas as coisas. Ele é completamente destituído de todo corpo e de toda forma corpórea e, portanto, não pode ser visto, nem ouvido, nem tocado; nem deve ele ser adorado sob a representação de qualquer coisa corpórea. Temos idéias de seus atributos, mas não sabemos qual é a substância real de qualquer coisa. Nos corpos, vemos apenas suas formas e cores, ouvimos apenas os sons, tocamos apenas suas superfícies externas, cheiramos apenas os odores e provamos os sabores. Mas suas substâncias interiores não são conhecidas nem por nossos sentidos, nem por qualquer ato reflexivo de nossas mentes. Muito menos podemos formar qualquer idéia da substância de Deus. Só o conhecemos por suas invenções mais sábias e excelentes das coisas e pelas causas finais;[2] o admiramos por suas perfeições, mas o reverenciamos e adoramos devido ao seu domínio. Pois o adoramos como seus servos; e um deus sem domínio, providência e causas finais nada é a não ser Destino e Natureza. Uma necessidade metafísica cega, que é certamente a mesma sempre e em todo lugar, não poderia produzir a variedade das coisas. Toda esta diversidade das coisas naturais que achamos adaptada para épocas e lugares diferentes não poderia ter surgido de outra coisa que não das idéias e vontade de um Ser que existe por necessidade. Alegoricamente se diz que Deus vê, fala, ri, ama, odeia, tem desejos, dá, recebe, se alegra, fica nervoso, luta, fabrica, trabalha, constrói; pois todas as nossas noções de Deus são obtidas mediante certa analogia com as condutas da humanidade, analogia que apesar de não ser perfeita conserva alguma semelhança. E, desta maneira, muito do que concerne a Deus, no que diz respeito a falar sobre ele a partir das aparências das coisas, pertence certamente à filosofia natural.

partes do mundo eram partes do Deus Supremo e que, portanto, deviam ser adoradas, mas estavam equivocados.

2. Apêndice, Nota 26.

Explicamos até aqui os fenômenos dos céus e de nosso mar pelo poder da gravidade, mas ainda não designamos a causa deste poder. Isto é certo, que ele tem de proceder de uma causa que penetra até os centros do sol e dos planetas, sem sofrer a menor diminuição de sua força; que não opera de acordo com a quantidade das superfícies das partículas sobre as quais atua (como as causas mecânicas fazem usualmente), mas de acordo com a quantidade de matéria sólida que elas contêm, propagando sua virtude para todos os lados a distâncias imensas, diminuindo sempre como o inverso do quadrado das distâncias.[3] A gravitação em direção ao sol é composta das gravitações em direção às várias partículas que compõem o corpo do sol; e ao se afastar do sol diminui precisamente como o inverso do quadrado das distâncias até a órbita de Saturno, como demonstra com evidência o repouso do afélio dos planetas, e até o afélio mais remoto dos cometas, se estes afélios também estão em repouso. Mas ainda não fui capaz de descobrir a causa destas propriedades da gravidade a partir dos fenômenos, e não construo hipóteses[4]. Pois tudo aquilo que não é deduzido a partir dos fenômenos é para ser chamado de uma hipótese. E as hipóteses, quer metafísicas ou físicas, quer de qualidades ocultas ou mecânicas, não têm lugar na filosofia experimental. Nesta filosofia as proposições particulares são inferidas a partir dos fenômenos, sendo depois generalizadas pela indução. Assim foram descobertas a impenetrabilidade, a mobilidade e a força impulsiva dos corpos, e as leis do movimento e da gravitação. E para nós é suficiente que a gravidade exista realmente e atue de acordo com as leis que explicamos, servindo abundantemente para explicar todos os movimentos dos corpos celestes e de nosso mar[5].

E agora poderíamos acrescentar alguma coisa concernente a um certo espírito muito sutil que penetra e fica escondido em todos os corpos grandes, por cuja força e ação as partículas dos corpos atraem-se umas às outras quando se encontram a distâncias próximas e se unem se estão contíguas; e os corpos elétricos operam a distâncias maiores, tanto repelindo quanto atraindo os corpúsculos vizinhos; e a luz é emitida, refletida, refratada, infletida e aquece os corpos; e toda sensação é excitada e os membros dos corpos animais movem-se ao comando da vontade, propagada pelas vibrações deste espírito ao longo dos filamentos sólidos dos nervos, a partir dos

3. Apêndice, Nota 27.
4. Apêndice, Nota 28.
5. Apêndice, Nota 29.

órgãos sensoriais externos até o cérebro e do cérebro aos músculos. Mas estas são coisas que não podem ser explicadas em poucas palavras. Também não dispomos de uma quantidade suficiente de experiências que é necessária para determinar com precisão e demonstrar mediante que leis opera este espírito elétrico e elástico.

[Fim do livro Princípios Matemáticos de Filosofia Natural.]

» O SISTEMA DO MUNDO[1]

TRADUÇÃO

Fábio Duarte Joly

1. A matéria dos céus é fluida.

Nos primórdios da filosofia, de acordo com uma antiga opinião, muitos pensavam que as estrelas fixas permaneciam imóveis nas partes mais altas do mundo; que, abaixo das estrelas fixas, os planetas eram levados em torno do sol; que a Terra, um desses planetas, descrevia um curso anual em torno do sol, enquanto que, por um movimento diurno, girava em torno de seu próprio eixo; e que o sol, como um fogo comum que tudo aquecia, estava fixo no centro do universo.

Esta era a filosofia ensinada por Filolau, Aristarco de Samos, Platão, nos seus anos maduros, e por toda a seita dos pitagóricos. Também era a opinião de Anaximandro, mais antiga ainda, e do sábio rei dos romanos, Numa Pompílio, que ergueu, como símbolo da figura do mundo com o sol no centro, um templo circular em louvor a Vesta e ordenou que um fogo perpétuo fosse mantido em seu interior.

Os egípcios eram antigos observadores dos céus e provavelmente a partir deles essa filosofia espraiou-se por outras nações. Foi deles, e das na-

1. Apêndice, Nota 30.

ções em seu redor, que os gregos, um povo mais inclinado ao estudo da filologia do que da natureza, derivaram suas primeiras e mais coerentes noções de filosofia. Aliás, nas cerimônias vestais podemos observar o antigo espírito dos egípcios, pois costumavam realizar seus mistérios, isto, é, sua filosofia das coisas que estão além do senso comum, sob o véu de ritos religiosos e símbolos hieroglíficos.

Não se deve negar que Anaxágoras, Demócrito e outros às vezes pensassem que a Terra era o centro do mundo e que, enquanto permanecia imóvel, as estrelas giravam ao seu redor em direção ao oeste, algumas rápido, outras lentamente.

Contudo, existia um consenso de que os movimentos dos corpos celestes realizavam-se em espaços destituídos de qualquer resistência. A idéia fantasiosa de orbes sólidos é posterior, introduzida por Eudoxo, Calipo e Aristóteles, em um momento no qual a filosofia antiga começou a declinar, cedendo lugar às então vigentes ficções dos gregos.

Mas, acima de tudo, os fenômenos dos cometas não podem tolerar a idéia de órbitas sólidas. Os caldeus, os mais sábios astrônomos de seu tempo, entendiam os cometas (que há muito eram considerados corpos celestes) como tipos particulares de planetas que, descrevendo órbitas excêntricas, tornavam-se visíveis apenas alternadamente, uma vez por revolução, quando atingiam as partes mais baixas de suas órbitas.

A conseqüência inevitável da hipótese das órbitas sólidas, enquanto prevaleceu, era a idéia de que os cometas deveriam ser lançados a espaços abaixo da lua. Mas quando observações posteriores de astrônomos restauraram os comentas a seus antigos lugares nos céus superiores, esses espaços celestiais ficaram necessariamente livres da interferência das órbitas sólidas.

2. O princípio do movimento circular em espaços livres.

Posteriormente não sabemos como os antigos explicavam a questão de como os planetas ficavam retidos em certos limites desses espaços livres, sendo desviados de seus cursos retilíneos, os quais deveriam manter quando abandonados, descrevendo revoluções regulares em órbitas curvilíneas. Provavelmente foi para enfrentar esta dificuldade que os orbes sólidos foram introduzidos.

Filósofos recentes, como Kepler e Descartes, tentaram solucioná-la aludindo à ação de certos vórtices, ou a um outro princípio de impulsão ou atração, como Borelli, Hooke e outros de nossa nação, pois, pelas leis do

movimento, é certo que esses efeitos devem proceder da ação de alguma força.

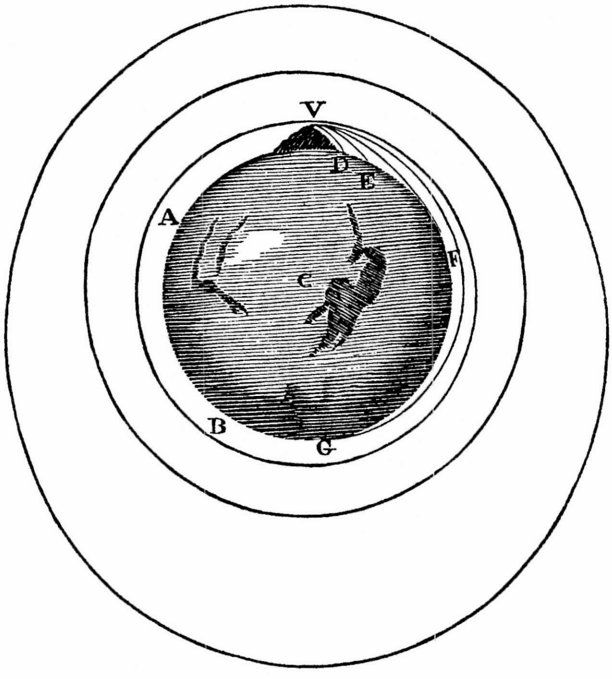
Mas nosso propósito resume-se a estabelecer a quantidade e propriedades desta força a partir dos fenômenos, e aplicar o que descobrirmos em alguns casos simples como princípios, pelos quais, de modo matemático, seja possível estimar os efeitos produzidos em casos mais complexos. Seria interminável e impossível a observação direta e imediata de todos os detalhes.

Dissemos *de modo matemático* a fim de evitar questões sobre a natureza ou a qualidade dessa força, a qual não pretendemos determinar por qualquer hipótese. Logo, convém denominá-la pelo nome geral de força centrípeta, já que é uma força dirigida a algum centro; e como se refere mais particularmente a um corpo naquele centro, convém denominá-la circunsolar, circunterrestre, circunjovial, e assim por diante com relação a outros corpos centrais.

3. A ação das forças centrípetas.

O fato de que, por meio de forças centrípetas, os planetas possam ser retidos em certas órbitas é facilmente compreendido se considerarmos os movimentos dos projéteis. Uma pedra que é projetada pela pressão de seu próprio peso é deslocada de seu curso retilíneo, o qual perseguiria pela sua projeção inicial, descrevendo uma linha curva no ar e através deste percurso arqueado logo atinge o solo. E quanto maior for a velocidade com a qual é projetada, mais longe irá antes de cair na Terra. Podemos, portanto, supor que a velocidade seja a tal ponto aumentada que a pedra descreveria um arco de 1, 2, 5, 10, 100, 1000 milhas antes de cair na Terra, ou mesmo que, excedendo os limites da Terra, passasse ao espaço sem sequer tocá-la.

Seja AFB a superfície da Terra, C o seu centro, VD, VE, VF as linhas curvas que um corpo descreve quando projetado em uma direção horizontal do topo de uma alta montanha, cada vez com maior velocidade; e, como os movimentos celestes são pouco retardados pela pequena ou nenhuma resistência dos espaços onde se realizam, para manter a paridade dos casos suponhamos que não haja ar ao redor da Terra ou que ao menos ele tenha pouco ou nenhum poder de resistência. E pelo mesmo motivo que o corpo projetado com a menor velocidade descreve o arco menor VD, e com maior velocidade o arco maior VE, e aumentando a velocidade ele desloca-se para F e G, se a velocidade for progressivamente aumentada, ele irá além da circunferência da Terra, retornando à montanha de que foi lançado.



E, como as áreas descritas com este movimento por um raio traçado ao centro da Terra são (pela Proposição I, Livro I, *Princípios Matemáticos*) proporcionais aos tempos em que são descritas, sua velocidade, ao retornar à montanha, não será menor do que a inicial; e, retomando a mesma velocidade, o corpo descreverá repetidamente a mesma curva, conforme a mesma lei.

Mas se agora imaginarmos a projeção de corpos na direção de linhas paralelas ao horizonte a partir de alturas maiores, de 5, 10, 100, 1000 ou mais milhas, ou ainda de tantos semidiâmetros da Terra, esses corpos, de acordo com suas diferentes velocidades e diferente força da gravidade em diferentes alturas, descreverão arcos concêntricos com a Terra, ou diversamente excêntricos, e permanecerão girando nessas órbitas assim como os planetas em suas órbitas.

4. A certeza da prova.

Quando uma pedra é projetada obliquamente, isto é, de qualquer modo que não seja em uma direção perpendicular, sua contínua deflexão em direção à Terra a partir da linha reta na qual foi projetada é uma prova de sua gravitação rumo à Terra, tão certa como sua descida direta uma vez

em queda livre a partir do repouso. Da mesma forma, o desvio de corpos, que se movem em espaços livres, de seus cursos retilíneos e sua contínua deflexão rumo a qualquer lugar, é uma indicação segura da existência de alguma força que impele esses corpos em direção àquele lugar.

Dessa suposta existência da gravidade necessariamente decorre que todos os corpos ao redor da Terra devem tender para baixo e, portanto, devem descer diretamente à Terra, caso estejam em queda a partir do repouso, ou ao menos desviar continuamente de suas linhas retas em direção à Terra, se forem projetados obliquamente. Então, da suposta existência de uma força dirigida a qualquer centro, decorre igualmente que todos os corpos sobre os quais esta força age devem descer diretamente àquele centro ou ao menos desviar continuamente em direção a ele a partir de linhas retas, se, pelo contrário, tiverem se movido obliquamente nessas linhas retas.

Como a partir desses movimentos dados podemos deduzir as forças, ou das forças dadas determinar os movimentos, é demonstrado nos primeiros dois livros de nossos *Princípios de Filosofia.*

Supondo-se que a Terra permaneça imóvel, e que as estrelas fixas circulem nos espaços livres em um período de 24 horas, é certo que as forças pelas quais as estrelas fixas são mantidas em suas órbitas não estão dirigidas para a Terra, mas para o centro dessas órbitas, isto é, dos vários círculos paralelos que as estrelas fixas, inclinando-se de um lado ou de outro do equador, descrevem diariamente. E também por raios traçados para os centros das órbitas as estrelas fixas descrevem áreas exatamente proporcionais aos tempos da descrição. Logo, como os tempos periódicos são iguais (pelo Corolário III, Proposição IV, Livro I), segue que as forças centrípetas são como os raios das várias órbitas e que elas continuamente girarão nas mesmas órbitas. E as mesmas conseqüências podem ser inferidas considerando-se o suposto movimento diurno dos planetas.

Que essas forças não podem estar dirigidas a um corpo do qual dependem fisicamente, mas a inumeráveis pontos imaginários no eixo da Terra, é uma hipótese muito incongruente. É mais incongruente ainda que essas forças possam aumentar exatamente na proporção das distâncias a partir deste eixo, pois isto é uma indicação de aumento em direção à imensidade ou mesmo à infinitude. Pelo contrário, as forças das coisas naturais geralmente diminuem ao se afastarem da fonte da qual fluem. Mas ainda mais absurdo é o fato de que nem as áreas descritas pela mesma estrela são proporcionais aos tempos, e nem o são suas revoluções realizadas na mesma órbita. Pois, tão logo a estrela afasta-se do pólo vizinho, tanto as áreas quanto as órbitas aumentam e a partir do aumento da área fica demonstrado que

as forças não se dirigem ao eixo da Terra. Esta dificuldade (Corolário I, Proposição II, Livro I) surge do movimento duplo que é observado nas estrelas fixas, um diurno ao redor do eixo da Terra, o outro excessivamente lento ao redor do eixo da eclíptica. Logo, sua explicação requer uma composição de forças a tal ponto complicada e variável, que dificilmente se adequaria a qualquer teoria física.

5. Forças centrípetas estão dirigidas aos centros individuais dos planetas.

Da seguinte maneira deduzo que há forças centrípetas de fato dirigidas aos corpos do sol, da Terra e dos outros planetas.

A lua gira ao redor da Terra e, por um raio traçado até seu centro, descreve áreas aproximadamente proporcionais aos tempos em que são descritas, o que é evidente comparando-se sua velocidade com seu diâmetro aparente, pois o movimento é mais lento quando o diâmetro é menor (e, portanto, sua distância é maior), e o movimento é mais rápido quando o diâmetro é maior.

As revoluções dos satélites de Júpiter ao redor deste planeta são mais regulares, pois eles descrevem círculos concêntricos com Júpiter por meio de movimentos uniformes tão exatos quanto nossos sentidos são capazes de perceber.

E também os satélites de Saturno giram ao redor deste planeta com movimentos aproximadamente circulares e uniformes, pouco perturbados por qualquer excentricidade até agora observada.

Que Vênus e Mercúrio girem ao redor do sol pode ser demonstrado por suas aparências à maneira da lua. Quando brilham com a face cheia, estão naquelas partes de suas órbitas que, com respeito à Terra, situam-se além do sol; quando brilham pela metade, estão naquelas partes que se situam acima contra o sol; quando aparecem com chifres, naquelas partes entre a Terra e o sol; e, às vezes, passam sobre o disco do sol, quando diretamente interpostos entre a Terra e o sol.

E Vênus, com um movimento quase uniforme, descreve uma órbita aproximadamente circular e concêntrica com o sol.

Mas Mercúrio, com um movimento mais excêntrico, realiza notáveis aproximações em direção ao sol, e afasta-se novamente por turnos. Mas é sempre mais rápido quando próximo do sol e, portanto, por um raio traçado até o sol descreve áreas proporcionais aos tempos.

Por fim, que a Terra descreve ao redor do sol, ou o sol ao redor da

Terra, por um raio traçado entre eles, áreas exatamente proporcionais aos tempos, é demonstrável pelo diâmetro aparente do sol em comparação com seu movimento aparente.

Estes são experimentos astronômicos dos quais segue-se, pelas Proposições I, II e III no primeiro livro de nossos *Princípios* e seus corolários, que existem forças centrípetas de fato dirigidas (seja com precisão ou com pouca margem de erro) aos centros da Terra, de Júpiter, de Saturno e do sol. Quanto a Mercúrio, Vênus, Marte e planetas menores, sobre os quais faltam experimentos, os argumentos por analogia devem ser permitidos.

6. *Forças centrípetas decrescem inversamente como o quadrado das distâncias aos centros dos planetas.*

Que essas forças decrescem como o quadrado inverso das distâncias ao centro de cada planeta decorre do Corolário VI, Proposição IV, Livro I, pois os tempos periódicos dos satélites de Júpiter estão um para o outro assim como a $\frac{3}{2}^{a}$ potência de suas distâncias para o centro deste planeta.

Esta proporção foi há tempos observada nesses satélites e o Sr. Flamsteed, que muitas vezes mediu as suas distâncias a Júpiter com o micrômetro e pelos eclipses dos satélites, escreveu-me que ela pauta-se pela precisão que é possível perceber com nossos sentidos. Além disso, enviou-me as dimensões das órbitas tomadas com o micrômetro e reduzidas à distância média de Júpiter a partir da Terra, ou do sol, juntamente com os tempos de suas revoluções, como segue:

A maior elongação dos satélites ao centro de Júpiter, como vista a partir do sol				O tempo periódico de suas revoluções			
	'	"	"	*d*	*h*	*m*	*s*
1°	1	48	ou 108	1	18	28	36
2°	3	01	ou 181	3	13	17	54
3°	4	46	ou 286	7	03	59	36
4°	8	13½	ou 493½	16	18	5	13

Aqui, a $\frac{3}{2}^{a}$ potência das distâncias pode ser facilmente observada. Por exemplo: $16^d\ 18^h\ 05^m\ 13^s$ está para o tempo $1^d\ 18^h\ 28^m\ 36^s$ assim como $493^{1/2}$". $\sqrt{493\frac{1}{2}"}$ para 108" $\sqrt{108"}$, negligenciando-se aquelas frações menores que, na observação, não podem ser determinadas com certeza.

Antes da invenção do micrômetro, as mesmas distâncias eram determinadas em semidiâmetros de Júpiter:

Distância do	1°	2°	3°	4°
Por Galileu	6	10	16	28
Por Simon Marius	6	10	16	26
Por Cassini	5	8	13	23
Por Borelli, com mais exatidão	5⅔	8⅔	14	24⅔

Depois da invenção do micrômetro:

Distância do	1°	2°	3°	4°
Por Townley	5,51	8,78	13,47	24,72
Por Flamsteed	5,31	8,85	13,98	24,23
Com mais exatidão pelos eclipses	5,578	8,876	14,159	24,903

E os tempos periódicos desses satélites, pelas observações do Sr. Flamsteed, são $1^d\ 18^h\ 28^m\ 36^s$; $3^d\ 13^h\ 17^m\ 54^s$, $7^d\ 3^h\ 59^m\ 36^s$; $16^d\ 18^h\ 5^m\ 13^s$, como acima.

E as distâncias calculadas são 5,578; 8,878; 14,168; 24,968, concordando exatamente com as distâncias observadas.

Cassini assegura-nos que a mesma proporção é observada nos planetas circunsaturnais. Mas um maior período de observações é necessário para que tenhamos uma teoria mais correta e acurada desses planetas.

Nos planetas circunsolares, Mercúrio e Vênus, a mesma proporção ocorre com grande precisão, de acordo com as dimensões de suas órbitas, como determinadas pelas observações dos melhores astrônomos.

7. Os planetas superiores giram em torno do sol, e os raios traçados até o sol descrevem áreas proporcionais aos tempos.

Que Marte gire em torno do sol é demonstrado pelas fases que esse planeta mostra e pela proporção de seus diâmetros aparentes, pois ao aparecer cheio perto da conjunção com o sol, e arqueado em suas quadraturas, é certo que ele circunda o sol.

E uma vez que seu diâmetro aparece em torno de cinco vezes maior quando em oposição ao sol do que quando em conjunção com ele, e sua distância da Terra é inversamente como seu diâmetro aparente, aquela distân-

cia será ao redor de cinco vezes menor quando em oposição do que quando em conjunção com o sol. Porém, em ambos os casos, sua distância ao sol coincide aproximadamente com a distância inferida de sua aparição arqueada nas quadraturas. E, à medida que circunda o sol a distâncias quase iguais, embora com respeito à Terra esteja muito desigualmente distante, por raios traçados até o sol, Marte descreve áreas aproximadamente uniformes, mas por raios traçados até a Terra, está às vezes acelerado, outras vezes estacionário e até mesmo retrógrado.

Deduzo da seguinte maneira que Júpiter, em uma órbita mais alta do que Marte, também gira em torno do sol com um movimento aproximadamente uniforme, tanto em distância quanto nas áreas descritas.

O Sr. Flamsteed assegurou-me, por cartas, que todos os eclipses do satélite mais interior que até agora foram bem observados, concordam muito aproximadamente com sua teoria, nunca diferindo mais do que dois minutos de tempo; que no satélite mais exterior o erro é um pouco maior; no penúltimo, apenas três vezes maior; que no segundo a partir do centro a diferença é, sem dúvida, bem maior, contudo a ponto de concordar com seus cálculos assim como a lua com relação às tabelas comuns; e que ele calcula esses eclipses apenas a partir dos movimentos médios corrigidos com a equação da luz descoberta e introduzida pelo Sr. Römer. Supondo-se, então, que a teoria difere menos do que 2' com relação ao movimento do satélite mais exterior, como foi descrito, e considerando-se como tempo periódico $16^d\ 18^h\ 5^m\ 13^s$ para 2' em tempo, assim está todo o círculo de 360° para o arco 1'48", e o erro do cálculo do Sr. Flamsteed, reduzido à órbita do satélite, será menor do que 1' 48". Ou seja, a longitude do satélite, como vista do centro de Júpiter, será determinada com um erro menor do que 1'48". Mas quando o satélite está no meio da sombra, aquela longitude coincide com a longitude heliocêntrica de Júpiter e, portanto, a hipótese que o Sr. Flamsteed segue, isto é, a copernicana, como aperfeiçoada por Kepler, e (para o caso do movimento de Júpiter) posteriormente corrigida por ele próprio, representa com exatidão aquela longitude com um erro menor do que 1' 48". Mas, por esta longitude, juntamente com a longitude geocêntrica, que é sempre fácil de se encontrar, a distância de Júpiter ao sol é determinada, e deve, portanto, coincidir com aquela que a hipótese apresenta. Isto porque o maior erro de 1' 48" que pode ocorrer na longitude heliocêntrica é quase imperceptível e negligenciável, e talvez decorra de alguma desconhecida excentricidade do satélite; mas uma vez que a longitude e a distância estão corretamente determinadas, segue necessariamente que Júpiter, por raios traçados até o sol, descreve áreas de acordo com a hipótese, isto é, proporcionais aos tempos.

E o mesmo pode-se dizer de Saturno com relação a seu satélite, pelas observações do Sr. Huygens e do Dr. Halley, ainda que uma série mais longa de observações seja necessária para confirmar o fato, calculando-o com maior exatidão.

8. A força que controla os planetas superiores não está dirigida à Terra, mas ao sol.

Se Júpiter fosse visto a partir do sol, nunca apareceria retrógrado ou estacionário, como às vezes é visto da Terra, mas sempre avançaria com um movimento aproximadamente uniforme. E da grande desigualdade de seu movimento geocêntrico aparente deduzimos (pelo Livro I, Proposição III, Corolário IV) que a força que faz com que Júpiter desvie de seu curso retilíneo e gire em uma órbita, não está dirigida para o centro da Terra. O mesmo argumento é válido para Marte e Saturno. Portanto, deve-se procurar por outro centro dessas forças (pelo Livro I, Proposições II e III, e Corolários da última), ao redor do qual as áreas descritas por raios interpostos sejam uniformes; que tal centro é o sol já demonstramos aproximadamente com relação a Marte e Saturno, e também com grande precisão no tocante a Júpiter. Pode-se alegar que o sol e os planetas são impelidos igualmente por outra força e na direção de linhas paralelas; mas por semelhante força (pelo Corolário VI das Leis do Movimento) nenhuma mudança ocorreria na situação dos planetas entre si, nem efeito sensível algum se manifestaria. Nossa preocupação refere-se às causas dos efeitos sensíveis. Consideremos, portanto, semelhante força como imaginária e precária, sem utilidade nos fenômenos celestes, e toda a força restante pela qual Júpiter é impelido estará dirigida (pelo Livro I, Proposição III, Corolário I) ao centro do sol.

9. A força circunsolar decresce em todos os espaços planetários inversamente como o quadrado das distâncias ao sol.

As distâncias dos planetas ao sol são as mesmas, tanto se, seguindo Tycho, colocarmos a Terra no centro do sistema, ou o sol, de acordo com Copérnico. E já provamos que estas distâncias são válidas para Júpiter.

Kepler e Boulliau determinaram, com grande cuidado, as distâncias dos planetas ao sol e, portanto, suas tabelas concordam melhor com os céus. E em todos os planetas, em Júpiter e Marte, em Saturno e na Terra, assim

como em Vênus e Mercúrio, os cubos das distâncias são como os quadrados dos tempos periódicos. Logo (pelo Corolário VI, Proposição IV, Livro I), a força circunsolar centrípeta através de todas as regiões planetárias decresce como o quadrado inverso das distâncias ao sol. Ao examinar esta proporção, devemos usar as distâncias médias ou os semi-eixos transversos das órbitas (pela Proposição XV, Livro I), e negligenciar aquelas pequenas frações, as quais, na definição das órbitas, tenham decorrido de imperceptíveis erros de observação, ou que possam ser atribuídas a outras causas a serem explicadas posteriormente. Portanto, sempre encontraremos esta proporção exatamente, pois as distâncias de Saturno, Júpiter, Marte, e da Terra, Vênus e Mercúrio, ao sol, obtidas pelas observações dos astrônomos, são, de acordo com os cálculos de Kepler, como os números 951 000, 519 650, 152 350, 100 000, 72 400, 38 806; pelos cálculos de Boulliau, como os números 954198, 522 520, 152 350, 100 000, 72398, 38 585; e pelos tempos periódicos são 953 806, 520 116, 152 399, 100 000, 72 333, 38 710. Suas distâncias, de acordo com Kepler e Boulliau, diferem por uma quantia pouco significativa e mesmo quando elas mais diferem as distâncias calculadas pelos tempos periódicos situam-se entre elas.

10. A força circunterrestre decresce inversamente como o quadrado das distâncias à Terra. Isto é demonstrado assumindo-se a hipótese de que a Terra está em repouso.

Deduzo da seguinte maneira que também a força circunterrestre decresce como o quadrado das distâncias.

A distância média da lua ao centro da Terra é, em semidiâmetros da Terra, de acordo com Ptolomeu, Kepler em suas *Efemérides*, Boulliau, Hewelcke e Riccioli, 59; de acordo com Flamsteed, 59⅓; de acordo com Tycho, 56½; com Vendelin, 60; com Copérnico, 60⅓; com Kircher, 62½.

Mas Tycho, e todos aqueles que seguem suas tabelas de refração, fazendo as refrações do sol e da lua (ambas contra a natureza da luz) exceder aquela das estrelas fixas, e isto ao redor de quatro ou cinco minutos no horizonte, aumentaram assim a paralaxe horizontal da lua em torno do mesmo número de minutos, ou seja, em torno da 12ª ou 15ª parte da paralaxe total. Corrigindo-se este erro, a distância será de 60 ou 61 semidiâmetros da Terra, concordando aproximadamente com o que outros determinaram.

Consideremos então a distância média da lua como 60 semidiâmetros da Terra e seu tempo periódico com relação às estrelas fixas como 27^{d}

7^h 43^m, de acordo com as determinações dos astrônomos. E (pelo Corolário VI, Proposição IV, Livro I) um corpo girando em nosso ar, perto da superfície da Terra supostamente imóvel, por meio de uma força centrípeta que deve estar para a mesma força à distância da lua inversamente como os quadrados das distâncias ao centro da Terra, isto é, como 3600 para 1, completaria (desprezando-se a resistência do ar) uma revolução em 1^h 24^m 27^s.

Suponha que a circunferência da Terra seja 123 249 600 pés de Paris, como foi determinado pela última medição dos franceses, então o mesmo corpo, desprovido de seu movimento circular, e caindo pelo impulso da mesma força centrípeta que antes, descreveria em um segundo 15 1/12 pés de Paris.

Deduzimos isso de um cálculo baseado na Proposição XXXVI do Livro I, que concorda com o que se observa em todos os corpos em torno da Terra. Pois, pela experiência com pêndulos, e pelos cálculos correspondentes, Huygens demonstrou que os corpos que caem devido à força centrípeta, com a qual (não importando sua natureza) são impelidos perto da superfície da Terra, descrevem em um segundo 15 1/12 pés de Paris.

11. O mesmo é provado assumindo-se a hipótese de que a Terra se move.

Mas supondo-se que a Terra se mova, a Terra e a lua conjuntamente (pelo Corolário IV das Leis do Movimento e pela Proposição LVII, Livro I) girarão em torno de seu centro comum de gravidade. E a lua (pela Proposição LX, Livro I) descreverá no mesmo tempo periódico, 27^d 7^h 43^m, com a mesma força circunterrestre diminuída como o quadrado inverso da distância, uma órbita cujo semidiâmetro está para o semidiâmetro da órbita anterior, isto é, para 60 semidiâmetros da Terra, assim como a soma dos corpos da Terra e da lua está para a primeira das duas proporcionais médias entre esta soma e o corpo da Terra; isto é, se supormos que a lua (tendo em vista seu diâmetro médio aparente de 31½') seja cerca de 1/42 da Terra, como 43 para $\sqrt[3]{(42 \cdot 43^2)}$ ou como em torno de 128 para 127. E, portanto, o semidiâmetro da órbita, isto é, a distância entre os centros da lua e da Terra, será neste caso 60½ semidiâmetros da Terra, quase o mesmo que aquele estabelecido por Copérnico e que as observações de Tycho de modo algum contestam. Logo, a razão quadrada do decremento vale para esta distância. Eu considerei o incremento da órbita que surge da ação do sol como desprezível, mas se ele for subtraído, a distância real permanecerá ao redor de 60 4/9 semidiâmetros da Terra.

12. O decréscimo das forças inversamente como o quadrado das distâncias à Terra e aos planetas é demonstrado também pelas excentricidades dos planetas e pelo muito lento movimento das apsides.

Esta proporção do decremento das forças é confirmada além disso pela excentricidade dos planetas e pelo muito lento movimento das apsides, pois (pelos corolários da Proposição XLV, Livro I) em nenhuma outra proporção os planetas circunsolares poderiam uma vez em cada revolução descer às suas menores distâncias e ascender em seguida às suas maiores distâncias do sol, e os lugares dessas distâncias permanecerem imóveis. Um pequeno erro da razão quadrada produziria um movimento considerável das apsides em cada revolução, mas enorme em muitas.

No entanto, após inumeráveis revoluções, esse movimento não foi ainda percebido nas órbitas dos planetas circunsolares. Alguns astrônomos afirmam que tal movimento não existe, enquanto outros consideram-no pouco maior do que facilmente poderia acontecer tendo em vista as causas tratadas mais adiante e que não têm lugar neste momento.

Também podemos desprezar o movimento das apsides da lua, que é bem maior do que nos planetas circunsolares, chegando em cada revolução a três graus; e a partir deste movimento pode-se demonstrar que a força circunterrestre decresce em não menos do que o quadrado inverso, mas bem menos do que o cubo inverso da distância, pois se o quadrado gradualmente transformar-se no cubo, o movimento das apsides aumentaria ao infinito e, portanto, por uma pequena mutação, excederia o movimento das apsides da lua. Este movimento lento surge da ação da força circunsolar, como explicaremos adiante. Mas excluindo-se esta causa, as apsides ou apogeu da lua estarão fixos, e a razão quadrada do decréscimo da força circunterrestre em diferentes distâncias da Terra ocorrerá com precisão.

13. A intensidade das forças dirigidas aos planetas individuais. A poderosa força circunsolar.

Agora que essa proporção foi estabelecida, podemos comparar as forças dos vários planetas entre si.

Na distância média entre Júpiter e a Terra, a maior elongação do satélite mais exterior ao centro de Júpiter (pelas observações do Sr. Flamsteed) é 8' 13". Portanto, a distância do satélite para o centro de Júpiter está para a distância média de Júpiter ao centro do sol como 124 para 52012,

mas para a distância média de Vênus ao centro do sol como 124 para 7234; e seus tempos periódicos são 16¾ᵈ e 224⅔ᵈ; e, portanto (de acordo com o Corolário II, Proposição IV, Livro I), dividindo-se as distâncias pelos quadrados dos tempos, deduz-se que a força pela qual o satélite é impelido na direção de Júpiter está para a força pela qual Vênus é impelido na direção do sol assim como 442 está para 143; e se diminuirmos a força pela qual o satélite é impelido de acordo com o quadrado inverso da distância, como 124 para 7234, teremos a força circunjovial na distância de Vênus ao sol para a força circunsolar pela qual Vênus é impelido, assim como $\frac{13}{100}$ para 143 ou como 1 para 1100. Logo, a distâncias iguais, a força circunsolar é 1100 vezes maior do que a circunjovial.

E, pelo mesmo cálculo, a partir do tempo periódico do satélite de Saturno, $15^d\ 22^h$, e de sua maior elongação para Saturno, enquanto este planeta está em sua distância média da Terra, 3' 20", segue-se que a distância deste satélite ao centro de Saturno está para a distância de Vênus ao sol assim como 92⅖ para 7234. Logo, a força circunsolar absoluta é 2360 vezes maior do que a força circunsaturnal absoluta.

14. A pequena força circunterrestre.

Devido à regularidade do movimento heliocêntrico e à irregularidade do movimento geocêntrico de Vênus, Júpiter e outros planetas, é evidente (pelo Corolário IV, Proposição III, Livro I) que a força circunterrestre, comparada com a circunsolar, é muito pequena.

Riccioli e Vendelin tentaram determinar a paralaxe do sol a partir das dicotomias da lua observadas por telescópio e ambos concordaram que ela não ultrapassa meio minuto.

Kepler, a partir de suas observações e daquelas de Tycho, concluiu que a paralaxe de Marte é imperceptível, mesmo em oposição ao sol, quando ela é um pouco maior do que a do sol.

Flamsteed buscou a mesma paralaxe com o micrômetro na posição do perigeu de Marte, mas nunca a encontrou acima de 25", concluindo que a paralaxe do sol era de no máximo 10".

Disso decorre que a distância da lua à Terra está numa proporção para a distância da Terra ao sol não maior do que 29 para 10000; e para a distância de Vênus ao sol não maior do que 29 para 7233.

Tomando-se estas distâncias juntamente com os tempos periódicos,

pelo método acima explicado, é fácil inferir que a força circunsolar absoluta é pelo menos 229 400 vezes maior do que a força circunterrestre absoluta.

E embora só estivéssemos certos, pelas observações de Riccioli e Vendelin, de que a paralaxe do sol é menor do que meio minuto, conclui-se que a força circunsolar absoluta excede a força circunterrestre absoluta em 8 500 vezes.

15. Diâmetros aparentes dos planetas.

Por cálculos similares descobri uma analogia que pode ser observada entre as forças e os corpos dos planetas. Mas, antes de explicá-la, deve-se determinar os diâmetros aparentes dos planetas em suas distâncias médias da Terra.

O Sr. Flamsteed, com um micrômetro, mediu o diâmetro de Júpiter em 40" ou 41", o diâmetro do anel de Saturno em 50" e o diâmetro do sol em cerca de 32' 13".

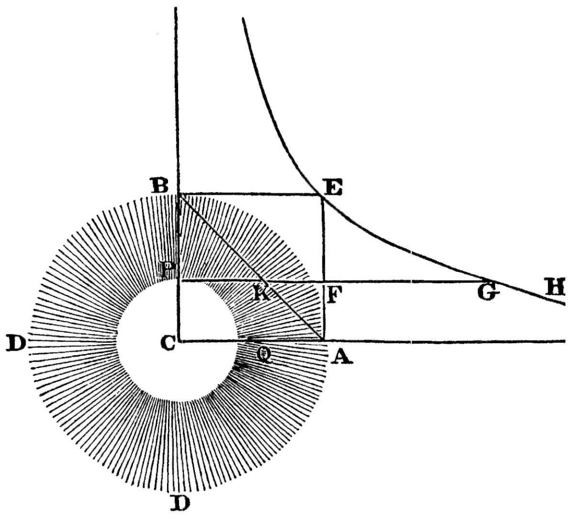
Mas o diâmetro de Saturno está para o diâmetro do anel, de acordo com o Sr. Huygens e o Dr. Halley, assim como 4 para 9; de acordo com Gallet, como 4 para 10; e de acordo com Hooke (por um telescópio de 60 pés), como 5 para 12. E pela razão média, 5 para 12, infere-se que o diâmetro do corpo de Saturno é de cerca de 21".

16. Correção dos diâmetros aparentes.

Como dissemos acima, tais são as magnitudes aparentes, mas devido à desigual refrangibilidade da luz todos os pontos lúcidos são dilatados pelo telescópio e, no foco da lente objetiva, cobrem um espaço circular cuja largura mede quase a 50ª parte da abertura da lente.

De fato, na direção da circunferência a luz é difusa a ponto de ser difícil vê-la. Porém, na direção do centro, onde a luz tem maior intensidade, sendo perceptível o suficiente, ela gera um pequeno círculo lúcido, cuja largura varia de acordo com o esplendor do ponto lúcido, mas é geralmente uma terça, ou quarta, ou quinta parte da largura total.

Suponha que ABD represente o círculo de luz total; PQ o pequeno círculo da luz mais densa e visível; C o centro de ambas; CA e CB os semidiâmetros do círculo maior, contendo um ângulo reto em C; ACBE o quadrado compreendido sob esses semidiâmetros; AB a diagonal do quadrado; EGH



uma hipérbole com centro C e assíntotas CA e CB; PG uma perpendicular traçada de qualquer ponto P da linha BC, e encontrando a hipérbole em G, e as linhas retas AB, AE em K e F. E a densidade da luz em qualquer lugar P será, pelos meus cálculos, como a linha FG, sendo, portanto, no centro infinita, embora perto da circunferência muito pequena. E toda luz dentro do pequeno círculo PQ está para toda aquela fora dele assim como a área da figura quadrilátera CAKP está para o triângulo PKB. E devemos entender que o pequeno círculo PQ termina onde FG, a intensidade da luz, começa a ser menor do que o necessário para visibilidade.

Logo, é por isso que, à distância de 191382 pés, uma chama de três pés de diâmetro, através de um telescópio de três pés, apareceu ao Sr. Picard com 8" de largura, quando deveria ter aparecido com apenas 3" 14'''; é por isso que as estrelas fixas mais brilhantes aparecem através do telescópio com 5" ou 6" de diâmetro, e com uma forte luz, enquanto que, com uma luz mais fraca, parecem que têm uma largura maior. Daí que Hewelcke, diminuindo a abertura do telescópio, cortou boa parte da luz em direção à circunferência, tornando o disco da estrela mais bem definido, o qual, ainda que diminuído, apareceu como tendo 5" ou 6" de diâmetro. Mas o Sr. Huygens, simplesmente nublando a lente com um pouco de fumaça, conseguiu com êxito eliminar esta luz difusa, fazendo com que as estrelas fixas aparecessem como simples pontos, sem qualquer largura perceptível. Daí que o Sr. Huygens, a partir da largura dos corpos interpostos para interceptar toda a luz dos planetas, estimou seus diâmetros maiores do que outros que os mediram com o micrômetro; pois a luz dispersada, que antes não podia ser vista por causa da luz mais forte do planeta, quando o planeta está escondido,

propaga-se para longe. Finalmente, é por esta razão que os planetas aparecem tão pequenos quando projetados no disco do sol, sendo diminuídos pela luz dilatada. Para Hewelcke, Gallet e Dr. Halley, Mercúrio não excede 12" ou 15"; e Vênus pareceu ao Sr. Crabtrie com apenas 1' 3", e a Horrox com 1' 12", ainda que pelas medidas de Hewelcke e Huygens fora do disco do sol, ele deveria ter sido visto com pelo menos 1' 24". Também o diâmetro aparente da lua, que, em 1684, alguns dias antes e depois do eclipse do sol, foi medido no Observatório de Paris com o valor de 31' 30", no próprio eclipse não parecia exceder 30' ou 30' 5". Portanto, os diâmetros dos planetas devem ser diminuídos quando fora do sol, e aumentados quando nele, em alguns segundos. Mas os erros parecem ser menores do que o comum nas medições com micrômetro. Então, a partir do diâmetro da sombra, determinada pelos eclipses dos satélites, o Sr. Flamsteed concluiu que o semidiâmetro de Júpiter estava para a maior elongação do satélite mais exterior assim como 1 para 24,903. Portanto, uma vez que a elongação é de 8' 13", o diâmetro de Júpiter será 39½"; e, desprezando-se a luz dispersada, o diâmetro encontrado com o micrômetro, de 40" ou 41", será reduzido a 39½"; e o diâmetro de Saturno, de 21", é para ser diminuído pela mesma correção, sendo calculado 20" ou pouco menos. Mas, se eu não estiver errado, o diâmetro do sol, devido à sua luz mais forte, é para ser diminuído ainda mais, sendo calculado ao redor de 32' ou 32' 6".

17. Porque alguns planetas são mais densos do que outros e as forças em todos eles são proporcionais às quantidades de matéria.

Que corpos tão diferentes em magnitude aproximem-se tanto de uma proporcionalidade com suas forças é algo que não deixa de ser um mistério.

Talvez os planetas mais remotos, por falta de calor, não tenham aquelas substâncias metálicas e minerais pesados que abundam na Terra; e os corpos de Vênus e Mercúrio, por serem mais expostos ao calor do sol, sejam mais duramente aquecidos, ficando mais compactos.

Pois, a partir de experimentos com lente de queimar, percebe-se que o calor aumenta com a densidade da luz; e esta densidade aumenta inversamente como o quadrado da distância ao sol; donde o calor do sol em Mercúrio é sete vezes maior do que o calor em nossos verões. Mas com este calor nossa água ferve; e aqueles fluidos pesados, mercúrio e vitríolo, evaporam, como testei com o termômetro. Portanto, não pode haver fluidos em

Mercúrio, com exceção daqueles pesados e capazes de suportar um grande calor, e dos quais substâncias de grande densidade possam se formar.

E por que não seria assim se Deus colocou diferentes corpos a diferentes distâncias do sol de modo que os corpos mais densos sempre estejam nos lugares mais próximos, e cada corpo aproveite o grau de calor apropriado à sua condição e próprio para sua constituição? Por esta consideração decorre que os pesos dos planetas estão um para o outro assim como suas forças.

Porém, eu ficaria mais satisfeito se os diâmetros dos planetas fossem medidos com maior precisão. Isto pode ser feito se uma lanterna, colocada a uma grande distância, brilhar através de um orifício circular, e tanto o orifício como a luz da lanterna estejam tão diminuídos que a imagem apareça através do telescópio como o planeta, e possa ser definida pela mesma medida. Então, o diâmetro do orifício estará para sua distância da lente objetiva assim como o diâmetro real do planeta está para sua distância a nós. A luz da lanterna pode ser diminuída pela interposição tanto de pedaços de pano como de uma lente esfumaçada.

18. Outra analogia entre forças e corpos atraídos é mostrada nos céus.

Semelhante à analogia que descrevemos há outra observada entre forças e os corpos atraídos. Como a ação da força centrípeta sobre os planetas decresce inversamente como o quadrado da distância, e o tempo periódico aumenta como a $\frac{3}{2}$ª potência da distância, é evidente que as ações da força centrípeta e, portanto, os tempos periódicos, sejam iguais em planetas iguais a distâncias iguais do sol; e a distâncias iguais de planetas desiguais as ações totais da força centrípeta sejam como os corpos dos planetas. Pois se as ações não fossem proporcionais aos corpos a serem movidos, elas não poderiam uniformemente retirar estes corpos das tangentes de suas órbitas em tempos iguais, e nem os movimentos dos satélites de Júpiter seriam tão regulares, a não ser que a força circunsolar fosse uniformemente exercida sobre Júpiter e sobre todos seus satélites de uma maneira proporcional a seus vários pesos. O mesmo vale para Saturno com relação a seus satélites, e para a Terra com relação à lua, como decorre dos Corolários II e III, Proposição LXV, Livro I. Portanto, a distâncias iguais, as ações da força centrípeta são iguais sobre todos os planetas em proporção aos seus corpos, ou às quantidades de matéria em seus vários corpos; e pela mesma razão devem ser as mesmas sobre todas as partículas de mesmo tamanho que compõem

o planeta. Pois se a ação for maior sobre algum tipo de partículas do que sobre outro tipo, em proporção às suas quantidades de matéria, também será maior ou menor sobre os planetas inteiros, não em proporção apenas à quantidade, mas também ao tipo de matéria mais abundantemente encontrada em um planeta e mais escassamente em outro.

19. A analogia também é encontrada em corpos terrestres.

Com respeito a corpos de vários tipos encontrados na Terra, examinarei esta analogia com muito cuidado.

Se a ação da força circunterrestre é proporcional aos corpos a serem movidos, ela irá movê-los (pela segunda Lei do Movimento) com igual velocidade em tempos iguais, e fará com que todos os corpos, na queda, desçam através de espaços iguais em tempos iguais, e com que todos os corpos, suspensos por fios iguais, vibrem em tempos iguais. Se a ação da força for maior, os tempos serão menores; se ela for menor, os tempos serão maiores.

Mas foi há muito tempo observado por outros que (descontando-se a pequena resistência do ar) todos os corpos em queda descrevem espaços iguais em tempos iguais; e, com a ajuda de pêndulos, a igualdade dos tempos pode ser observada com grande exatidão.

Eu fiz experiências com ouro, prata, chumbo, vidro, areia, sal comum, madeira, água e trigo. Obtive duas caixas iguais de madeira. Enchi uma com madeira e suspendi um igual peso de ouro (o mais exato possível) no centro de oscilação da outra. As caixas, suspensas por fios iguais de onze pés, compunham um par de pêndulos perfeitamente iguais em peso e forma, e igualmente expostos à resistência do ar; e, colocando uma ao lado da outra, observei-as oscilarem juntas para frente e para trás por um longo tempo, com iguais vibrações. E, portanto (pelos Corolários I e VI, Proposição XXIV, Livro II), a quantidade de matéria no ouro estava para a quantidade de matéria na madeira assim como a ação da força motriz sobre todo o ouro para a ação da mesma sobre toda a madeira; isto é, como o peso de uma para o peso da outra.

Com estes experimentos em corpos de mesmo peso teria sido possível descobrir uma diferença de matéria menor do que a milésima parte do todo.

20. A concordância dessas analogias.

Uma vez que a ação da força centrípeta sobre os corpos atraídos é, a distâncias iguais, proporcional às quantidades de matéria nesses corpos, a razão requer que ela também seja proporcional à quantidade de matéria no corpo atraente.

Pois toda ação é mútua e (pela terceira Lei do Movimento) faz com que os corpos aproximem-se um do outro e, portanto, deve ser a mesma em ambos os corpos. É verdade que podemos considerar um corpo como atraente e outro como atraído, mas esta distinção é mais matemática do que natural. A atração reside, de fato, em cada corpo na direção do outro, sendo, portanto, do mesmo tipo em ambos.

21. Suas coincidências.

Daí que a força atrativa é encontrada em ambos. O sol atrai Júpiter e os outros planetas; Júpiter atrai seus satélites e, pela mesma razão, os satélites atuam tanto um sobre o outro como sobre Júpiter, e todos os planetas agem mutuamente entre si.

E ainda que as ações mútuas de dois planetas possam ser distinguidas e consideradas como duas, pelas quais cada planeta atrai o outro, mesmo assim, como essas ações estão entre ambos, elas não perfazem duas, mas uma operação entre dois termos. Dois corpos podem ser atraídos um pelo outro pela contração de uma corda interposta. Há uma dupla causa da ação, qual seja, a disposição de ambos os corpos e uma ação dupla, na medida em que a ação seja considerada como sobre dois corpos; mas como entre dois corpos, ela é apenas uma. Não é por uma ação que o sol atrai Júpiter e por outra que Júpiter atrai o sol, mas é por uma única ação que o sol e Júpiter mutuamente buscam aproximar-se. Pela ação com que o sol atrai Júpiter, Júpiter e o sol aproximam-se (pela terceira Lei do Movimento), e também pela ação com que Júpiter atrai o sol. Tanto o sol como Júpiter buscam aproximar-se, mas o sol não é atraído até Júpiter por uma ação dupla, nem Júpiter por uma ação dupla até o sol; mas é por uma única ação intermediária que ambos se aproximam.

Logo, o ferro atrai o ímã assim como o ímã atrai o ferro, pois todo o ferro nas proximidades do ímã atrai outro ferro. Mas a ação entre o ímã e o ferro é única, e assim considerada pelos filósofos. A ação do ferro sobre o ímã é, de fato, a ação do ímã entre si mesmo e o ferro, pela qual ambos

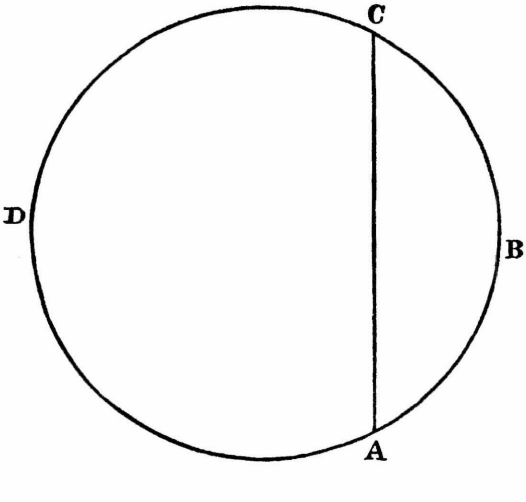
buscam aproximar-se e desta maneira se manifesta. Removendo-se o ímã, a força total do ferro quase desaparece.

É neste sentido que devemos conceber uma única ação sendo exercida entre dois planetas, decorrente das naturezas inter-relacionadas de ambos; e esta ação, permanecendo na mesma relação com ambos, e sendo proporcional à quantidade de matéria em um deles, também será proporcional à quantidade de matéria no outro.

22. *As forças devidas a corpos muito pequenos são desprezíveis.*

Talvez objetem que, de acordo com esta filosofia, todos os corpos devam atrair um ao outro, contrariamente à evidência de experimentos com corpos terrestres. Mas afirmo que tais experimentos não contam, pois as atrações de esferas homogêneas perto de suas superfícies são (pela Proposição LXXII, Livro I) como seus diâmetros. Daí que uma esfera de um pé de diâmetro, e de natureza semelhante à Terra, atrairia um pequeno corpo colocado perto de sua superfície com uma força 20 000 000 vezes menor do que a Terra faria se o corpo estivesse perto de sua superfície; mas uma força tão pequena não produziria efeito perceptível.

Se duas destas esferas estivessem distantes apenas ¼ de polegada, elas não iriam, mesmo em espaços sem resistência, tocar-se pela força de sua atração mútua em menos de um mês; e esferas menores aproximariam-se ainda mais lentamente, ou seja, na proporção de seus diâmetros. Nem montanhas inteiras seriam suficientes para produzir algum efeito perceptível.



Uma montanha, de formato hemisférico, com três milhas de altura e seis de largura, não conseguiria, por sua atração, mover um pêndulo dois minutos além de sua perpendicular. É apenas nos grandes corpos dos planetas que estas forças são perceptíveis, a não ser que consideremos os corpos menores da seguinte maneira.

23. As forças dirigidas em direção a todos os corpos terrestres são proporcionais às suas quantidades de matéria.

Faça ABCD representar o globo da Terra cortado por qualquer plano AC em duas partes, ACB e ACD. A parte ACB, aplicada sobre a parte ACD, pressiona-a com todo seu peso. A parte ACD não seria capaz de sustentar esta pressão e continuar imóvel, sem a oposição de uma pressão igual e contrária. E, portanto, as partes igualmente pressionam uma a outra com seus pesos, isto é, igualmente se atraem de acordo com a terceira Lei do Movimento; e, caso fossem separadas e soltas, cairiam uma em direção a outra com velocidades inversamente como os corpos. Isso tudo podemos testar e observar no ímã, cuja parte atraída não impulsiona a parte atraente, mas é apenas imobilizada e sustentada por ela.

Suponha agora que ACB represente algum corpo pequeno na superfície da Terra; então, como as atrações desta partícula e da parte restante ACD da Terra entre si são iguais, mas a atração da partícula em direção à Terra (ou seu peso) é como a matéria da partícula (como provamos pelo experimento dos pêndulos), a atração da Terra em direção à partícula também será como a matéria da partícula. Portanto, as forças atrativas de todos corpos terrestres serão como suas várias quantidades de matérias.

24. Fica demonstrado que as mesmas forças são dirigidas aos corpos celestes.

As forças que são como a matéria nos corpos terrestres de todas as formas e, portanto, não variam com as formas, devem ser encontradas em todos os tipos de corpos, celestes ou terrestres, e ser em todos proporcionais às suas quantidades de matéria, porque entre todos não há diferença de substância, mas apenas de grau e formas. Mas nos corpos celestes a mesma coisa é provada da maneira seguinte. Demonstramos que a ação da força circunsolar sobre todos os planetas (quando em distâncias iguais) é como a matéria dos planetas; que a força circunjovial sobre os satélites de Júpiter segue

a mesma lei; e o mesmo pode ser dito da atração de todos os planetas na direção de qualquer planeta; mas decorre disto (pela Proposição LXIX, Livro I) que suas forças atrativas são como suas várias quantidades de matéria.

25. As forças decrescem a partir da superfície dos planetas para fora inversamente como o quadrado das distâncias, e para dentro, diretamente como as distâncias ao centro.

Assim como as partes da Terra atraem uma a outra, o mesmo fazem aquelas de todos os planetas. Se Júpiter e seus satélites fossem combinados formando um só globo, sem dúvida continuariam a se atrair como antes. E, por outro lado, se o corpo de Júpiter fosse quebrado em vários globos, certamente estes atrairiam um ao outro do mesmo modo que fazem os satélites agora. É por causa dessas atrações que os corpos da Terra e dos planetas assumem uma forma esférica e suas partes aderem-se, não sendo dispersas através do éter. Mas já havíamos provado que estas forças surgem da natureza universal da matéria e que, portanto, a força de todo um globo é composta das várias forças de suas partes. E disto decorre (pelo Corolário III, Proposição LXXIV, Livro I) que a força de cada partícula decresce inversamente como o quadrado da distância àquela partícula; e (pelas Proposição LXXIII e LXXV, Livro I) que a força de todo o globo, da superfície para fora, decresce inversamente como o quadrado da distância, mas para dentro, decresce simplesmente como a primeira potência da distância aos centros, se a matéria do globo for uniforme. E quando a matéria do globo, do centro à superfície, não é uniforme, mesmo assim o decréscimo, da superfície para fora é inversamente como o quadrado da distância (pela Proposição LXXVI, Livro I), desde que a deformidade seja similar em todos os lugares a iguais distâncias do centro. E dois destes globos (pela mesma Proposição) atrairão um ao outro com uma força que decresce inversamente como o quadrado da distância entre seus centros.

26. As intensidades das forças e os movimentos resultantes em casos particulares.

Portanto, a força absoluta de cada globo é como a quantidade de matéria que o globo contém; mas a força motriz pela qual cada globo é atraído em direção ao outro, a qual nos corpos terrestres, geralmente chamamos

de peso, é como o conteúdo sob as quantidades de matéria nos dois globos dividido pelo quadrado da distância entre seus centros (pelo Corolário IV, Proposição LXXVI, Livro I), sendo a quantidade de movimento, pela qual cada globo em um dado tempo será levado em direção ao outro, proporcional a essa força. E a força acelerativa, pela qual cada globo, de acordo com sua quantidade de matéria, é atraído em direção ao outro, é como a quantidade de matéria naquele outro globo dividida pelo quadrado da distância entre os centros dos dois (pelo Corolário II, Proposição LXXVI, Livro I), sendo a velocidade pela qual o globo atraído irá, em um dado tempo, ser levado em direção ao outro, proporcional a essa força. Estando bem entendidos estes princípios, é agora fácil determinar os movimentos dos corpos celestes entre si.

27. Todos os planetas giram ao redor do sol.

Comparando as forças dos planetas entre si, vimos acima que a força circunsolar excede em mais de mil vezes todas as outras; mas pela ação de uma força tão grande é inevitável que todos os corpos dentro e mesmo bem distantes dos limites do sistema planetário procedam diretamente ao sol, a não ser que por outros movimentos sejam impelidos a outras partes. Nem a nossa Terra está excluída do número de tais corpos; pois certamente a lua é um corpo de mesma natureza que os planetas e sujeita às mesmas atrações com os outros planetas, sendo retida em sua órbita pela força circunterrestre. Mas que a Terra e a lua são igualmente atraídas pelo sol, nós provamos acima; também já provamos que todos os corpos estão sujeitos às leis comuns da atração. Pelo contrário, supondo-se que um desses corpos seja privado de seu movimento circular em torno do sol, e sabendo-se sua distância até o sol, pode-se determinar (pela Proposição XXXVI, Livro I) em que espaço de tempo em sua descida, ele chegará ao sol; ou seja, na metade do tempo periódico em que o corpo poderia ser girado a metade de sua distância anterior; ou no espaço de tempo que está para o tempo periódico do planeta assim como 1 para $4\sqrt{2}$; como Vênus que, em sua descida, chegaria ao sol no espaço de 40 dias, Júpiter no espaço de dois anos e um mês, e a Terra e a lua juntas no espaço de 66 dias e 19 horas. Mas como tais coisas não ocorrem, é preciso que esses corpos sejam movidos para outras partes, e nem é todo movimento suficiente para isso. Para impedir tal descida, uma correspondente proporção de velocidade seria necessária. E daí depende a força do argumento derivado do retardamento dos movimentos dos planetas. A não ser que a força circunsolar decresça como o quadrado de suas lentidões

crescentes, o excesso forçaria os corpos a descerem ao sol; por exemplo, se o movimento (o restante permanecendo inalterado) for retardado pela metade, o planeta seria mantido em sua órbita por um quarto de sua força circunsolar anterior e pelo excesso dos outros três quartos desceria até o sol. E, portanto, os planetas (Saturno, Júpiter, Marte, Vênus e Mercúrio) não são de fato retardados em seus perigeus, nem ficam estacionários ou regridem com movimentos lentos. Tudo isso é aparente, e os movimentos absolutos, pelos quais os planetas continuam a girar em suas órbitas, são sempre num sentido e aproximadamente uniformes. Mas já provamos que tais movimentos são realizados em torno do sol. Logo, o sol, como centro dos movimentos absolutos, é quiescente. Não podemos atribuir quiescência à Terra, pois então os planetas em seus perigeus seriam de fato retardados, tornando-se estacionários e regressivos, e, por falta de movimento, desceriam ao sol. Ademais, uma vez que os planetas (Vênus, Marte, Júpiter e o restante), por raios traçados até o sol, descrevem órbitas regulares e áreas (como já mostramos) aproximadamente proporcionais aos tempos, segue que (pela Proposição III e Corolário III, Proposição LXV, Livro I) que o sol é movido por força não perceptível, a não ser que talvez o seja por aquela que move igualmente todos os planetas, de acordo com suas várias quantidades de matéria em linhas paralelas, de modo que todo o sistema seja conduzido em linhas retas. Rejeitando-se essa translação de todo o sistema, o sol estará quase quiescente no centro. Se o sol girasse em torno da Terra, e levasse consigo os outros planetas girando ao seu redor, a Terra atrairia o sol com uma grande força, mas não os planetas circunsolares de forma perceptível, o que é contrário ao Corolário III, Proposição LXV, Livro I. Além disso, se a Terra, por causa da gravitação de suas partes, tem sido colocada por vários autores na posição mais baixa do universo; o sol, por uma razão ainda melhor, sob a ação de uma força centrípeta que excede a gravidade terrestre em mais de mil vezes, deveria estar colocado na região mais baixa e ser considerado como o centro do sistema. E assim a verdadeira disposição de todo o sistema seria mais exata e plenamente compreendida.

28. O centro comum de gravidade do sol e de todos os planetas está em repouso e o sol desloca-se com um movimento muito lento. Explicação do movimento solar.

Como as estrelas fixas estão imóveis uma com respeito a outra, podemos considerar o sol, a Terra e os planetas como um sistema de corpos con-

duzido para cá e para lá por vários movimentos entre eles; e o centro comum de gravidade de todos (pelo Corolário IV das Leis do Movimento) será quiescente ou mover-se-á uniformemente em uma linha reta. Neste caso todo o sistema também mover-se-á uniformemente em linhas retas. Mas esta é uma hipótese difícil de ser admitida e, portanto, colocando-a de lado, aquele centro comum será quiescente, sendo que dele o sol nunca se afasta. O centro comum de gravidade do sol e de Júpiter incide na superfície do sol; e ainda que todos os planetas sejam colocados na direção das mesmas partes a partir do sol com Júpiter, o centro comum do sol e de todos eles retrocederia duas vezes do centro do sol; e, portanto, ainda que o sol, de acordo com as diferentes situações dos planetas, seja agitado de várias formas, sempre oscilando com um vagaroso movimento de balanço, ele nunca retrocede um diâmetro inteiro de seu corpo do centro quiescente do sistema. Mas a partir dos pesos do sol e dos planetas acima determinados e da situação de todos entre si, o centro comum de gravidade pode ser encontrado; e a partir deste, pode-se obter a posição do sol em quaisquer tempos supostos.

29. Entretanto, os planetas giram em elipses cujos focos estão no centro do sol; e os raios traçados até o sol descrevem áreas proporcionais aos tempos.

Ao redor do sol, com esta libração, os outros planetas giram em órbitas elípticas e, por raios traçados até o sol, descrevem áreas aproximadamente proporcionais aos tempos, como é explicado na Proposição LXV, Livro I. Se o sol fosse quiescente e os outros planetas não atuassem mutuamente entre si, suas órbitas seriam elípticas e as áreas exatamente proporcionais aos tempos (pela Proposição XI, e Corolário, Proposição LXVIII, Livro I). Mas as ações dos planetas entre si, comparadas com as ações do sol sobre os planetas, são de pouca monta, e não produzem erros perceptíveis. E esses erros são menores em revoluções em torno do sol, se agitado na maneira aqui descrita, do que naquelas feitas ao redor do sol quiescente (pela Proposição LXVI, Livro I e Corolário, Proposição LXVIII, Livro I), sobretudo se o foco de cada órbita estiver situado no centro de gravidade comum de todos os planetas inferiores incluídos; ou seja, o foco da órbita de Mercúrio no centro do sol; o foco da órbita de Vênus no centro comum de gravidade de Mercúrio e do sol; o foco da órbita da Terra no centro comum de gravidade de Vênus, Mercúrio e do sol; e assim por diante. Deste modo, os focos das órbitas de todos os planetas, exceto Saturno, não serão sensivelmente removidos do centro do sol, nem o foco da órbita de Saturno retrocederá

sensivelmente do centro comum de gravidade de Júpiter e do sol. Portanto, os astrônomos não estão longe da verdade quando consideram o centro do sol como o foco comum de todas as órbitas planetárias. Mesmo em Saturno o erro daí decorrente não excederia 1' 45". E caso sua órbita, com foco no centro comum de gravidade de Júpiter e do sol, concordasse melhor com esses fenômenos, tudo o que dissemos seria ainda mais confirmado.

30. Os tamanhos das órbitas e o movimento de seus afélios e nós.

Se o sol estivesse quiescente e os planetas não interferissem entre si, os afélios e nós de suas órbitas também seriam (pelas Proposição I e XI, e Corolário, Proposição XIII, Livro I) quiescentes. E os eixos mais longos de suas órbitas elípticas seriam (pela Proposição XV) como as raízes cúbicas dos quadrados dos tempos periódicos e, portanto, sendo dados os tempos periódicos, eles também o seriam. Mas esses tempos devem ser medidos não a partir dos pontos equinociais, que são móveis, mas da primeira estrela de Áries. Fixe o semi-eixo da órbita da Terra em 100 000 e os semi-eixos das órbitas de Saturno, Júpiter, Marte, Vênus e Mercúrio, conforme seus tempos periódicos, serão 953 806, 520 116, 152 399, 72 333 e 38 710, respectivamente. Mas pelo movimento do sol todo semi-eixo é aumentado (pela Proposição LX, Livro I) em torno de um terço da distância do centro do sol até o centro comum de gravidade do sol e do planeta. E pelas ações dos planetas exteriores sobre aqueles interiores, os tempos periódicos dos interiores são, de certa forma, prolongados, mas não em quantidades sensíveis e seus afélios são conduzidos (pelos Corolários VI e VII, Proposição LXVI, Livro I) adiante por movimentos muito lentos. E semelhantemente os tempos periódicos de todos, sobretudo dos planetas exteriores, serão prolongados pela ação dos cometas, caso existam, fora da órbita de Saturno, e os afélios de todos serão conduzidos adiante. Mas o regresso dos nós decorre do progresso dos afélios (pelos Corolários XI e XIII, Proposição LXVI, Livro I). E se o plano da eclíptica é quiescente, o regresso dos nós (pelo Corolário XVI, Proposição LXVI, Livro I) estará para o progresso do afélio em cada órbita assim como o regresso dos nós da órbita da lua está para o progresso do seu apogeu, isto é, como aproximadamente 10 para 21. Porém, observações astronômicas parecem confirmar um lento progresso dos afélios e um regresso dos nós com relação às estrelas fixas. Portanto, é provável que hajam cometas nas regiões além dos planetas, que, circulando em órbitas bem excêntricas, rapidamente passam sobre suas partes periélicas e, com um excessiva-

mente lento movimento de seus afélios, passam quase suas vidas inteiras nas regiões além dos planetas, como iremos explicar com mais detalhes[2].

31. Dos princípios precedentes derivam todos os movimentos lunares até agora observados pelos astrônomos.

Os planetas, ao girarem ao redor do sol, podem ao mesmo tempo levar outros a girarem ao redor de si como satélites e luas, como aparece pela Proposição LXVI, Livro I. Mas por causa da ação do sol nossa lua deve mover-se com uma maior velocidade e, por um raio traçado até a Terra, descreve uma área maior pelo tempo; ela deve ter sua órbita menos curva e, portanto, aproxima-se mais da Terra nas sizígias do que nas quadraturas, a não ser que o movimento de excentricidade impeça esses efeitos. Isto porque a excentricidade é maior quando o apogeu da lua está nas sizígias e menor quando o mesmo está nas quadraturas; logo, a lua em seu perigeu é mais rápida e próxima de nós, mas no seu apogeu é mais lenta e distante, nas sizígias do que nas quadraturas. Ademais, o apogeu tem um movimento progressivo e os nós um regressivo, ambos desiguais. Pois o apogeu é mais rapidamente progressivo nas sizígias, mais lentamente regressivo nas quadraturas, e pelo excesso de seu progresso sobre o regresso é anualmente transferido adiante; mas os nós são quiescentes nas sizígias e mais rapidamente regressivos nas suas quadraturas. Além disso, a maior latitude da lua é maior em suas quadraturas do que em suas sizígias e o movimento médio mais rápido no afélio da Terra do que no seu periélio. Outras irregularidades no movimento da lua ainda não foram constatadas pelos astrônomos; mas tudo isso decorre de nossos princípios nos Corolários II a XIII, Proposição LXVI, Livro I, e sabe-se que de fato ocorrem nos céus. Isto pode ser observado naquela que é a mais engenhosa, e se não me engano, mais acurada hipótese do Sr. Horrox, a qual o Sr. Flamsteed adaptou aos céus; mas as hipóteses astronômicas devem ser corrigidas pelo movimento dos nós; pois os nós admitem a maior equação ou prostaférese em seus octantes, e esta desigualdade é mais visível quando a lua está nos nós e, portanto, também nos octantes; daí que Tycho e outros depois dele atribuíram esta desigualdade aos octantes da lua, fazendo-a mensal; mas as razões aduzidas por nós provam que ela deve ser atribuída aos octantes dos nós, sendo, portanto, anual.

2. Apêndice, Nota 31.

32. Muitas das irregularidades da lua são apenas deduzidas e ainda não observadas.

Além daquelas irregularidades notadas pelos astrônomos, há outras pelas quais os movimentos da lua são tão perturbados, que até o momento não puderam por nenhuma lei ser reduzidos a qualquer ordem. Pois as velocidades ou movimentos horários do apogeu e nós da lua, e suas equações, assim como a diferença entre a maior excentricidade nas sizígias e a menor nas quadraturas, e aquela desigualdade que chamamos de variação, ao longo do ano são aumentadas e diminuídas (pelo Corolário XIV, Proposição LXVI, Livro I) como o cubo do diâmetro aparente do sol. Ademais, a variação oscila aproximadamente como o quadrado do tempo entre as quadraturas (pelos Corolários I e II, Lema X, e Corolário XVI, Proposição LXVI, Livro I); e todas essas desigualdades são maiores naquela parte da órbita em frente ao sol do que na parte oposta, mas por uma diferença que é pouco ou nem mesmo perceptível.

33. A distância da lua à Terra em um dado tempo.

Por um cálculo, que não menciono para economizar tempo, descobri que a área que a lua, por um raio traçado até a Terra, descreve nos vários momentos iguais de tempo é aproximadamente como a soma do número $237\frac{3}{10}$ e o seno verso da distância dupla da lua à quadratura mais próxima no círculo cujo raio é a unidade. Logo, o quadrado da distância da lua à Terra é como esta soma dividida pelo movimento horário da lua. Isto quando a variação nos octantes está em sua quantidade média, pois se a variação for maior ou menor, o seno verso deve ser aumentado ou diminuído na mesma razão. Cabe aos astrônomos estabelecer o quão exatamente as distâncias encontradas assim concordam com os diâmetros aparentes da lua.

34. Os movimentos dos satélites de Júpiter e Saturno derivados a partir dos movimentos de nossa lua.

Dos movimentos de nossa lua podemos derivar os movimentos das luas ou satélites de Júpiter e Saturno, pois o movimento médio dos nós do satélite mais exterior de Júpiter está para o movimento médio dos nós de nossa lua em uma proporção composta do quadrado do tempo periódi-

co da Terra ao redor do sol para o tempo periódico de Júpiter ao redor do sol, e da simples proporção do tempo periódico do satélite ao redor de Júpiter para o tempo periódico da lua ao redor da Terra, segundo o Corolário XVI, Proposição LXVI, Livro I. Portanto, esses nós, no espaço de cem anos, são levados 8º 24' para trás ou adiante. Os movimentos médios dos nós dos satélites mais interiores estão para o movimento (médio) dos (nós) daquele mais exterior assim como os tempos periódicos daqueles para o tempo periódico deste, segundo o mesmo Corolário e, portanto, são dados. E o movimento progressivo da apside da órbita de cada satélite está para o movimento regressivo dos nós, assim como o movimento do apogeu de nossa lua está para o movimento de seus nós, pelo mesmo Corolário e, portanto, é dado. As maiores equações dos nós e a linha das apsides de cada órbita dos satélites estão para as maiores equações dos nós e a linha das apsides da lua respectivamente como o movimento dos nós e a linha das apsides das órbitas dos satélites no tempo de uma revolução das primeiras equações está para o movimento dos nós e o apogeu da lua no tempo de uma revolução das últimas equações. A variação de um satélite vista de Júpiter está para a variação de nossa lua na mesma proporção que todos os movimentos de seus nós respectivamente, durante os tempos em que o satélite e nossa lua (após partirem) são girados (novamente) para o sol, conforme o mesmo Corolário e, portanto, no satélite mais exterior a variação não excede 5" 12"'. Devido à pouca monta dessas desigualdades e à lentidão dos movimentos, ocorre que os movimentos dos satélites pareçam tão regulares a ponto de os mais recentes astrônomos negarem quaisquer movimentos dos nós ou afirmarem que são muito lentamente regressivos.

35. Os planetas giram ao redor de seus próprios eixos uniformemente com relação às estrelas; estes movimentos são bem adaptados para a medida do tempo.

Enquanto os planetas giram em órbitas ao redor de centros distantes, eles também realizam diversas rotações ao redor de seus próprios eixos: o sol em 26 dias; Júpiter em 9^h 56^m; Marte em $24\frac{2}{3}^h$; Vênus em 23^h; e isso em planos não muito inclinados em relação ao plano da eclíptica e de acordo com a ordem dos signos, como os astrônomos determinaram a partir das manchas ou máculas que por vezes aparecem em seus corpos; e há uma semelhante revolução de nossa Terra realizada em 24^h; e esses movimentos não são acelerados nem retardados pelas ações de forças centrípetas, segun-

do o Corolário XXII, Proposição LXVI, Livro I; e, portanto, dentre todos, eles são os mais uniformes e mais convenientes para a medida do tempo. Mas essas revoluções devem ser consideradas uniformes não a partir de seu retorno ao sol, mas com relação a alguma estrela fixa. Pois, assim como a posição dos planetas com relação ao sol varia de forma não uniforme, as revoluções desses planetas de sol a sol tornam-se não uniformes.

36. Igualmente a lua gira ao redor de seu eixo por um movimento diurno, do qual decorre sua libração.

A lua gira de maneira semelhante ao redor de seu eixo por um movimento uniforme em relação às estrelas fixas, isto é, em $27^d\ 7^h\ 43^m$, ou seja, no espaço de um mês sideral; e este movimento diurno é igual ao movimento médio da lua em sua órbita; daí que a mesma face da lua sempre se volta para o centro ao redor do qual este movimento médio é realizado, ou seja, o foco exterior da órbita da lua, aproximadamente; disso decorre uma deflexão da face da lua voltada para a Terra, algumas vezes em direção leste, outras oeste, conforme a posição do foco em direção ao qual ela se volta; e esta deflexão é igual à equação da órbita da lua ou à diferença entre seus movimentos médio e real; tal é a libração da lua em longitude. Mas ela também é afetada com uma libração em latitude decorrente da inclinação do eixo da lua em relação ao plano da órbita em que a lua gira ao redor da Terra; pois aquele eixo mantém aproximadamente a mesma posição em relação às estrelas fixas, e portanto os pólos apresentam-se a nós alternadamente, como se depreende do exemplo do movimento da Terra cujos pólos, por causa da inclinação de seu eixo em relação ao plano da eclíptica, são alternadamente iluminados pelo sol. Determinar exatamente a posição do eixo da lua com relação às estrelas fixas e a variação desta posição é um problema digno de um astrônomo.

37. A precessão dos equinócios e o movimento libratório dos eixos da Terra e dos planetas.

Devido às revoluções diurnas dos planetas, a matéria que eles contêm tende a recuar do eixo deste movimento, de modo que as partes fluidas, elevando-se mais alto no equador do que nos pólos, submergiriam as partes sólidas em torno do equador, caso estas partes também não se elevassem. Devido a isto os planetas são mais espessos no equador do que nos pólos e seus pon-

tos equinociais tornam-se regressivos; e seus eixos, por um movimento de nutação, duas vezes em cada revolução, libram em direção às eclípticas, e por duas vezes retornam novamente às suas antigas inclinações, como é explicado no Corolário XVIII, Proposição LXVI, Livro I. Daí que Júpiter, visto através de telescópios muito longos, não aparece redondo, mas com seu diâmetro paralelo à eclíptica mais longo do que aquele que se estende de norte a sul.

38. O oceano deve fluir duas vezes e refluir duas vezes a cada dia, e a maior altura da água ocorre na terceira hora depois da aproximação dos astros ao meridiano do lugar.

Devido ao movimento diurno e às atrações do sol e da lua, nosso mar tem de fluir duas vezes e refluir duas vezes a cada dia, tanto lunar como solar (pelos Corolários XIX e XX, Proposição LXVI, Livro I), e a maior altura da água tem de ocorrer antes da sexta hora de qualquer um dos dias e depois da duodécima hora precedente. Pela lentidão do movimento diurno o fluxo é retraído até a duodécima hora e pela força do movimento de reciprocação é prolongado e adiado até um momento próximo à sexta hora. Mas até que esse tempo seja melhor determinado pelos fenômenos, por que não escolhemos um meio termo entre esses extremos, conjeturando-se que a maior altura da água ocorra na terceira hora? Desta maneira, a água subirá no momento em que a força dos astros para levantá-la será maior e descerá no momento em que a força for menor, ou seja, da nona à terceira hora quando aquela força for maior, e da terceira à nona quando for menor. Eu calculo as horas a partir da aproximação de cada astro ao meridiano de cada lugar, tanto se estão abaixo ou acima do horizonte; e pelas horas do dia lunar eu entendo as vigésimas quartas partes daquele tempo que a lua despende antes de retornar novamente, por seu movimento diurno aparente, ao meridiano do lugar que deixou no dia anterior.

39. A maré é maior nas sizígias dos astros e menor em suas quadraturas, e na terceira hora depois que a lua atinge o meridiano; fora das sizígias e quadraturas, a maré aparta-se um pouco daquela terceira hora rumo à terceira hora depois da culminação solar.

Mas os dois movimentos que os dois astros produzem não serão distintos, combinando-se em um certo movimento misto. Na conjunção ou

oposição dos astros suas forças somar-se-ão, ocasionando os maiores fluxo e refluxo das marés. Nas quadraturas o sol levantará as águas que a lua deprime e deprimirá as águas que a lua levanta; e da diferença entre as forças decorre a menor de todas as marés. E como sabemos (como nos informa a experiência) que a força da lua é maior do que a do sol, a maior altura das águas ocorrerá ao redor da terceira hora lunar. Fora das sizígias e quadraturas, a maior maré que, ocasionada apenas pela força da lua, ocorreria na terceira hora lunar, e apenas pela força do sol na terceira hora solar, pelas forças combinadas teria lugar num tempo intermediário mais próximo da terceira hora da lua do que do sol; e, portanto, enquanto a lua está passando das sizígias às quadraturas, durante aquele tempo em que a terceira hora do sol precede a terceira da lua, a maior maré irá preceder a terceira hora lunar e isto pelo maior intervalo pouco depois dos octantes da lua; e por intervalos semelhantes a maior maré ocorrerá na terceira hora lunar, enquanto a lua estiver passando das quadraturas às sizígias.

40. As marés são maiores quando os astros estão mais próximos da Terra.

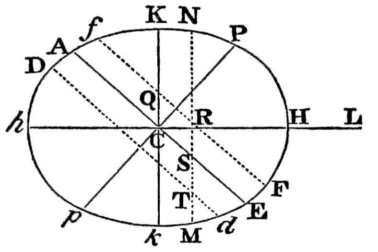
Mas os efeitos dos astros dependem de suas distâncias à Terra, pois quando estão menos distantes os efeitos são maiores e quando mais distantes seus efeitos são menores, e isto como a terceira potência de seus diâmetros aparentes. Daí que o sol durante o inverno, quando está no seu perigeu, produz um efeito maior, fazendo com que as marés nas sizígias sejam um pouco maiores, e aquelas nas quadraturas menores, do que durante o verão, outras coisas permanecendo iguais; e todo mês a lua, quando no perigeu, gera maiores marés do que no espaço de quinze dias antes ou depois, quando está em seu apogeu. Logo, conclui-se que as duas marés mais altas não seguem uma a outra em duas sizígias imediatamente sucessivas.

41. As marés são maiores nos equinócios.

A ação de cada astro também depende de sua declinação ou distância com relação ao equador, pois se o astro estiver localizado no pólo, ele constantemente atrairia todas as partes de água, sem qualquer aumento ou decréscimo de sua ação, e não poderia causar reciprocação do movimento; e, portanto, à medida que os astros declinam do equador em direção a qualquer pólo, eles irão aos poucos perder sua força, incitando menores marés

nas sizígias de solstício do que nas de equinócio. Mas nas quadraturas de solstício eles irão levantar maiores marés do que nas quadraturas perto dos equinócios, pois o efeito da lua, então situada no equador, excede em muito o efeito do sol. Logo, as maiores marés ocorrem naquelas sizígias, e as menores nas quadraturas, as quais acontecem no tempo de ambos equinócios, e a maior maré nas sizígias é sempre sucedida pela menor maré nas quadraturas, como constatamos por experiência. Mas como o sol está menos distante da Terra no inverno do que no verão, as maiores e menores marés freqüentemente ocorrem antes do que depois do equinócio vernal e mais freqüentemente depois do que antes do outonal.

42. Fora do equador os fluxos das marés são alternadamente maiores e menores.



Além disso, os efeitos dos astros dependem das latitudes dos lugares. Faça A*p*EP representar a Terra com todos os lados cobertos com águas profundas; C o seu centro; P, *p* os pólos; AE o equador; F qualquer lugar fora do equador; F*f* o paralelo do lugar; D*d* o paralelo correspondente no outro lado do equador; L o lugar que a lua ocupava três horas antes; H o lugar da Terra diretamente sob ele; *h* o lugar oposto; K, *k* os lugares a 90° graus de distância; CH, C*h* as maiores alturas do mar a partir do centro da Terra; e CK, C*k* as menores alturas; e, se com os eixos H*h*, K*k* uma elipse for descrita e, pela revolução dessa elipse ao redor de seu eixo mais longo H*h*, um esferóide HPK*hpk* é formado, este esferóide representará aproximadamente a forma do mar; e CF, C*f*, CD, C*d* representarão o mar nos lugares F, *f*, D, *d*.

Ademais, se na dita revolução da elipse um ponto qualquer N descreve o círculo NM, cortando os paralelos F*f*, D*d* em quaisquer lugares R, T, e o equador AE em S, CN representará a altura do mar em todos aqueles lugares R, S, T, situados no círculo. Por conseguinte, na revolução diurna de qualquer lugar F, o maior fluxo estará em F, na terceira hora depois da aproximação da lua ao meridiano acima do horizonte; e, em seguida, o maior refluxo em Q, na terceira hora depois que a lua se põe; então o maior fluxo em *f*, na terceira hora depois da aproximação da lua ao meridiano sob o horizonte; e, finalmente, o maior refluxo em Q, na terceira hora depois da ascensão da lua; e o último fluxo em *f* será menor do que o precedente em

F. Pois todo o mar está dividido em dois fluxos enormes e hemisféricos, um no hemisfério KH*k*C no lado norte, outro no hemisfério oposto KH*k*C, os quais podemos chamar de fluxos do norte e do sul. Estes fluxos, sendo sempre opostos um ao outro, chegam por turnos aos meridianos de todos os lugares após o intervalo de doze horas lunares; e, como os países setentrionais partilham mais do fluxo setentrional, e os países meridionais mais do fluxo meridional, alternadamente surgem marés altas e baixas em todos os lugares fora do equador em que os astros nascem e se põem. Mas a maior maré ocorrerá quando a lua declina na direção do vértice do lugar, na terceira hora depois da aproximação da lua ao meridiano acima do horizonte; e quando a lua muda sua declinação, aquela que era a maior maré será transformada na menor; e a maior diferença dos fluxos incidirá nos tempos dos solstícios, especialmente se o nó ascendente da lua estiver ao redor do primeiro de Áries. Logo, as marés matutinas no inverno excedem aquelas vespertinas, e as marés vespertinas excedem aquelas matutinas no verão: em Plymouth pela altura de um pé, mas em Bristol pela altura de quinze polegadas, de acordo com as observações de Colepress e Sturmy.

43. Pela persistência do movimento impresso, a diferença das marés é reduzida e a maior pode ser o terceiro fluxo depois das sizígias em um mês.

Mas os movimentos até aqui descritos podem sofrer alguma alteração devido à força de reciprocação que as águas [após terem recebido] retêm um pouco por causa de sua inércia; daí que as marés possam persistir por um tempo, mesmo que as ações dos astros tenham cessado. Este poder de reter o movimento impresso diminui a diferença das marés alternadas e torna maiores aquelas marés que imediatamente seguem as sizígias e menores aquelas que seguem as quadraturas. É por este motivo que as marés alternadas em Plymouth e Bristol diferem uma da outra apenas pela altura de um pé, ou de quinze polegadas; e que a maior maré nesses portos não é a primeira, mas a terceira após as sizígias.

Ademais, todos os movimentos são retardados ao passarem por canais rasos, de modo que as maiores marés, em alguns estreitos e embocaduras de rios, são as quartas, ou mesmo as quintas, após as sizígias.

44. O movimento do mar pode ser retardado por obstruções no leito.

Também pode acontecer que a maior maré seja a quarta ou quinta após as sizígias, ou que ainda ocorra mais tarde, pois os movimentos do mar são retardados ao passarem por lugares rasos em direção às praias; daí que a maré chega à costa ocidental da Irlanda na terceira hora lunar, e somente uma hora ou duas depois nos portos da costa meridional da mesma ilha; como também nas ilhas Cassiterides, comumente denominadas Sorlings; então sucessivamente em Falmouth, Plymouth, Portland, a ilha de Wight, Winchester, Dover, a embocadura do Tâmisa, e a ponte de Londres, levando doze horas nesta passagem. Além disso, a propagação das marés pode ser obstruída ainda pelos canais do próprio oceano, quando eles não têm profundidade suficiente, pois o fluxo ocorre na terceira hora lunar nas ilhas Canárias; e em todas as costas ocidentais que se voltam para o oceano Atlântico, como as da Irlanda, França, Espanha, de toda a África até o Cabo da Boa Esperança, exceto em alguns lugares rasos onde é impedida, ocorrendo mais tarde; e no estreito de Gibraltar onde, por causa do movimento propagado pelo mar Mediterrâneo, o fluxo ocorre antes. Porém, transpondo-se o oceano até as costas da América, o fluxo chega primeiro nas costas mais orientais do Brasil, por volta da quarta ou quinta hora lunar e na embocadura do rio Amazonas na sexta hora, mas nas ilhas vizinhas na quarta hora; depois, nas ilhas das Bermudas na sétima hora e no porto de St. Augustin, na Flórida, na sétima e meia. E, portanto, a maré é propagada através do oceano com um movimento mais lento do que deveria acontecer de acordo com o curso da lua; e este retardo é necessário, ou seja, que o mar ao mesmo tempo baixe entre o Brasil e a Nova França, e suba nas ilhas Canárias e nas costas da Europa e da África, e vice-versa, pois o mar apenas pode subir em um lugar se baixar em outro. E é provável que as mesmas leis sejam válidas para o oceano Pacífico, pois nas costas do Chile e do Peru o maior fluxo acontece na terceira hora lunar. Mas com que velocidade ele é então propagado para as costas orientais do Japão, as Filipinas e outras ilhas adjacentes à China, eu ainda não sei.

45. Devido às obstruções de leitos e praias vários fenômenos acontecem; o mar, por exemplo, pode fluir apenas uma vez por dia.

Pode acontecer que a maré seja propagada do oceano através de diferentes canais em direção ao mesmo porto, e passe mais rápido através de

alguns canais do que de outros, e neste caso a mesma maré, dividida em duas ou mais que se sucedem uma a outra, pode compor novos movimentos de diferentes tipos. Suponhamos que uma maré seja dividida em duas marés iguais; uma primeira precede a outra por um espaço de seis horas, e ocorre na terceira ou vigésima sétima hora a partir da aproximação da lua ao meridiano do porto. Se a lua, no momento de sua aproximação ao meridiano, estiver no equador, a cada seis horas alternadamente ocorrerão marés altas iguais, as quais, encontrando-se com tantas marés baixas, irão contrabalançar-se, de modo que naquele dia a água irá estancar, permanecendo calma. Se a lua então declinar a partir do equador, as marés no oceano serão alternadamente maiores e menores, como dissemos; e, portanto, duas marés maiores e duas menores serão alternadamente propagadas em direção àquele porto. Mas as duas maiores marés farão com que a maior altura de água ocorra no meio tempo entre ambas, e os fluxos maior e menor farão as águas subirem a uma altura média no meio tempo entre elas; e no meio tempo entre os menores fluxos as águas atingirão sua menor altura. Portanto, no espaço de vinte e quatro horas, as águas atingirão, não duas, mas apenas uma vez sua maior altura, e também apenas uma vez sua menor altura; e sua maior altura, se a lua declinar para o pólo elevado, ocorreria na sexta ou trigésima hora após a aproximação da lua ao meridiano; e quando a lua mudar sua declinação, este fluxo tornar-se-á um refluxo.

Temos um exemplo disso no porto de Batshaw, no reino de Tunkin, na latitude de 20° 50' norte. Neste porto, no dia seguinte à passagem da lua sobre o equador, as águas estancam; quando a lua declina para o norte, elas começam a fluir e refluir, não duas vezes, como nos demais portos, mas apenas uma vez por dia; e o fluxo ocorre quando a lua se põe e o maior refluxo na ascensão da lua. Esta maré aumenta com a declinação da lua até o sétimo ou oitavo dia; a partir de então até o sétimo ou oitavo dia seguinte ela diminui na mesma proporção que anteriormente aumentara e cessa quando a lua muda sua declinação. Após isso, o fluxo imediatamente torna-se um refluxo e, daí por diante, o refluxo ocorre quando a lua se põe e o fluxo quando ela ascende, até que a lua mude sua declinação. Há duas entradas do oceano a este porto: uma mais direta e pequena entre a ilha Hainan e a costa de Quantung, uma província da China; outra entre a mesma ilha e a costa de Cochim; e através da passagem menor a maré é mais rapidamente propagada até Batshaw.

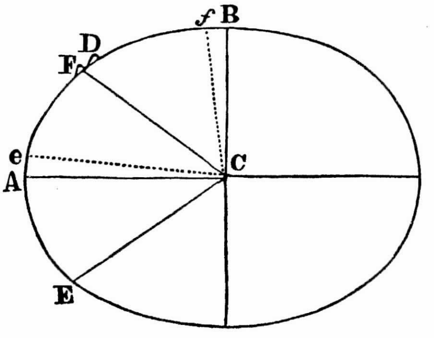
46. Os tempos das marés nos canais são mais irregulares do que nos oceanos.

Nos canais de rios o influxo e refluxo dependem da corrente dos rios, a qual obstrui o ingresso das águas do mar e promove seu regresso ao mar, fazendo com que o ingresso seja tardio e lento, e o regresso imediato e rápido; daí que o refluxo tenha uma duração maior que o influxo, especialmente mais acima dos rios, onde a força do mar é menor. Por isso, Sturmy afirma que no rio Avon, três milhas abaixo de Bristol, a água flui apenas durante cinco horas, mas reflui sete; e sem dúvida a diferença é ainda maior acima de Bristol, como em Caresham ou Bath. Esta diferença também depende da quantidade do fluxo e refluxo, pois o violento movimento do mar perto das sizígias dos astros facilmente suplanta a resistência dos rios, fazendo com que o ingresso da água aconteça mais cedo e dure mais e, portanto, diminuirá esta diferença. Mas, enquanto a lua está se aproximando das sizígias, os rios serão mais plenamente cheios, suas correntes sendo obstruídas pela magnitude das marés e, portanto, irão retardar o refluxo do mar um pouco depois em vez de um pouco antes das sizígias. Logo, as mais lentas marés não ocorrerão nas sizígias, mas irão precedê-las um pouco; e observei acima que as marés antes das sizígias também são retardadas pela força do sol e da conjunção de ambas as causas a retardação das marés será maior e mais imediata antes das sizígias. Encontro que tudo ocorre assim pelas tabelas de marés que Flamsteed compôs a partir de muitas observações.

47. Do maior e mais fundo oceano surgem maiores marés, e estas são maiores nas costas dos continentes do que nas ilhas em alto mar, e maiores ainda em baías rasas que abrem com largas embocaduras para o mar.

Os tempos das marés são regidos pelas leis que até aqui descrevemos; mas a amplitude das marés depende da amplitude dos mares. Faça C representar o centro da Terra, EADB a forma oval dos mares, CA o maior semieixo desta oval, CB o menor erguido com ângulos retos a partir do anterior, D o ponto médio entre A e B, e ECF ou *eCf* o ângulo no centro da Terra, subentendido pela largura do mar que termina nas costas E, F, ou *e*, *f*.

Supondo-se que o ponto A esteja no meio entre os pontos E e F, e o ponto D no meio entre os pontos *e* e *f*, se a diferença entre as alturas CA e CB representa a quantidade da maré em um mar muito profundo que circunda toda a Terra, o excesso da altura CA sobre a altura CE ou CF representará a quantidade da maré no meio do mar EF, limitado pelas costas E e

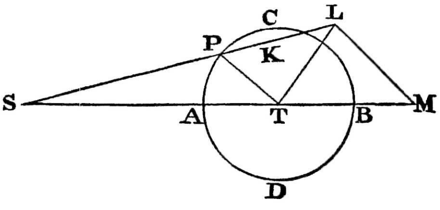


F; e o excesso da altura C*e* sobre a altura C*f* representará aproximadamente a quantidade da maré nas costas *f* do mesmo mar. Logo, as marés são bem menores no meio do mar do que nas costas; e as marés nas costas são aproximadamente como EF, com a largura do mar não excedendo um arco quadrantal. Daí que perto do equador, onde o mar entre a África e América é estreito, as marés são menores do que em ambos os lados das zonas temperadas, onde os mares são mais largos; e igualmente em quase todas as costas do oceano Pacífico, tanto em direção à América como à China, e tanto dentro como fora dos trópicos; e que nas ilhas em alto mar as marés raramente ultrapassam dois ou três pés de altura, mas nas costas de grandes continentes são três ou quatro vezes maiores ou mais, especialmente se os movimentos propagados pelo oceano são aos poucos reduzidos a um espaço estreito, e a água, para alternadamente encher e esvaziar as baías, é forçada a fluir e refluir com grande violência através de lugares rasos como Plymouth e Chepstow Bridge na Inglaterra, no monte de St. Michael e na cidade de Avranches na Normandia, e em Cambaia e Pegu nas Índias Orientais. Nesses lugares, o mar, impelido com violência para fora e para dentro, às vezes submerge as costas, outras vezes deixa-as secas por muitas milhas. Nem a força do influxo e refluxo é quebrada até que tenha levantado ou abaixado as águas por quarenta ou cinqüenta pés ou mais. Portanto, também estreitos longos e rasos, que abrem para o mar com embocaduras mais largas e profundas do que o resto do canal (como aquelas ao redor da Grã-Bretanha e dos Estreitos Magellanic na parte oriental), terão um maior fluxo e refluxo, ou irão aumentar e diminuir seu curso, e, portanto, irão elevar-se mais alto e ser deprimidos mais baixo. Na costa da América do Sul diz-se que o Oceano Pacífico às vezes reflui duas milhas e perde-se da vista daqueles que estão na costa. Logo, nestes lugares as marés altas serão ainda maiores; mas em águas profundas a velocidade do influxo e efluxo é sempre menor e, portanto, a ascensão e descida também o são. Nem em tais lugares o oceano

sobe mais do que seis, oito ou dez pés. A quantidade da ascensão eu calculo da seguinte maneira.

48. A força do sol para perturbar os movimentos da lua, calculada a partir dos princípios precedentes.

Faça S representar o sol, T a Terra, P a lua, PADB a órbita da lua. Em SP tome SK igual a ST e SL a SK na razão quadrada de SK para SP. Paralelo a PT trace LM; e, supondo que a quantidade média da força circunsolar dirigida à Terra seja representada pela distância ST ou SK, SL representará a quantidade então dirigida à lua. Mas essa força é composta pelas partes SM e LM, das quais a força LM e aquela parte de SM que é representada por TM, perturbam o movimento da lua (como decorre da Proposição XLVI, Livro I, e seus Corolários).



Enquanto a Terra e a lua estiverem girando em torno do seu centro comum de gravidade, a Terra estará sujeita à ação de tais forças. Mas podemos remeter as somas, tanto das forças como dos movimentos, à lua, e representar as somas das forças pelas linhas TM e ML, que são proporcionais a elas. A força LM, em sua quantidade média, está para a força pela qual a lua pode girar em uma órbita, ao redor da Terra quiescente, na distância PT, na razão quadrada do tempo periódico da lua ao redor da Terra, para o tempo periódico da Terra ao redor do sol (pelo Corolário XVII, Proposição LXVI, Livro I), isto é, na razão quadrada de $27^d\ 7^h\ 43^m$ para $365^d\ 6^h\ 9^m$, ou como 1000 para 178725, ou 1 para $178\frac{29}{40}$. A força pela qual a lua gira em sua órbita ao redor da Terra em repouso, à distância PT de $60\frac{1}{2}$ semidiâmetros da Terra, está para a força pela qual ela pode girar no mesmo tempo à distância de 60 semidiâmetros como $60\frac{1}{2}$ para 60; e esta força está para a força da gravidade conosco como 1 para $60 \cdot 60$, aproximadamente; e, portanto, a força média ML está para a força da gravidade na superfície da Terra como $1 \cdot 60\frac{1}{2}$ está para $60 \cdot 60 \cdot 178\frac{29}{40}$, ou 1 para 638092,6. Logo, a força TM também será dada pela razão das linhas TM e ML. E estas são as forças do sol, pelas quais os movimentos da lua são perturbados.

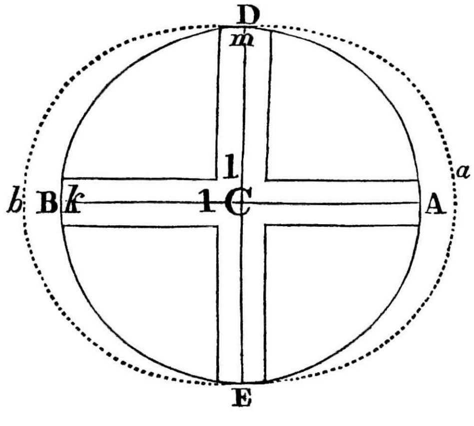
49. Cálculo da atração do sol que move o mar.

Se da órbita da lua passarmos para a superfície da Terra, aquelas forças diminuirão na razão das distâncias 60½ e 1; e, portanto, a força LM tornar-se-á 38604600 vezes menor do que a força da gravidade. Mas esta força, por atuar igualmente em todas as partes da Terra, não produzirá mudança alguma no movimento do mar e, portanto, pode ser desprezada na explicação desse movimento. A outra força TM, em lugares onde o sol está vertical, ou em seu nadir, é o triplo da quantidade da força ML, ou seja, 12868200 vezes menor do que a força da gravidade.

50. Cálculo da altura das marés sob o equador em razão da atração solar.

Suponha agora que ADBE represente a superfície esférica da Terra, *a*D*b*E a superfície da água que a cobre, C o centro de ambas, A o lugar em relação ao qual o sol está vertical, B o lugar oposto, D e E lugares a 90° graus distantes do anterior, ACE*mlk* um canal cilíndrico de ângulo reto passando através do centro da Terra.

A força TM em qualquer lugar está como a distância do lugar ao plano DE, no qual uma linha de A a C está a ângulos retos, e, portanto, na parte do canal que é representada por EC*lm*, é zero, mas na outra parte AC*lk* é como a gravidade nas várias alturas; pois ao aproximar-se do centro da Terra, a gravidade está (pela Proposição LXXIII, Livro I) em todo o lugar como a altura; e, portanto, a força TM, ao levantar as águas, diminuirá sua gravidade no trecho AC*lk* do canal em uma dada razão, e a água irá ascender neste trecho até que sua gravidade diminuída seja compensada por sua

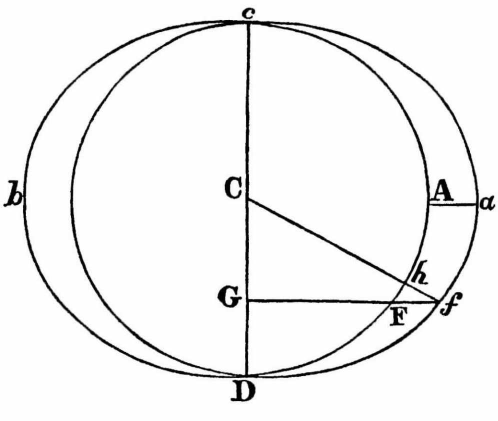


maior altura; nem repousará em equilíbrio até que sua gravidade total torne-se igual à gravidade total em EC*lm*, o outro trecho do canal. Uma vez que a gravidade de cada partícula é como sua distância ao centro da Terra, o peso de toda a água em cada trecho aumentará como o quadrado da altura; e, portanto, a altura da água no trecho AC*lk* estará para a altura no trecho C*lm*E como a raiz quadrada da razão do número 12 868 201 para 12 868 200, ou na razão do número 25 623 053 para 25 623 052, e a altura da água no trecho EC*lm* está para a diferença das alturas assim como 25 623 052 para 1. Mas como a altura no trecho EC*lm* é de 19 615 800 pés de Paris, como já foi medido pelos franceses; logo, pela proporção precedente, a diferença das alturas atinge 9⅕ polegadas de pé de Paris; e a força do sol fará com que a altura do mar em A exceda a altura do mesmo em E por nove polegadas. E ainda que a água do canal ACE*mlk* esteja supostamente congelada com uma consistência dura e sólida, mesmo assim as alturas em A e E, e todos os outros lugares intermediários, permanecerão os mesmos.

51. Cálculo da altura da maré nos paralelos de latitude em razão da atração solar.

Faça A*a* (na figura seguinte) representar o excesso de altura de nove polegadas em A, e *hf* o excesso de altura em qualquer outro lugar *h*; e sobre DC incida uma perpendicular *f*G, encontrando o globo da Terra em F; e como a distância do sol é tão grande que todas as linhas retas traçadas podem ser consideradas como paralelas, a força TM em qualquer lugar *f* estará para a mesma força no lugar A como o seno FG para o raio AC. E, portanto, como essas forças tendem para o sol em linhas paralelas, elas produzirão as alturas paralelas F*f*, A*a*, na mesma razão; logo, a forma da água D*facb* será um esferóide produzido pela revolução de uma elipse ao redor de seu eixo mais longo *ab*.

E a altura perpendicular *fh* estará para a altura oblíqua F*f* como *f*G para *f*C, ou como FG para AC, e, por conseguinte, a altura *fh* está para a altura A*a* na razão quadrada de FG para AC, isto é, na razão do seno verso do dobro do ângulo DC*f* para o dobro do raio, sendo, portanto, dada. Então, nos diferentes momentos de tempo durante a aparente revolução do sol em torno da Terra podemos inferir a proporção da subida e descida das águas em qualquer lugar dado sob o equador, assim como da diminuição dessa subida e descida, seja decorrente da latitude dos lugares seja a partir da declinação do sol; isto é, devido à latitude dos lugares, a subida e descida do



mar são, em todos os lugares, diminuídas como os quadrados dos co-senos da latitude; e devido à declinação do sol, a subida e descida sob o equador são diminuídas como os quadrados do co-seno da declinação. E em lugares fora do equador a meia soma das subidas matutinas e vespertinas (isto é, a subida média) é diminuída aproximadamente na mesma razão.

52. A razão das marés sob o equador nas sizígias e quadraturas em decorrência da atração conjunta do sol e da lua.

Faça S e L, respectivamente, representarem as forças do sol e da lua localizadas no equador, em suas distâncias médias da Terra; R o raio; T e V os senos versos do dobro dos complementos das declinações do sol e da lua em qualquer tempo dado; D e E os diâmetros médios aparentes do sol e da lua; e, supondo que F e G sejam os diâmetros aparentes em qualquer tempo dado, suas forças para subir as marés sob o equador serão, nas sizígias, $\frac{VG^3}{2RE^3}L + \frac{TF^3}{2RD^3}S$; nas quadraturas, $\frac{VG^3}{2RE^3}L - \frac{TF^3}{2RD^3}S$. E se a mesma razão for igualmente observada sob os paralelos, a partir de observações feitas com precisão em nossos climas setentrionais podemos determinar a proporção das forças L e S, e, então, por meio desta regra prever as quantidades das marés para cada sizígia e quadratura.

53. Cálculo da atração lunar que provoca as marés e da decorrente altura da água.

Na embocadura do rio Avon, três milhas abaixo de Bristol, na primavera e no outono, a subida total da água na conjunção ou oposição dos astros (pela observação de Sturmy) é de cerca de 45 pés, mas nas quadraturas apenas 25. Como os diâmetros aparentes dos astros não estão aqui determinados, vamos pressupor que estejam em suas quantidades médias, assim como a declinação da lua nas quadraturas equinociais está em sua quantidade média, ou seja, $23\frac{1}{2}°$; e o seno verso do dobro de seu complemento será 1682, supondo-se que o raio seja 1000. Mas as declinações do sol nos equinócios e da lua nas sizígias são iguais a zero, e os senos versos do dobro dos complementos são iguais a 2000 cada um. Logo, essas forças tornam-se $L + S$ nas sizígias, e $\frac{1682}{2000}L - S$ nas quadraturas, respectivamente proporcionais às alturas das marés de 45 e 25 pés, ou de 9 e 5 passos. E, portanto, multiplicando os extremos e os meios, temos $5L + 5S = \frac{15138}{2000}L - 9S$, ou $L = \frac{28000}{5138}S = 5\frac{5}{11}S$.

Mas, além disso, lembro que fui informado que no verão a subida do mar nas sizígias está para a subida nas quadraturas como ao redor de 5 para 4. Nos próprios solstícios é provável que a proporção seja menor, em torno de 6 para 5; daí que seque que L é $= 5\frac{1}{6}S$ [pois então a proporção é $\frac{1682}{2000}L + \frac{1682}{2000}S : L - \frac{1682}{2000}S = 6 : 5$]. Até que possamos, por observação, determinar com mais precisão a proporção, vamos assumir que $L = 5\frac{1}{3}S$; e como as alturas das marés são como as forças que as produzem, e a força do sol é capaz de levantar as marés a uma altura de nove polegadas, a força da lua será suficiente para levantar a uma altura de quatro pés. E, se supormos que esta altura possa ser dobrada, ou talvez triplicada, por essa força de reciprocação que observamos nos movimentos das águas, e pela qual o movimento, uma vez iniciado, permanece por algum tempo, haverá força suficiente para produzir toda aquela quantidade de marés que de fato encontramos no oceano.

54. Estas forças do sol e da lua são difíceis de serem percebidas, a não ser pelas marés que levantam no oceano.

Vimos, portanto, que estas forças são suficientes para mover o mar. Mas, até onde pude observar, elas não são capazes de produzir qualquer efeito perceptível em nossa Terra[3]; pois uma vez que o peso de um grão dentre 4000 não é perceptível na melhor balança, e que a força do sol para mover as marés é 12 868 200 vezes menor do que a força da gravidade e que a soma da força tanto do sol quanto da lua, excedendo a força do sol apenas na razão de $6\frac{1}{3}$ para 1, é ainda 2 032 890 vezes menor do que a força da gravidade, é evidente que ambas as forças juntas são 500 vezes menor do que é preciso para aumentar ou diminuir perceptivelmente o peso de qualquer corpo numa balança. E, portanto, elas não irão mover sensivelmente qualquer corpo suspenso, nem produzirão qualquer efeito sensível em pêndulos, barômetros, corpos flutuando em águas paradas, ou em experimentos estáticos semelhantes. De fato, na atmosfera elas produzirão algum fluxo e refluxo como fazem no mar, mas com um movimento tão pequeno que nenhum vento sensível será gerado.

55. A lua é cerca de seis vezes mais densa do que o sol.

Se os efeitos do sol e da lua para subir as marés, assim como os seus diâmetros aparentes, fossem iguais entre si, suas forças absolutas seriam (pelo Corolário XIV, Proposição LXVI, Livro I) como suas magnitudes. Mas o efeito da lua está para o efeito do sol como $5\frac{1}{3}$ está para 1; e o diâmetro da lua é menor do que o do sol na razão de $31\frac{1}{2}$ para $32\frac{1}{5}$, ou de 45 para 46. A força da lua deve ser aumentada diretamente como a razão do efeito e inversamente como o cubo da razão do diâmetro. Portanto, a força da lua comparada com sua magnitude estará para a força do sol comparada com sua magnitude na razão composta de $5\frac{1}{3}$ para 1 e inversamente como o cubo da razão de 45 para 46, isto é, na razão de cerca de $5\frac{7}{10}$ para 1. E, portanto, a lua, com respeito à magnitude de seu corpo, tem uma força centrípeta absoluta maior do que o sol com respeito à magnitude de seu corpo na razão de $5\frac{7}{10}$ para 1, sendo, por conseguinte, mais densa na mesma razão.

3. Apêndice, Nota 32.

56. A lua é mais densa do que nossa Terra na razão aproximada de 3 para 2.

No tempo de 27^d 7^h 43^m, em que a lua completa sua revolução em torno da Terra, um planeta pode girar ao redor do sol à distância de 18,954 diâmetros do sol a partir do centro do sol, supondo-se o diâmetro aparente do sol de 32⅕'; e no mesmo tempo a lua pode girar ao redor da Terra em repouso, à distância de trinta diâmetros da Terra. Se, em ambos os casos, o número de diâmetros for o mesmo, a força circunterrestre absoluta estará (pelo Corolário II, Proposição LXXII, Livro I) para a força circunsolar absoluta assim como a magnitude da Terra está para a magnitude do sol. Como o número de diâmetros da Terra é maior na razão de 30 para 18,954, o corpo da Terra será menor naquela razão ao cubo, isto é, na razão de $3^{28}/_{29}$ para 1. Portanto, a força da Terra, devido à magnitude de seu corpo, está para a força do sol, devido à magnitude de seu corpo, como $3^{28}/_{29}$ para 1 e conseqüentemente a densidade da Terra para a do sol estará na mesma razão. Logo, sendo que a densidade da lua está para a densidade do sol como 5⁷⁄₁₀ para 1, a densidade da lua estará para a densidade da Terra como 5⁷⁄₁₀ para $3^{28}/_{29}$, ou como 23 para 16. Portanto, uma vez que a magnitude da lua está para a magnitude da Terra como 1 para 41½, a força centrípeta absoluta da lua estará para a força centrípeta absoluta da Terra assim como 1 para 29, e a quantidade de matéria na lua estará para a quantidade de matéria na Terra na mesma razão. Por conseguinte, o centro comum de gravidade da Terra e da lua está melhor determinado do que antes; a partir de seu conhecimento pode-se inferir com maior precisão a distância da lua à Terra. Mas prefiro esperar até que a razão entre os corpos da lua e da Terra seja melhor determinada a partir do fenômeno das marés, esperando que neste ínterim a circunferência da Terra possa ser medida a partir de estações mais distantes que até agora ninguém empregou para este propósito.

57. Sobre a distância das estrelas.

Apresentei acima um relato sobre o sistema dos planetas. Quanto às estrelas fixas, a insignificância de sua paralaxe anual indica que elas estão a imensas distâncias do sistema dos planetas. Sabe-se que esta paralaxe é menor do que um minuto e disto decorre que a distância das estrelas fixas é acima de 360 vezes maior do que a distância de Saturno ao sol. Aqueles que consideram a Terra como um dos planetas, e o sol como uma das estrelas fixas, podem remover as estrelas fixas a distâncias ainda maiores pelos se-

guintes argumentos. Devido ao movimento anual da Terra aconteceria uma transposição aparente das estrelas fixas, uma em relação a outra, quase igual à sua dupla paralaxe; mas as estrelas maiores e mais próximas, com relação àquelas mais distantes, que são apenas vistas com o telescópio, ainda não foram observadas apresentando qualquer movimento. Se supormos que o movimento seja menor do que 20", a distância das estrelas fixas mais próximas excederiam a distância média de Saturno acima de 2000 vezes. O disco de Saturno, que tem apenas 17" ou 18" de diâmetro, recebe apenas $\frac{1}{2\,100\,000\,000}$ da luz do sol, pois tão menor é este disco comparado com a superfície esférica total do orbe de Saturno. Mas, se supormos que Saturno reflita cerca de ¼ desta luz, a luz total refletida a partir de seu hemisfério iluminado seria $\frac{1}{42\,100\,000\,000}$ da luz total emitida do hemisfério do sol; e, portanto, uma vez que a luz é rarefeita inversamente como o quadrado da distância ao corpo luminoso, se o sol estiver $1000\sqrt{42}$ vezes mais distante do que Saturno, ele ainda apareceria tão lúcido quanto Saturno sem o seu anel, isto é, mais lúcido do que uma estrela fixa de primeira magnitude. Suponhamos, por conseguinte, que a distância pela qual o sol brilharia como uma estrela fixa excedesse aquela de Saturno cerca de 100 000 vezes, e seu diâmetro aparente fosse 7^{v} 16^{vi} e sua paralaxe decorrente do movimento anual da Terra 13^{iv}. E tão grande seria a distância, o diâmetro aparente e a paralaxe das estrelas fixas de primeira magnitude, atingindo grandeza e luz iguais às do nosso sol. Outros, contudo, podem imaginar que uma grande parte da luz das estrelas fixas seja interceptada e se perca na passagem através de tão vastos espaços, e, portanto, preferem fixá-las a distâncias menores; mas por este raciocínio as estrelas mais remotas sequer seriam vistas. Suponha, por exemplo, que ¾ da luz se perca em sua passagem das estrelas fixas mais próximas até nós; então ¾ perderiam-se duas vezes nesta passagem através de um duplo espaço, três vezes em um triplo, e assim por diante. E, portanto, as estrelas fixas que estão a uma dupla distância seriam dezesseis vezes mais obscuras, ou seja, quatro vezes mais obscuras devido ao diâmetro aparente diminuído; e, além disso, quatro vezes mais devido à luz perdida. E, pelo mesmo argumento, as estrelas fixas a uma tripla distância seriam $9 \cdot 4 \cdot 4$, ou 144 vezes mais obscuras; e aquelas a uma quádrupla distância seriam $16 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$, ou 1024 vezes mais obscuras; mas uma tão grande diminuição da luz não é de modo algum compatível com os fenômenos e com aquela hipótese que coloca as estrelas fixas a diferentes distâncias.

58. Que os cometas, quando aparecem à vista, estão mais próximos do que Júpiter é demonstrado por sua paralaxe na longitude.

As estrelas fixas, estando a grandes distâncias umas das outras, não podem se atrair perceptivelmente, nem serem atraídas pelo nosso sol. Mas os cometas inevitavelmente têm de sofrer a ação da força circunsolar; pois, como os cometas estão situados pelos astrônomos além da lua, porque não têm paralaxe diurna, sua paralaxe anual é uma prova convincente de que percorrem as regiões dos planetas. Todos os cometas que se movem num curso direto, conforme a ordem dos signos, ao final de suas aparições tornam-se mais do que comumente lentos, ou retrógrados, se a Terra está entre eles e o sol; e mais do que comumente rápidos se a Terra estiver se aproximando de uma oposição heliocêntrica com relação a eles. Contudo, aqueles cometas que se movem contrários à ordem dos signos, ao final de suas aparições, aparecem mais rápidos do que deveriam estar, se a Terra está entre eles e o sol; e mais lentos, e talvez retrógrados, se a Terra estiver no outro lado de sua órbita. Isto é ocasionado pelo movimento da Terra em diferentes situações. Se a Terra desloca-se na mesma direção que o cometa, com um movimento mais rápido, o cometa torna-se retrógrado; contudo, se com um movimento mais lento, o cometa torna-se mais lento; e se a Terra move-se na direção contrária, ele torna-se mais rápido. E verificando-se as diferenças entre os movimentos mais lentos e mais rápidos, e as somas dos movimentos mais rápidos e retrógrados, e comparando-as com a posição e movimento da Terra a partir dos quais surgem, encontrei, por meio desta paralaxe, que as distâncias dos cometas no momento em que cessam de ser visíveis a olho nu são sempre menores do que a distância de Saturno e geralmente ainda menores do que a distância de Júpiter.

59. Isto é mostrado pela paralaxe na latitude.

O mesmo pode ser inferido a partir da curvatura da trajetória dos cometas. Estes corpos percorrem grandes círculos enquanto seus movimentos permanecem rápidos; mas ao final de seus cursos, quando aquela parte de seus movimentos aparentes, que surge da paralaxe, guarda uma grande proporção com o movimento aparente total, eles geralmente desviam desses círculos; e quando a Terra vai para um lado, eles desviam para outro; e esta deflexão, uma vez que corresponde ao movimento da Terra, deve surgir principalmente da paralaxe; e a quantidade é tão considerável a ponto

de, segundo meus cálculos, colocar os cometas que estão para desaparecer bem mais próximos de Júpiter. Daí segue que quando eles se aproximam de nós em seus perigeus e periélios, estão geralmente dentro das órbitas de Marte e dos planetas inferiores.

60. Isto é mostrado de outra maneira pela paralaxe.

Além disso, esta proximidade dos cometas é confirmada pela paralaxe anual da órbita, caso esta seja obtida aproximadamente pela suposição de que os cometas movem-se uniformemente em linhas retas. O método (primeiramente tentado por Kepler, depois aperfeiçoado pelo Dr. Wallis e por Sir Christopher Wren) para se calcular a distância de um cometa de acordo com esta hipótese, a partir de quatro observações, é bem conhecido e os cometas reduzidos a esta regularidade geralmente passam através do meio da região planetária. Nesse sentido, os cometas dos anos de 1607 e 1618, do modo como seus movimentos foram definidos por Kepler, passaram entre o sol e a Terra; aquele do ano de 1664 dentro da órbita de Marte; e aquele em 1680 dentro da órbita de Mercúrio, do modo como seu movimento foi definido por Sir Christopher Wren e outros. Por uma hipótese retilínea semelhante, Hewelcke situou todos os cometas, dos quais tínhamos informações, dentro da órbita de Júpiter. É uma falsa noção, portanto, e contrária aos cálculos astronômicos, aquela que alguns sustentaram, segundo a qual a partir do movimento regular dos planetas deve-se removê-los para as regiões das estrelas fixas ou negar o movimento da Terra, pois seus movimentos não podem ser reduzidos a uma perfeita regularidade, a não ser que se suponha que os cometas atravessem regiões perto da Terra. Em suma, estes são os argumentos que podem ser deduzidos da paralaxe, até onde ela pode ser determinada sem um conhecimento exato das órbitas e movimentos dos cometas.

61. A luz de suas cabeças demonstra que os cometas chegam a atingir a órbita de Saturno.

A aproximação dos cometas é confirmada pela luz de suas cabeças, pois a luz de um corpo celestial, iluminado pelo sol e retrocedendo a partes remotas, é diminuída inversamente como a quarta potência da distância; ou seja, como a segunda potência, tendo em vista o aumento da distância ao sol; e como outra segunda potência, tendo em vista o decréscimo do diâmetro

aparente. Logo, pode-se inferir que, estando Saturno a uma dupla distância, e tendo seu diâmetro aparente aproximadamente metade do de Júpiter, a luz deve aparecer cerca de dezesseis vezes mais obscura; e que, se a distância for quatro vezes maior, sua luz será 256 vezes menor e, portanto, pouco perceptível a olho nu. Mas os cometas freqüentemente igualam-se à luz de Saturno, sem excedê-lo em seus diâmetros aparentes. Assim, o cometa do ano de 1668, de acordo com as observações do Dr. Hooke, igualou-se em brilho à luz de uma estrela fixa de primeira magnitude; e sua cabeça, ou a estrela no meio da cabeleira, apareceu, através de um telescópio de quinze pés, tão lúcida quanto Saturno perto do horizonte; mas o diâmetro da cabeça era de apenas 25", isto é, quase igual ao diâmetro de um círculo igual a Saturno e seu anel. A cabeleira era cerca de dez vezes mais larga, ou seja, $4\frac{1}{6}'$. Novamente, o menor diâmetro da cabeleira do cometa de 1682, observado pelo Sr. Flamsteed com um telescópio de dezesseis pés, e medido com o micrômetro, era de 2' 0"; mas o núcleo, ou a estrela no meio, nem chegava a possuir a décima parte desta largura e, portanto, tinha apenas 11" ou 12"; mas a luz e a nitidez de sua cabeça excedia aquelas do ano de 1680, igualando-se às de estrelas de primeira ou segunda magnitude. Ademais, o cometa do ano de 1665, em abril, como nos informa Hewelcke, ultrapassou em esplendor quase todas as estrelas fixas e mesmo Saturno, pois era de uma cor muito mais viva; porque este cometa estava mais lúcido do que aquele que apareceu no final do ano anterior e foi comparado às estrelas de primeira magnitude. O diâmetro da cabeleira media em torno de 6', mas o núcleo, comparado com os planetas por meio de um telescópio, era nitidamente menor do que Júpiter, e algumas vezes pensou-se que seria ainda bem menor, outras vezes igual ao corpo de Saturno dentro de seu anel. A esta largura acrescente aquela do anel, e toda a face de Saturno será duplamente maior do que a do cometa, com uma luz não muito mais intensa; e, portanto, o cometa estava mais próximo do sol do que Saturno. Da razão do núcleo para toda a cabeça, determinada por estas observações, e de sua largura, que raramente excede 8' ou 12', conclui-se que as estrelas dos cometas são quase da mesma magnitude aparente do que os planetas; mas sua luz compara-se à de Saturno, às vezes até excedendo-a. Logo, é certo que em seus periélios suas distâncias não podem ser maiores do que a de Saturno. No dobro dessa distância, a luz seria quatro vezes menor e, devido à sua opaca palidez, seria tão inferior à luz de Saturno como esta em relação ao esplendor de Júpiter: a diferença seria facilmente observada. A uma distância dez vezes maior, seus corpos excederiam o sol; mas suas luzes seriam 100 vezes mais fracas do que aquela de Saturno. E a distâncias ainda maiores, seus corpos excederiam em

muito o do sol; mas, estando em tais regiões escuras, não seriam mais visíveis. Sem dúvida, é impossível situar os cometas em regiões intermediárias entre o sol e as estrelas fixas, considerando-se o sol como uma delas, pois certamente os cometas lá receberiam tanta luz do sol quanto nós recebemos das maiores das estrelas fixas.

62. Eles descem bem além da órbita de Júpiter e às vezes além da órbita da Terra.

Até aqui não consideramos o obscurecimento que os planetas sofrem devido à quantidade de fumaça espessa que encobre suas cabeças, e através da qual as cabeças sempre aparecem opacas como se estivessem atrás de uma nuvem; pois quanto mais um corpo é obscurecido por esta fumaça, o mais próximo ele necessariamente deve se aproximar do sol, a fim de que possa rivalizar com os planetas em quantidade de luz que ele reflete; logo, é provável que os cometas desçam bem além da órbita de Saturno, como provamos anteriormente a partir de sua paralaxe. Mas, acima de tudo, o fato é confirmado por suas caudas, as quais devem-se ou à luz do sol refletida pela fumaça gerada por eles, e dispersada através do éter, ou à luz de suas próprias cabeças.

No primeiro caso devemos encurtar a distância dos cometas, a não ser que consideremos que a fumaça expelida por suas cabeças seja propagada através de uma vasta extensão de espaço, e com uma grande velocidade de expansão, o que seria incrível; no segundo caso, toda a luz da cabeça e da cauda deveria ser atribuída ao núcleo central. Mas, então, se supormos que toda esta luz esteja concentrada dentro do disco do núcleo, certamente este muito excederia Júpiter em esplendor, especialmente quando emite uma cauda muito longa e lúcida. Se, contudo, sob um diâmetro aparente menor, ele reflete mais luz, ele deverá estar mais iluminado pelo sol e, portanto, mais próximo a ele. Logo, o cometa que apareceu nos dias 12 e 15 de dezembro de 1679 no momento em que emitiu uma cauda muito brilhante, cujo esplendor era igual àquele de muitas estrelas como Júpiter, caso sua luz estivesse dilatada e espalhada através de um grande espaço, ele era, quanto à magnitude de seu núcleo, menor do que Júpiter (como o Sr. Flamsteed observou) e, portanto, estava mais próximo do sol; e também menor do que Mercúrio. Pois no dia 17 daquele mês, quando estava mais próximo da Terra, ele apareceu a Cassini, através de um telescópio de 35 pés, um pouco menor do que o globo de Saturno. No dia 8 desse mês, pela manhã, o Dr.

Halley viu a cauda, grossa e muito curta, e como se tivesse saído do próprio corpo do sol, naquele momento bem próximo a seu alvorecer. Sua forma era semelhante à de uma nuvem extraordinariamente brilhante e não desapareceu até que o sol pudesse ser visto acima do horizonte. Seu esplendor, portanto, excedeu a luz das nuvens até que o sol se levantasse, e ultrapassou de longe aquela de todas as estrelas juntas, cedendo apenas ao brilho do próprio sol. Nem Mercúrio, nem Vênus ou mesmo a lua são vistos tão perto do sol nascente. Imagine toda esta luz dilatada reunida e inserida dentro da órbita do núcleo de um cometa menor do que Mercúrio; pelo seu esplendor, assim aumentado, tornando-se muito mais visível, excederia em muito Mercúrio e, portanto, deveria estar mais próximo do sol. Nos dias 12 e 15 do mesmo mês, esta cauda, estendendo-se por um espaço ainda maior, apareceu mais rarefeita; mas sua luz permanecia forte a ponto de estar visível quando as estrelas fixas quase já não podiam ser vistas, e também logo depois apareceu como um feixe luminoso brilhando de maneira admirável. Pelo seu comprimento, que era de 40 ou 50 graus, e por sua largura de dois graus, pode-se calcular o que seria a luz do conjunto todo.

63. Isto é confirmado pelo notável esplendor de suas caudas nas proximidades do sol.

Esta aproximação dos cometas ao sol é confirmada pela posição em que são vistos quando suas caudas aparecem mais resplandecentes; pois quando a cabeça passa pelo sol, sendo encoberta pelos raios solares, caudas muito brilhantes, como feixes luminosos, são vistas no horizonte; mas, em seguida, quando a cabeça começa a aparecer e afasta-se do sol, aquele esplendor diminui e aos poucos se torna pálido como aquele da Via Láctea, porém de início mais brilhante; após isso, desaparece gradualmente. Semelhante cometa foi descrito por Aristóteles, Livro I, *Meteor.*, 6: "A cabeça não podia ser vista porque ela se pôs antes do sol, ou estava encoberta pelos raios do sol; mas no dia seguinte já era um pouco visível, pois, tendo afastado-se um pouco do sol, colocou-se prontamente atrás dele; e a luz dispersa da cabeça obscurecida pelo grande esplendor [da cauda] ainda não aparecia. Mas, em seguida [diz Aristóteles], quando o esplendor da cauda tinha diminuído, [a cabeça] do cometa recobrou seu brilho original. E o esplendor de sua cauda atingiu uma terceira parte dos céus [isto é, 60°]. Ele apareceu durante o inverno e, atingindo o cinturão de Órion, lá desapareceu". Dois cometas do mesmo tipo são descritos por Justino, Livro XXXVII, os quais,

de acordo com ele, "brilhavam tanto que todo o céu parecia estar em fogo; e por sua grandeza preenchiam a quarta parte dos céus, e pelo seu esplendor superavam o sol". Por estas últimas palavras infere-se que estes cometas estavam próximos um do outro e ao sol nascente ou poente. Podemos acrescentar a esses o cometa do ano de 1101 ou 1106, "a estrela do qual era pequena e obscura [como aquela de 1680]; mas o esplendor surgindo dela era extremamente brilhante, estendendo-se como um feixe de fogo para o leste e o norte", como relatou Simeão, o monge de Durham, mencionado por Hewelcke. Ele apareceu no início de fevereiro durante a tarde a Sudoeste. Por isto e pela posição da cauda podemos concluir que a cabeça estava próxima do sol. Matthew Paris diz: "ela estava cerca de um cúbito do sol; da terceira [ou sexta] à nona hora emitindo uma longa faixa de luz". O cometa de 1264, em julho, ou próximo ao solstício, precedeu o sol nascente enviando feixes de luz em direção ao oeste até o meio dos céus; e no princípio ele ascendeu um pouco acima do horizonte, mas como o sol avançava, ele retirava-se mais além do horizonte a cada dia, até que passou pelo meio dos céus. Afirma-se que inicialmente era longo e brilhante, tendo uma grande cabeleira que decrescia diariamente. É descrito em *Append. Matth. Paris, Hist. Ang.* da seguinte maneira: "*An. Christi* 1265, apareceu um cometa tão maravilhoso que ninguém vivendo naquela época jamais tinha visto; pois, nascendo no leste com grande brilho, estendeu-se com uma grande luz até o meio do hemisfério em direção ao oeste". No original latim, um pouco rude e obscuro, lê-se: *Ab oriente enim cum magno fulgore surgens, usque ad medium hemisphaerii versus occidentem, omnia perlucide pertrahebat.*

"No ano de 1401 ou 1402, com o sol abaixo do horizonte, apareceu a oeste um cometa brilhante e luminoso, que deixava atrás de si uma cauda apontada para cima, de esplendor semelhante a uma chama de fogo e de forma igual a uma lança, que lançava seus raios do oeste ao leste. Quando o sol se colocou abaixo do horizonte, pelos seus raios iluminou todas as bordas da Terra, não permitindo que as outras estrelas mostrassem suas luzes e que as sombras da noite escurecessem o ar, porque sua luz excedia a todas as outras, estendendo-se às partes mais superiores dos céus, flamejando...", *Hist. Byzant. Duc. Mich. Nepot.* Da posição da cauda deste cometa, e do tempo de sua aparição, pode-se inferir que a cabeça estava então perto do sol, afastando-se dele a cada dia; pois este cometa permaneceu por três meses. Em 11 de agosto de 1527, às quatro horas da manhã, foi visto através da Europa um extraordinário cometa em Leão, que continuou flamejando por uma hora e um quarto todos os dias. Ele nasceu a leste e ascendeu ao sul e ao oeste com um comprimento prodigioso. Era mais visível ao norte e sua

nuvem (isto é, sua cauda) era extraordinária, tendo, de acordo com as fantasias do povo, a forma de um braço um pouco inclinado segurando uma espada de grande tamanho. No ano de 1618, no final de novembro, houve rumores que apareceu ao nascer do sol um feixe brilhante, que era a cauda de um cometa cuja cabeça ainda estava encoberta pelo brilho dos raios do sol. Em 24 de novembro, e a partir de então, o cometa apareceu com uma luz brilhante, sua cabeça e cauda muito resplandecentes. O comprimento da cauda, que era inicialmente de 20 ou 30 graus, aumentou até 9 de dezembro, quando atingiu 75 graus, mas agora com uma luz mais fraca e mais diluída do que no começo. Em 5 de março de 1668, por volta das sete horas da noite, Valentin Estancel, estando no Brasil, viu um cometa perto do horizonte a Sudoeste. Sua cabeça era pequena e pouco discernível, mas sua cauda era extremamente brilhante e refulgente, de modo que seu reflexo no mar era facilmente visto por aqueles que estavam na costa. Este grande esplendor durou apenas três dias, diminuindo consideravelmente a partir de então. A cauda no início estendia-se de oeste a sul, e numa posição quase paralela ao horizonte, aparecendo como um feixe brilhante de 23 graus de comprimento. Depois disso, com a luz decrescendo, sua magnitude aumentou até que o cometa deixou de ser visível; Cassini, em Bolonha, o viu (10, 11, 12 de março) surgindo do horizonte com 32 graus de comprimento. Em Portugal afirmou-se que ele tomou a quarta parte dos céus (isto é, 45 graus), estendendo-se de oeste a leste com notável brilho, ainda que o cometa não tenha sido visto por inteiro porque a cabeça nessa parte do mundo sempre se situou abaixo do horizonte. Considerando-se o aumento da cauda fica claro que a cabeça afastou-se do sol, estando mais perto dele no início, quando a cauda aparecia mais brilhante.

Podemos mencionar ainda o cometa de 1680, cujo maravilhoso esplendor na conjunção da cabeça com o sol foi acima descrito. Mas tamanho esplendor indica que os cometas deste tipo realmente passaram perto da fonte de luz, sobretudo uma vez que suas caudas nunca brilham muito quando opostas ao sol; nem lemos que feixes luminosos tenham alguma vez surgido lá.

64. Da luz das cabeças depreende-se, caso sejam mantidas as mesmas condições, o quão grande esta luz é nas proximidades do sol.

Por fim, o mesmo pode-se inferir pelo fato de a luz das cabeças aumentar quando os cometas afastam-se da Terra em direção ao sol, e dimi-

nuir quando retornam do sol à Terra, pois o último cometa do ano de 1665 (pelas observações de Hewelcke), desde quando foi visto pela primeira vez, estava sempre perdendo seu movimento aparente e, portanto, já tinha passado por seu perigeu; no entanto, a luz de sua cabeça estava aumentando diariamente, até que, encoberto pelos raios do sol, o cometa deixou de ser visível. O cometa do ano de 1683 (também pelas observações de Hewelcke), perto do fim de julho, quando apareceu pela primeira vez, movia-se muito lentamente, avançando apenas 40 ou 45 minutos em sua órbita por dia. Mas, a partir de então, seu movimento diurno progressivamente aumentou até 4 de setembro, quando atingiu 5 graus; e, portanto, em todo este intervalo de tempo o cometa estava se aproximando da Terra. Isto também é provado pelo diâmetro de sua cabeça medido com o micrômetro; pois, em 6 de agosto, Hewelcke mediu apenas 6' 5", incluindo a cabeleira; em 2 de setembro, ele observou 9' 7". Logo, sua cabeça parecia bem menor no início do que no fim do movimento, ainda que no início, por estar mais perto do sol, ela parecesse mais lúcida do que no fim, como o próprio Hewelcke constata. Portanto, em todo este intervalo de tempo, devido ao seu afastamento do sol, o cometa decresceu em esplendor, não obstante sua aproximação da Terra. O cometa do ano de 1618, em meados de dezembro, e aquele do ano de 1680, no final do mesmo mês, moviam-se ambos com suas maiores velocidades, estando portanto em seus perigeus; mas o maior esplendor de suas cabeças foi visto duas semanas antes, quando acabaram de se livrar dos raios do sol e o maior esplendor das caudas um pouco antes, quando estavam mais próximos do sol. A cabeça do primeiro cometa, de acordo com as observações de Cysat, em 1 de dezembro, parecia maior do que as estrelas de primeira magnitude; e, em 16 de dezembro (estando então em seu perigeu), de pequena magnitude, e o esplendor ou nitidez diminuíra bastante. Em 7 de janeiro, Kepler, com dúvidas quanto à cabeça, deixou de observar. Em 12 de dezembro, a cabeça do último cometa foi observada por Flamsteed, à distância de 9 graus do sol, onde uma estrela de terceira magnitude dificilmente estaria. Em 15 e 17 de dezembro, o mesmo cometa assemelhava-se a uma estrela de terceira magnitude, com seu esplendor tendo diminuído devido às nuvens brilhantes próximas ao sol poente. Em 26 de dezembro, quando se movia com a maior rapidez, estando quase em seu perigeu, era inferior a Os Pegasi, uma estrela de terceira magnitude. Em 3 de janeiro parecia como uma estrela da quarta; e a 9 de janeiro, como uma estrela da quinta. Em 13 de janeiro desapareceu devido ao brilho da lua, que estava então aumentando. Em 25 de janeiro mal se equiparava às estrelas de sétima magnitude. Se considerarmos tempos iguais

em cada mão do perigeu, as cabeças situadas a distâncias remotas deveriam brilhar igualmente tanto antes como depois, por causa de suas distâncias iguais à Terra. O fato de que elas em um caso brilhem muito, e em outro desapareçam, deve ser atribuído à proximidade do sol no primeiro caso, e à sua distância no outro; e da grande diferença da luz nos dois casos inferimos sua grande proximidade no primeiro caso; pois a luz dos cometas tende a ser regular, parecendo maior quando suas cabeças movem-se mais rápido, e estão, portanto, em seus perigeus, a não ser que aumente devido à proximidade do sol.

65. Isto também é confirmado pelo grande número de cometas vistos na região do sol.

Tendo em vista esses fatos finalmente descobri porque os cometas tanto freqüentam a região do sol. Se fossem vistos em regiões muito além de Saturno, deveriam aparecer mais freqüentemente naquelas partes dos céus opostas ao sol; pois aqueles que se encontrassem nesta situação estariam mais próximos da Terra, e a interposição do sol iria obscurecer os demais. Mas, passando em revista a história dos cometas, constato que quatro ou cinco vezes mais cometas foram vistos no hemisfério voltado ao sol do que no oposto; além disso, sem dúvida, não poucos foram encobertos pela luz do sol, pois os cometas ao dirigirem-se para nossos lados não emitem caudas nem são tão iluminados pelo sol, a ponto de serem vistos a olho nu, até que estejam mais próximos de nós do que Júpiter. Mas a maior porção daquele espaço esférico, que é descrito ao redor do sol com um raio tão pequeno, situa-se naquele lado da Terra voltado para o sol, e os cometas nessa grande porção são mais fortemente iluminados, pois estão em sua maioria mais próximos do sol. Ademais, devido à notável excentricidade de suas órbitas, ocorre que as apsides mais inferiores estão bem mais próximas ao sol do que se suas revoluções fossem realizadas em círculos concêntricos ao sol.

66. Isto é confirmado também pela maior magnitude e esplendor das caudas depois da conjunção das cabeças com o sol do que antes.

Portanto, também entendemos porque as caudas dos cometas, enquanto suas cabeças dirigem-se ao sol, sempre aparecem curtas e rarefeitas, e raramente excedem 15 ou 20 graus de comprimento; mas no afastamen-

to das cabeças em relação ao sol geralmente brilham como feixes de fogo, e logo depois atingem 40, 50, 60, 70 graus de comprimento ou mais. O grande esplendor e comprimento das caudas decorrem do calor que o sol transmite ao cometa quando este se aproxima. Portanto, penso que se pode concluir que todos os cometas que têm semelhantes caudas passaram próximo ao sol.

67. As caudas surgem das atmosferas dos cometas.

Podemos concluir a partir dos resultados precedentes que as caudas surgem das atmosferas das cabeças, mas há três opiniões variadas sobre as caudas dos cometas. Alguns pensam que elas nada mais são do que feixes da luz do sol transmitidos através das cabeças dos cometas, que eles supõem que sejam transparentes; outros pensam que elas procedem da refração que a luz sofre ao passar da cabeça do cometa para a Terra; e, finalmente, há os que consideram que as caudas são uma espécie de nuvem ou vapor que constantemente exala da cabeça dos cometas e tende em direção às partes opostas ao sol. A primeira é a opinião daqueles que desconhecem óptica, pois os raios do sol não são vistos em uma câmara escura, a não ser em conseqüência da luz que é refletida a partir deles pelas pequenas partículas de poeira e fumaça que estão sempre presentes no ar; daí que em um ar impregnado de fumaça espessa eles aparecem com maior brilho, e são mais tênues e menos visíveis em um ar mais puro; mas nos céus, onde não há matéria para refletir a luz, eles não chegam a ser vistos. A luz não é vista tal como está nos raios, mas como é refletida para nossos olhos, pois alguém apenas enxerga devido aos raios que incidem nos olhos e, portanto, deve existir alguma matéria refletora naquelas partes onde as caudas dos cometas são vistas; e, portanto, o argumento volta-se agora para a terceira opinião, pois essa matéria refletora só pode ser encontrada no lugar da cauda, porque de outro modo, uma vez que todos os espaços celestes são igualmente iluminados pela luz do sol, nenhuma parte dos céus poderia aparecer com maior esplendor do que a outra. A segunda opinião enfrenta muitas dificuldades. As caudas dos cometas nunca são vistas com aquela variedade de cor que é comum à refração; e a transmissão distinta da luz das estrelas fixas e dos planetas a nós é uma prova de que o éter ou o meio celeste não é dotado de um poder de refração. O acontecimento, algumas vezes alegado, de que as estrelas fixas foram vistas algumas vezes pelos egípcios com uma cabeleira, tendo acontecido tão raramente, deve ser atribuído a uma acidental

refração das nuvens, assim como a radiação e cintilação das estrelas fixas devem ser atribuídas às refrações tanto dos olhos como do ar, pois acoplando-se um telescópio aos olhos essas radiações e cintilações imediatamente desaparecem. Pela trêmula agitação do ar e dos vapores ascendentes, acontece que os raios de luz são alternadamente desviados do estreito espaço da pupila do olho; mas tal fenômeno não ocorre na abertura mais larga da lente objetiva de um telescópio; daí que uma cintilação ocasionada no primeiro caso, cessa no último; e tal fim no último caso é uma prova da transmissão regular da luz através dos céus sem qualquer refração perceptível. Mas, para responder a uma objeção que pode ser feita tendo em vista a ausência de caudas em cometas que brilham com uma luz débil, como se os raios secundários fossem tão fracos a ponto de não afetar os olhos, e por esta razão as caudas das estrelas fixas não apareceriam, devemos levar em consideração que por meio de telescópios a luz das estrelas fixas pode ser aumentada acima de cem vezes e mesmo assim não se vêem caudas; que a luz dos planetas é mais abundante sem quaisquer caudas, mas que os cometas são vistos às vezes com grandes caudas quando a luz de suas cabeças está fraca e opaca; isso aconteceu no cometa do ano de 1680, quando no mês de dezembro pouco se equiparava em luz com estrelas de segunda magnitude, e mesmo assim emitia uma cauda notável, que se estendia por 40, 50, 60, 70 graus ou mais de comprimento; e, em seguida, nos dias 27 e 28 de janeiro, a cabeça apareceu apenas como uma estrela de sétima magnitude; mas a cauda (como dissemos acima), com uma luz claramente perceptível, ainda que fraca, estendia-se de 6 a 7 graus de comprimento, e com uma luz já mais fraca e difícil de ser ver, estendia-se a 12 graus ou mais. Mas em 9 e 10 de fevereiro, quando a cabeça não era mais visível a olho nu, eu vi através de um telescópio uma cauda de dois graus de comprimento. Mas, se a cauda era devida à refração da matéria celeste e de fato desviou-se da oposição ao sol, como a forma dos céus determina, aquele desvio, nos mesmos lugares dos céus, deveria ser sempre dirigido às mesmas partes: porém, o cometa do ano de 1680, em 28 de dezembro, às oito horas e meia da noite, em Londres, foi visto em Peixes, 8° 41', com latitude norte 28° 6', enquanto o sol estava em Capricórnio 18° 26'. E o cometa do ano de 1577, em 29 de dezembro, estava em Peixes 8° 41', com latitude norte 28° 40'; e o sol, como antes, estava ao redor de Capricórnio 18° 26'. Em ambos os casos a posição da Terra era a mesma, e o cometa apareceu no mesmo lugar dos céus, ainda que no primeiro caso a cauda do cometa (tanto pelas minhas observações como pelas dos outros) desviou da oposição do sol em direção ao norte por um ângulo de 4½ graus, enquanto no último caso ocorreu (de acordo com a observa-

ção de Tycho) um desvio de 21 graus em direção sul. Descartando-se, portanto, a refração dos céus, conclui-se que o fenômeno das caudas dos cometas deve ser explicado por alguma matéria refletora. Pelo que segue ficará claro que das atmosferas dos cometas surgem vapores suficientes para preencher tais vastos espaços.

68. Ar e vapores são extremamente raros em espaços celestes e uma pequena quantidade de vapor pode ser suficiente para explicar todos os fenômenos das caudas dos cometas.

É de conhecimento geral que o ar perto da superfície de nossa Terra possui um espaço cerca de 1200 vezes maior do que a água de mesmo peso e, portanto, uma coluna cilíndrica de ar com 1200 pés de altura tem o mesmo peso que um cilindro de água de mesma largura, mas de um pé de altura. Mas um cilindro de ar que alcance o topo da atmosfera tem peso igual a um cilindro de água de cerca de 33 pés de altura; portanto, se a parte inferior de 1200 pés for retirada do cilindro de ar, a parte superior restante terá o mesmo peso que um cilindro de água de 32 pés de altura. Logo, na altura de 1200 pés, ou dois *furlongs*, o peso do ar incumbente é menor, e conseqüentemente a rarefação do ar comprimido é maior, do que perto da superfície da Terra na razão de 33 para 32. E, admitindo-se esta razão, podemos calcular a rarefação do ar em quaisquer lugares (com o auxílio do Corolário, Proposição XXII, Livro II), supondo-se que a expansão seja inversamente proporcional à sua compressão; e esta proporção foi demonstrada pelos experimentos de Hooke e outros. O resultado do cálculo está exposto na tabela seguinte, em que na primeira coluna tem-se a altura do ar em milhas, sendo 4000 o semidiâmetro da Terra; na segunda coluna tem-se a compressão do ar, ou o peso incumbente; na terceira, sua rarefação ou expansão, supondo-se que a gravidade decresça inversamente como o quadrado das distâncias ao centro da Terra. Os numerais romanos são aqui usados para certos números de cifras, como 0,xvii 1224 para 0,000000000000000001224, e 26956xv para 26956000000000000000.

Mas por esta tabela constata-se que o ar, ao dirigir-se para cima, é rarefeito de tal maneira que uma esfera de ar que esteja mais próxima da Terra, de apenas uma polegada de diâmetro, se dilatada com aquela rarefação que teria na altura de um semidiâmetro da Terra, preencheria todas as regiões planetárias até a esfera de Saturno e mesmo bem além dela; e na altura de dez semidiâmetros da Terra preencheria mais espaço do que aque-

AR

Altura	Compressão	Expansão
0	33	1
5	17,8515	1,8486
10	9,6717	3,4151
20	2,852	11,571
40	0,2525	136,83
400	0,xvii 1224	26956 xv
4 000	0,cv 4465	73907 cii
40 000	0,cxcii 1628	20263 clxxxix
400 000	0,ccx7895	41798 ccvii
4 000 000	0,ccxii 9878	33414 ccix
Infinito	0, ccxii 6041	54622 ccix

le contido em todos os céus deste lado das estrelas fixas, de acordo com o cálculo anterior de suas distâncias. E mesmo que em decorrência da maior espessura das atmosferas dos cometas e da grande quantidade de força centrípeta circunsolar ocorra que o ar nos espaços celestes, e nas caudas dos cometas, não seja tão rarefeito, ainda por este cálculo fica claro que uma muito pequena quantidade de ar e vapor é suficiente para produzir todas as manifestações das caudas dos cometas; e esta notável rarefação é indicada pelo brilho das estrelas que passa através delas. A atmosfera da Terra, iluminada pela luz do sol, de apenas poucas milhas de extensão, obscurece e extingui a luz não somente de todas as estrelas, mas até da própria lua; por sua vez, as estrelas menores são vistas brilhando através da imensa espessura das caudas dos cometas, também iluminados pelo sol, sem a menor diminuição de seus esplendores.

69. De que forma as caudas podem surgir das atmosferas de suas cabeças.

Kepler atribui o surgimento das caudas dos cometas às atmosferas de suas cabeças, e suas direções rumo às partes opostas do sol à ação dos raios de luz que levam consigo a matéria das caudas dos cometas; e sem grandes incongruências podemos supor que, em tais espaços livres, uma matéria tão fina como aquela do éter pode ceder à ação dos raios de luz do sol, mesmo que estes raios não sejam capazes de mover sensivelmente as substâncias densas de nossas partes, que estão entrelaçadas com uma resistência bem considerável. Outro autor pensa que exista um tipo de partículas de matéria

dotadas de um princípio de leveza, do mesmo modo que outras são dotadas de um princípio de gravidade; que a matéria das caudas dos cometas sejam do primeiro tipo e que sua subida a partir do sol possa ser devido à sua leveza; mas, considerando-se que a gravidade dos corpos terrestres varia de acordo com a matéria dos corpos e, portanto, não pode ser nem maior nem menor tendo em vista a mesma quantidade de matéria, estou inclinado a acreditar que esta subida proceda da rarefação da matéria nas caudas dos cometas. A subida da fumaça numa chaminé é devida ao impulso do ar com o qual ela está enredada. O ar rarefeito pelo calor sobe, pois sua gravidade específica é diminuída, e ao subir carrega consigo a fumaça com a qual está unido. E por que a cauda de um cometa não poderia surgir do sol da mesma forma? Pois os raios do sol não atuam sobre os meios que eles penetram a não ser por reflexão e refração; e aquelas partículas refletoras aquecidas por esta ação aquecem a matéria do éter que as circunda. A matéria é rarefeita pelo calor que ela adquire, e como por esta rarefação a gravidade específica, com a qual antes tendia em direção ao sol, é diminuída, ela sobe como uma corrente carregando consigo as partículas refletoras que compõem a cauda do cometa; o impulso da luz do sol, como dissemos, produz esta subida.

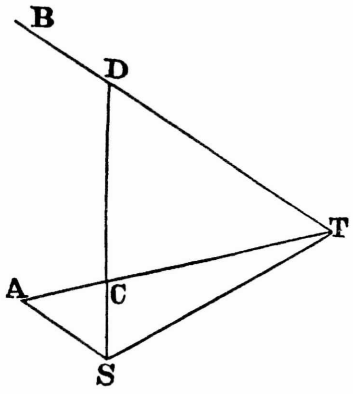
70. Que as caudas dos cometas originem-se dessas atmosferas é evidente pelas suas diversas aparências.

O fato de que as caudas dos cometas originem-se de suas cabeças, e tendam para as partes opostas ao sol, é também confirmado pelas leis que as caudas observam; pois, situando-se nos planos das órbitas dos cometas que passam pelo sol, elas constantemente desviam das partes opostas ao sol em direção àquelas partes que as cabeças dos cometas em seu progresso ao redor das órbitas deixaram para trás; e a um espectador situado naqueles planos elas aparecem nas partes diretamente opostas ao sol, mas à medida que o espectador afasta-se daqueles planos, seus desvios começam a aparecer e diariamente tornam-se maiores. E o desvio, o restante permanecendo igual, aparece menos quando a cauda está mais oblíqua em relação à órbita do cometa, assim como quando a cabeça do cometa chega mais perto do sol. Ademais, as caudas que não apresentam desvios aparecem retas, mas as caudas que desviam também se apresentam curvadas; e esta curvatura é maior quando o desvio é maior, sendo mais perceptível quando a cauda, o restante permanecendo igual, é mais longa; pois em caudas menores a curvatura

é pouco perceptível. E o ângulo de desvio é menor perto da cabeça do cometa, porém maior na outra extremidade da cauda, e isto porque o lado inferior da cauda volta-se para as partes em que o desvio é feito, o qual situa-se em uma linha reta traçada infinitamente do sol através da cabeça do cometa. E as caudas que são mais longas e largas, e brilham com uma luz mais forte, aparecem mais resplandecentes e mais exatamente definidas no lado convexo do que no côncavo. Logo, é evidente que os fenômenos das caudas dos cometas dependem do movimento de suas cabeças, e de modo algum dos lugares dos céus onde suas cabeças são vistas; e que, portanto, as caudas dos cometas não procedem da refração dos céus, mas de suas própria cabeças, as quais fornecem a matéria que forma a cauda; pois, assim como em nosso ar a fumaça de um corpo aquecido ascende perpendicularmente se o corpo está em repouso, ou obliquamente se o corpo move-se obliquamente, também nos céus, onde todos os corpos gravitam na direção do sol, a fumaça e o vapor (como já dissemos) ascendem do sol, e tanto sobem perpendicularmente, se o corpo fumegante estiver em repouso, como obliquamente, se o corpo, ao longo de seu movimento, estiver sempre deixando aqueles lugares dos quais as partes superiores e mais altas dos vapores haviam ascendido. E essa obliqüidade será menor onde o vapor ascende com maior velocidade, ou seja, perto do corpo fumegante, quando este estiver perto do sol, pois aí a força do sol pela qual o vapor ascende é mais forte. Mas como a obliqüidade varia, a coluna de vapor será encurvada; e como o vapor no lado precedente é mais recente, isto é, ascendeu mais tarde do corpo, ele será mais denso naquele lado, e deve portanto refletir mais luz, como também ser melhor definido, enquanto o vapor do outro lado esmorece aos poucos e desaparece.

71. *Que os cometas às vezes adentrem na órbita de Mercúrio é demonstrado por suas caudas.*

Mas não é nosso propósito atual explicar as causas dos fenômenos da Natureza. Sejam nossas afirmações acima falsas ou verdadeiras, nós ao menos constatamos, na exposição precedente, que os raios de luz são diretamente propagados a partir das caudas dos cometas em linhas retas através dos céus, nos quais essas caudas aparecem para os espectadores onde quer que estejam localizados; conseqüentemente, as caudas devem ascender das cabeças dos cometas em direção às partes opostas ao sol. E por este princípio podemos determinar novamente os limites de suas distâncias da seguinte maneira.



Faça S representar o sol, T a Terra, STA a elongação de um cometa a partir do sol, e ATB o comprimento aparente de sua cauda; e uma vez que a luz é propagada da extremidade da cauda em direção à linha reta TB, aquela extremidade deve situar-se em algum lugar da linha TB. Suponha que seja em D, e una DS cortando TA em C. Então, como a cauda está sempre estendida em direção àquelas partes opostas ao sol, e, portanto, o sol, a cabeça do cometa e a extremidade da cauda situam-se em uma linha reta, a cabeça do cometa será encontrada em C. Paralela a TB trace SA, encontrando TA em A, e a cabeça do cometa C deve necessariamente ser encontrada entre T e A, porque a extremidade da cauda situa-se em algum lugar da linha infinita TB; e todas as linhas SD que podem ser traçadas do ponto S à linha TB devem cortar a linha TA em algum lugar entre T e A. Portanto, a distância do cometa à Terra não pode exceder o intervalo TA, nem sua distância ao sol pode ir além do intervalo SA, ou ST além do sol. Assim, a elongação do cometa de 1680 ao sol, em 12 de dezembro, era de 9°, e o comprimento de sua cauda de pelo menos 35°. Se, portanto, um triângulo TSA for feito, cujo ângulo T é igual à elongação de 9°, e o ângulo A for igual a ATB, ou ao comprimento da cauda, 35°, então SA estará para ST, isto é, o limite da maior distância possível do cometa ao sol para o semidiâmetro da órbita da Terra, como o seno do ângulo T está para o seno do ângulo A, isto é, como em torno de 3 para 11. Logo, o cometa naquele instante estava menos distante do sol do que $\frac{3}{11}$ da distância da Terra ao sol. Por conseguinte, ou estava dentro da órbita de Mercúrio ou entre esta órbita e a Terra. Novamente, em 21 de dezembro, a elongação do cometa ao sol era $32\frac{2}{3}$°, e o comprimento da cauda 70°. Portanto, como o seno de $32\frac{2}{3}$° está para o seno de 70°, isto é, como 4 está para 7, tal era o limite da distância do cometa ao sol para a distância da Terra ao sol, e conseqüentemente o cometa não tinha ainda saído da órbita de Vênus. Em 28 de dezembro, a elongação do cometa ao sol era de 55°, e o comprimento da cauda 56°; portanto, o limite da distância do cometa ao sol ainda não era igual à distância da Terra ao mesmo e conseqüentemente o cometa ainda não ultrapassara a órbita da Terra. Mas por sua paralaxe concluímos que seu egresso da órbita aconteceu em torno de 5 de janeiro e que também ele atingira a órbita de Mercúrio. Suponhamos que estivesse em seu periélio em 8 de dezembro, quando em conjunção com o sol; logo, na jornada entre

seu periélio e a saída da órbita da Terra ele despendeu 28 dias; portanto, nos 26 ou 27 dias seguintes, quando deixou de ser visível a olho nu, ele há pouco dobrara sua distância ao sol; e, ao limitarmos as distâncias dos outros cometas pelos mesmos argumentos, concluímos por fim que todos os cometas, durante o tempo em que são visíveis a nós, estão dentro do compasso de um espaço esférico descrito ao redor do sol como centro, com um raio duplo, ou quanto muito triplo, da distância da Terra ao sol.

72. Os cometas movem-se em seções cônicas que têm um foco no centro do sol e por seus raios traçados até este centro descrevem áreas proporcionais aos tempos.

Daí decorre que os cometas, durante todo o tempo que aparecem a nós, estando dentro da esfera de ação da força circunsolar, e portanto agitados pelo impulso desta força, mover-se-ão (pelo Corolário I, Proposição XIII, Livro I, pelas mesmas razões que os planetas) em seções cônicas que têm um foco no centro do sol e, por raios traçados até o sol, descrevem áreas proporcionais aos tempos; pois aquela força é propagada a uma distância imensa e governa os movimentos de corpos muito além da órbita de Saturno.

73. Estas seções cônicas assemelham-se a parábolas. Isto é deduzido a partir das velocidades dos cometas.

Há três hipóteses sobre os cometas; para alguns eles são gerados e perecem assim como aparecem e desaparecem; para outros, eles provêm das regiões das estrelas fixas e são vistos por nós quando passam pelas regiões dos planetas; finalmente, outros consideram que eles são corpos que continuamente giram ao redor do sol em órbitas muito excêntricas. No primeiro caso, os cometas, conforme suas diferentes velocidades, movem-se em seções cônicas de todos os tipos; no segundo caso, eles descreverão hipérboles; nestes dois primeiros casos, os cometas freqüentarão indiferentemente todos as regiões dos céus, assim como aquelas ao redor dos pólos e aquelas na direção da eclíptica; no terceiro caso, seus movimentos serão realizados em elipses muito excêntricas e semelhantes a parábolas. Mas (se a lei dos planetas for observada) suas órbitas não declinarão muito do plano da eclíptica e, pelo que pude observar até agora, o terceiro caso prevalece, pois os cometas, de fato, geralmente freqüentam o zodíaco e raramente atingem uma latitude heliocêntrica de 40°. E que eles se movem em órbitas quase parabó-

licas, eu deduzo de suas velocidades; pois a velocidade com que uma parábola é descrita sempre está para a velocidade com a qual um cometa ou planeta pode girar ao redor do sol em um círculo a mesma distância na razão de $\sqrt{2}$ para 1 (pelo Corolário VII, Proposição XVI, Livro I); e, pelos meus cálculos, a velocidade dos cometas é geralmente a mesma. Eu examinei estes fatos inferindo sucessivamente as velocidades a partir das distâncias e as distâncias a partir das paralaxes e do fenômeno das caudas, e nunca encontrei erros de excesso ou falta nas velocidades maiores do que poderia ter ocorrido a partir dos erros nas distâncias calculadas desta maneira. Mas eu também recorri ao raciocínio que segue.

74. A duração do tempo em que os cometas, descrevendo órbitas parabólicas, atravessam a esfera da órbita da Terra.

Supondo-se que o raio da órbita da Terra seja dividido em 1000 partes e que os números da primeira coluna da tabela 1 representem a distância do vértice da parábola ao centro do sol, expressa por aquelas partes; e que um cometa nos tempos expressos na segunda coluna passasse de seu periélio à superfície da esfera que é descrita ao redor do sol como um centro com raio da órbita da Terra; e que nos tempos expressos nas colunas 3, 4 e 5, ele irá dobrar, triplicar e quadruplicar sua distância ao sol.

Tabela 1

A distância do periélio do cometa ao centro do sol	O tempo da passagem do cometa de seu periélio à distância ao sol igual ao											
	Raio da órbita da Terra			Seu dobro			Seu triplo			Seu quádruplo		
	d	*h*	*m*	*d*	*h*	*m*	*d*	*h*	*m*	*d*	*h*	*m*
0	27	11	12	77	16	28	142	17	14	219	17	30
5	27	16	07	77	23	14						
10	27	21	00	78	06	24						
20	28	06	40	78	20	13	144	03	19	221	08	54
40	29	01	32	79	23	34						
80	30	13	25	82	04	56						
160	33	05	29	86	10	26	153	16	08	232	12	20
320	37	13	46	93	23	38						
640	37	09	49	105	01	28						
1280				106	06	35	200	06	43	297	03	46
2560							147	22	31	300	06	03

O tempo do ingresso de um cometa na esfera da órbita da Terra, ou de seu egresso da mesma, pode ser deduzido de sua paralaxe, porém mais facilmente com a tabela seguinte.

Tabela 2

Elongação aparente de um cometa ao sol	Seu movimento aparente diurno em sua própria órbita		Sua distância à Terra em partes, das quais o raio da órbita da Terra contém 1000
	Direto	Regressivo	
60°	2° 18'	00° 20'	1000
65	2 33	00 35	845
70	2 55	00 57	684
72	3 07	01 09	618
74	3 23	01 25	551
76	3 43	01 45	484
78	4 10	02 12	416
80	4 57	02 49	347
82	5 45	03 47	278
84	7 18	05 20	209
86	10 27	08 19	140
88	18 37	16 39	70
90	Infinito	Infinito	00

75. A velocidade com a qual os cometas de 1680 passaram através da esfera da órbita da Terra.

O ingresso de um cometa na esfera da órbita da Terra, ou seu egresso da mesma, ocorre no momento de sua elongação ao sol, expressa na coluna 1, em oposição ao seu movimento diurno. Logo, no cometa de 4 de janeiro de 1681, o movimento diurno aparente em sua órbita era de cerca de 3° 5', e a elongação correspondente 71⅔°; e o cometa adquiriu esta elongação ao sol em 4 de janeiro por volta das seis da tarde. Novamente, no ano de 1680, a 11 de novembro, o movimento diurno do cometa que então apareceu era de cerca de 4⅔°; e a elongação correspondente de 79⅔ ocorreu em 10 de novembro, pouco antes da meia-noite. Nesses instantes mencionados os cometas estavam a uma igual distância ao sol com relação à Terra, e a Terra estava então quase em seu periélio. Mas a primeira tabela está adaptada à distância média da Terra ao sol pressuposta de 1000 partes; e esta distância é maior por um excesso de espaço como o que a Terra pode descre-

ver por seu movimento anual no intervalo de um dia, ou o cometa por seu movimento em dezesseis horas. Para reduzir o cometa a esta distância média de 1000 partes, acrescentamos 16 horas ao primeiro tempo e subtraímos do último; então, o primeiro torna-se 4^d 10^h da tarde de janeiro; o último, por volta das seis da manhã, de 10 de novembro. Mas pelo curso e progresso dos movimentos diurnos ocorre que ambos cometas estavam em conjunção com o sol entre 7 e 8 de dezembro; e daí até 4^d 10^h da tarde de janeiro, em um lado, e 10^d 6^h da manhã de novembro, no outro, passaram-se cerca de 28 dias. Logo, os movimentos em órbitas parabólicas requerem tal número de dias (pela tabela 1).

76. Estes cometas não eram dois, mas apenas um; determina-se com maior precisão em que órbita e com que velocidade o cometa atravessava os céus.

Mas ainda que tenhamos considerado aqueles cometas como dois, contudo, devido à coincidência de seus periélios e à concordância de suas velocidades, é provável que de fato eles fossem o mesmo; neste sentido, a órbita do cometa ou seria uma parábola, ou ao menos uma seção cônica que pouco difere de uma parábola e está, em seu vértice, quase em contato com o sol. Pois (pela tabela 2) a distância do cometa à Terra, em 10 de novembro, era de 360 partes, e em 4 de janeiro de 630. Destas distâncias, juntamente com suas longitudes e latitudes, deduzimos que a distância dos lugares onde o cometa estava naqueles momentos era cerca de 280: a metade disto, ou seja, 140, é uma ordenada da órbita do cometa, cortando uma porção de seu eixo aproximadamente igual ao raio da órbita da Terra, ou seja, a 1000 partes. E, portanto, dividindo-se o quadrado da ordenada, 140, por 1000, o segmento do eixo, encontramos o *latus rectum* de 19,6, ou em números redondos, 20; a quarta parte disto, 5, é a distância do vértice da órbita ao centro do sol. Mas o tempo correspondente à distância de 5 partes na tabela 1 é 27^d 16^h 7^m. Neste tempo, se o cometa se movesse em uma órbita parabólica, ele seria deslocado de seu periélio para a superfície da esfera da órbita da Terra descrita com raio 1000 e teria gasto o dobro do tempo, 55^d $8\frac{1}{4}^h$, no curso completo de seu movimento naquela esfera, o que de fato ocorreu; pois de 10^d 6^h da manhã de novembro, tempo do ingresso do cometa na esfera da órbita da Terra, até o 4^d 10^h da tarde de janeiro, tempo de egresso da mesma, transcorreram 55^d 16^h. A pequena diferença de $7\frac{3}{4}^h$ neste cálculo grosseiro pode ser desprezada, e talvez decorra do fato de o movimento do cometa ser lento, como deveria ser caso a verdadeira órbita em que se

deslocava fosse uma elipse. O tempo médio entre seu ingresso e egresso era 8^d 2^h de dezembro, pela manhã; e, portanto, neste tempo o cometa deveria estar em seu periélio. Justamente neste dia, pouco antes do nascer do sol, o Dr. Halley (como dissemos) viu a cauda curta e larga, mas muito brilhante, levantar-se perpendicularmente do horizonte. Da posição da cauda é certo que o cometa tinha atravessado a eclíptica, entrando em latitude norte e, portanto, passara seu periélio, que situava-se no outro lado da eclíptica, ainda que não tivesse entrado em conjunção com o sol; e o cometa, estando neste tempo entre seu periélio e sua conjunção com o sol, deve ter estado em seu periélio poucas horas antes; pois em tão pouca distância do sol, ele deve ter sido carregado com grande velocidade, descrevendo aparentemente quase meio grau a cada hora.

77. É demonstrado com exemplos adicionais com que velocidade os cometas se movem.

Por cálculos semelhantes descobri que o cometa de 1618 entrou na esfera da órbita da Terra em 7 de dezembro ao pôr-do-sol, mas sua conjunção com o sol ocorreu em 9 ou 10 de novembro, com cerca de 28 dias de intervalo, como no caso do cometa precedente; pois, pelo tamanho de sua cauda, igual à do cometa anterior, é provável que também tenha entrado quase em contato com o sol. Quatro cometas foram vistos naquele ano, sendo este o último. O segundo, que apareceu pela primeira vez em 31 de outubro, nas proximidades do sol nascente, sendo logo depois encoberto pelos raios do sol, eu suspeito que era o mesmo que o quarto, que emergiu dos raios do sol em 9 de novembro. A estes podemos acrescentar o cometa de 1607, que entrou na esfera da órbita da Terra em 14 de setembro e atingiu sua distância periélica ao sol em 19 de outubro, com cerca de 35 dias de intervalo. Sua distância periélica subtendia um ângulo aparente na Terra de 23 graus e era, portanto, de 390 partes. E a este número de partes correspondem cerca de 34 dias na tabela 1. Ademais, o cometa de 1665 entrou na esfera da órbita da Terra em 17 de março e atingiu seu periélio em 16 de abril, com intervalo de 30 dias. Sua distância periélica subtendia um ângulo na Terra de cerca de sete graus e, portanto, era de 122 partes; e correspondendo a este número de partes, na tabela 1 encontramos 30 dias. O cometa de 1682 entrou na esfera da órbita da Terra em 11 de agosto e atingiu seu periélio em 16 de setembro, estando então distante do sol cerca de 350 partes, às quais, na tabela 1, correspondem a 33½ dias. Por fim, o memorável

cometa de Johann Müller, que em 1472 era levado pelas partes circumpolares de nosso hemisfério norte com tal rapidez a ponto de descrever um ângulo de 40 graus em um dia, entrou na esfera da órbita da Terra em 21 de janeiro, no momento em que passava pelo pólo, e deslocando-se então para o sol, foi encoberto por seus raios ao redor do fim de fevereiro; daí que é provável que 30 dias ou mais foram gastos entre seu ingresso na esfera da órbita da Terra e seu periélio. Este cometa não se moveu com maior velocidade do que os outros cometas, mas a grandeza de sua velocidade aparente foi devida ao fato de ele ter passado pela Terra a pouca distância.

78. Propõe-se determinar as órbitas dos cometas.

Parece, então, que a velocidade dos cometas, na medida em que pode ser calculada por esses cálculos grosseiros, é a mesma velocidade com que parábolas, ou elipses semelhantes a parábolas, devem ser descritas; e, portanto, a distância entre um cometa e o sol sendo dada, a velocidade do cometa também é aproximadamente dada. E daí decorre este Problema.

Problema

A relação entre a velocidade de um cometa e sua distância ao centro do sol sendo dada, pede-se a órbita do cometa.

Se este problema for resolvido, teremos um método para determinar com a maior precisão as órbitas dos cometas, pois se esta relação for suposta duas vezes, sendo a órbita duas vezes calculada, e o erro de cada órbita determinado por observações, a suposição pode ser corrigida pela regra da *posição* falsa, e uma terceira órbita será então encontrada, concordando precisamente com as observações. E ao se determinar as órbitas dos cometas por este método, chegaremos a um melhor conhecimento das partes pelas quais esses corpos viajam, das velocidades com que são levados, que tipo de órbitas descrevem, e as verdadeiras magnitudes e formas de suas caudas de acordo com as várias distâncias de suas cabeças ao sol; se, após certos intervalos de tempo, os mesmos cometas retornam novamente, e em que períodos eles completam suas várias revoluções. Mas o problema deve ser resolvido determinando-se, em primeiro lugar, o movimento horário de um cometa em um dado tempo, a partir de três ou mais observações, derivan-

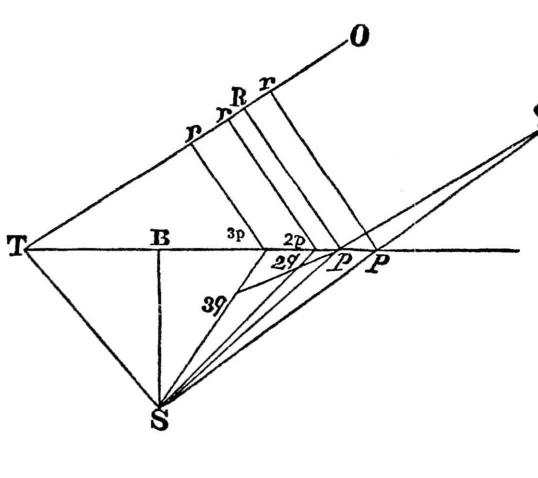
do-se então a órbita a partir deste movimento. Nesse sentido, a determinação da órbita, dependendo de uma observação, e de seu movimento horário no momento desta observação, será confirmada ou rejeitada, pois a conclusão que é extraída de um movimento de apenas uma ou duas horas e de uma falsa hipótese nunca concordará com os movimentos dos cometas do início ao fim. O método do cálculo completo é o seguinte.

Lema I

Cortar duas linhas retas OR e TP, dadas em posição, por uma terceira linha reta RP, de modo que TRP seja um ângulo reto; e, se outra linha reta SP é traçada a qualquer ponto dado S, o produto obtido ao multiplicar-se esta linha SP pelo quadrado da linha reta OR terminada em um ponto dado O será uma dada magnitude.

Graficamente isto é feito da seguinte maneira. Seja a magnitude dada do produto $M^2 . N$; a partir de qualquer ponto *r* da linha reta OR levante a perpendicular *rp* encontrando TP em *p*. Então, através do ponto S*p* trace a linha S*q* igual a $\frac{M^2 . N}{Or^2}$. De maneira semelhante trace três ou mais linhas retas S2*q*, S3*q* etc.; e uma linha regular *q*2*q*3*q*, traçada através de todos os pontos *q*2*q*3*q* etc., irá cortar a linha reta TP no ponto P, do qual a perpendicular PR deve partir. Q.E.F.

Por trigonometria isto é feito assim. Assumindo a linha reta TP, como determinada pelo método precedente, as perpendiculares TR e SB, nos triângulos TPR e TPS, serão dadas; e o lado SP no triângulo SBP, assim



como o erro $\frac{M^2 . N}{OR^2}$ - SP. Faça este erro, designado D, estar para um novo erro, designado E, como o erro $2p2q \pm 3p3q$ está para o erro $2p3p$; ou como o erro $2p2q \pm$ D está para o erro $2p$P; e este novo erro adicionado ou subtraído do comprimento TP resultará no comprimento correto TP ± E. O exame da figura mostrará se devemos adicionar ou subtrair; e se posteriormente houver necessidade de nova correção, a operação pode ser repetida.

Por aritmética é feito assim. Supondo-se o que foi feito acima, faça TP + e ser o comprimento correto da linha reta TP como encontrada por delineação; logo, os comprimentos corretos das linhas OR, BP e SP serão OR - $\frac{TR}{TP}$ e, BP + e, e

$$\sqrt{(SP^2 + 2BPe + ee)} = \frac{M^2N}{OR^2 + \frac{2OR . TR}{TP} e + \frac{TR^2}{TP^2} ee}$$

Logo, pelo método das séries convergentes, temos:

$$SP + \frac{BP}{SP} e + \frac{SB^2}{2SP^2} ee, \text{ etc.}, = \frac{M^2N}{OR^2} + \frac{2TR}{TP} \cdot \frac{M^2N}{OR^3} e + \frac{3TR^2}{TP^2} \cdot \frac{M^2N}{OR^4} ee, \text{ etc.}$$

Para os coeficientes dados

$$\frac{M^2N}{OR^2} - SP, \frac{2TR}{TP} \cdot \frac{M^2N}{OR^3} - \frac{BP}{SP}, \frac{3TR^2}{TP^2} \cdot \frac{M^2N}{OR^4} - \frac{SB^2}{2SP^3},$$

colocando-se F, $\frac{F}{G}$, $\frac{F}{GH}$, e observando com atenção os sinais, encontramos

$$F + \frac{F}{G} e + \frac{F}{GH} ee = o \text{ , e } e + \frac{ee}{H} = - G .$$

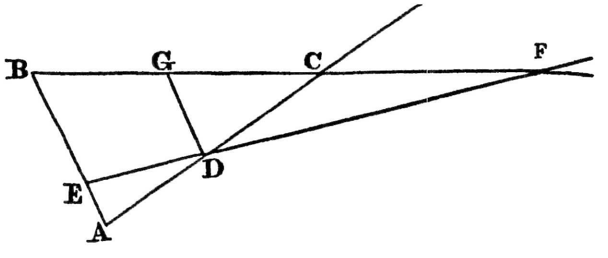
Logo, negligenciando o pequeno termo $\frac{e^2}{H}$, e torna-se igual a –G. Se o erro $\frac{e^2}{H}$ não for desprezível, considere -G - $\frac{G^2}{H} = e$.

Deve-se observar que aqui está sugerido um método geral para resolver o mais intrincado tipo de problemas, tanto por trigonometria como por

aritmética, sem aqueles cálculos e resoluções complicados de tais equações que foram usados até agora.

LEMA II

Cortar três linhas retas dadas em posição por uma quarta linha reta que deve passar através de um ponto marcado em qualquer uma das três, e de uma maneira tal que suas partes interceptadas estejam em uma dada razão entre si.



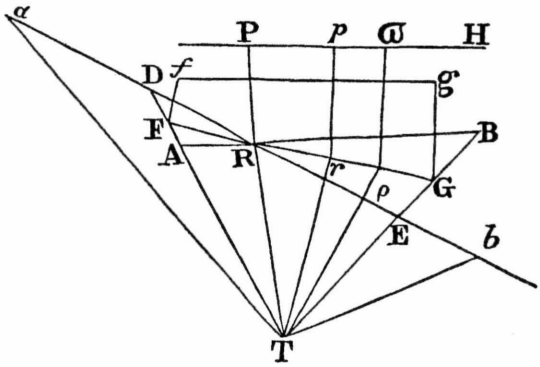
Sejam AB, AC e BC as linhas retas dadas em posição, e suponha que D seja o ponto dado na linha AC. Paralelo a AB trace DG encontrando BC em G; e tomando GF para BG em uma dada razão, trace FDE; e FD estará para DE como FG para BG. Q.E.F.

Por trigonometria é feito assim. No triângulo CGD todos os ângulos e o lado CD são dados, e a partir daí os lados remanescentes são determinados; e a partir das razões dadas as linhas GF e BE também são dadas.

LEMA III

Encontrar e representar graficamente o movimento horário de um cometa em qualquer tempo dado.

A partir de observações da maior confiança, faça com que três longitudes do cometa sejam dadas e, supondo-se ATR e RTB suas diferenças, pede-se o movimento horário requerido no momento da observação média TR. Pelo Lema II, trace a linha reta ARB, de modo que suas partes interceptadas AR e RB estejam como os tempos entre as observações; e se supormos que um corpo no tempo total descreva toda a linha AB com um movimento igual, e que no meio tempo seja visto a partir do lugar T, o movimento apa-



rente daquele corpo em torno do ponto R será aproximadamente como aquele do cometa no tempo de observação TR.

O mesmo procedimento de forma mais precisa.

Sejam T*a* e T*b* as duas longitudes dadas a uma maior distância de um lado e de outro, pelo Lema II trace a linha reta *a*R*b* de modo que suas partes interceptadas *a*R e R*b* possam ser como os tempos entre as observações *a*TR e RT*b*. Suponha que isto corte as linhas TA e TB em D e E; e uma vez que o erro da inclinação TR*a* aumenta aproximadamente como o quadrado do tempo entre as observações, trace FRG de modo que o ângulo DRF possa estar para o ângulo ARF, ou a linha DF para a linha AF, como o quadrado da razão do tempo total entre as observações *a*TB para o tempo total entre as observações ATB, e use a linha então encontrada FG no lugar da linha AB encontrada acima.

É conveniente que os ângulos ATR, RTB, *a*TA e BT*b* não sejam menores do que dez ou quinze graus, que os tempos correspondentes não sejam maiores do que oito ou doze dias, e que as longitudes sejam tomadas quando o cometa move-se com a maior velocidade; pois assim os erros das observações irão guardar uma menor razão com as diferenças das longitudes.

Lema IV

Determinar as longitudes de um cometa em quaisquer tempos dados.

Isto é feito tomando-se na linha FG as distâncias R*r*, Rρ, proporcionais aos tempos, e traçando as linhas T*r*, Tρ. O modo de se trabalhar por trigonometria torna-se evidente.

Lema V

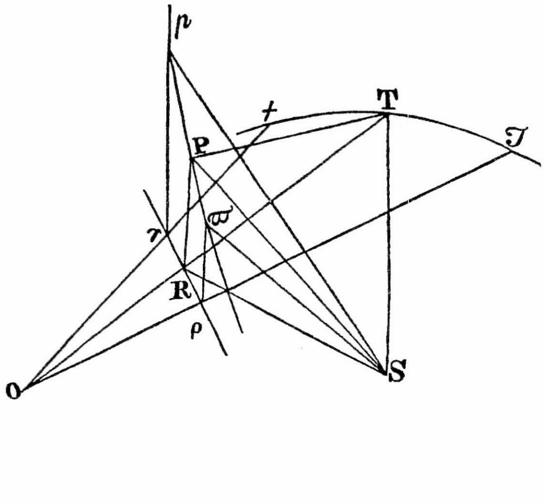
Determinar as latitudes.

Em TF, TR e TG, como raios, em ângulos retos levante F*f*, RP e G*g*, tangentes das latitudes observadas; e paralelo a *fg* trace PH. As perpendiculares *rp* e ρϖ̃, encontrando PH, serão as tangentes das latitudes procuradas para T*r* e Tρ como raios.

Problema I

A partir da razão pressuposta da velocidade determinar a órbita do cometa.

Faça S representar o sol; *t*, T, τ, três lugares da Terra em sua órbita a distâncias iguais; *p*, P, ϖ̃, os lugares correspondentes do cometa em sua órbita, de modo que as distâncias interpostas entre cada lugar possam corresponder ao movimento de uma hora; *pr*, PR, ϖ̃ρ, perpendiculares que incidem no plano da eclíptica, e *r*Rr o vestígio da órbita neste plano. Una S*p*, SP, Sϖ̃, SR, ST, *tr*, TR, τρ, TP, e faça *tr* e τρ encontrarem-se em O, TR irá aproximadamente convergir para o mesmo ponto O, ou o erro será desprezível. Pelos Lemas supostos, os ângulos *r*OR, ROρ são dados, assim como as razões *pr* para *tr*, PR para TR, e ϖ̃ρ para τρ. A figura *t*TτO também é dada em magnitude e posição, juntamente com a distância ST, e os ângulos STR, PTR, STP. Vamos assumir que a velocidade do cometa no lugar P esteja para a velocidade de um planeta que gira ao redor do sol em um círculo, a uma mesma distância SP, como V está para 1, e teremos uma linha *p*Pϖ̃ a ser determi-



nada, na condição de que o espaço $p\varpi$, descrito pelo cometa em duas horas, possa estar para o espaço $V \cdot t\pi$ (isto é, para o espaço que a Terra descreve no mesmo tempo multiplicado pelo número V) como a raiz quadrada da razão de ST, a distância da Terra ao sol, para SP, a distância do cometa ao sol; e que o espaço pP, descrito pelo cometa na primeira hora, possa estar para o espaço $P\varpi$, descrito pelo cometa na segunda hora, como a velocidade em p está para a velocidade em P; isto é, como a raiz quadrada da distância SP para a distância Sp, ou na razão de $2Sp$ para $SP + Sp$; pois neste trabalho eu negligencio pequenas frações que produzem apenas erros desprezíveis.

Em primeiro lugar, como matemáticos, na resolução de tais equações, é preciso, como primeiro passo, pressupor a raiz por conjectura; logo, nesta operação analítica, eu estimo a distância procurada TR o melhor que posso por conjectura. Então, pelo Lema II eu traço $r\rho$, primeiro supondo rR igual a $R\rho$, de modo que (depois que a razão de SP para Sp for descoberta) rR esteja para Rr como 2SP está para $SP + Sp$, e encontro as razões das linhas $p\varpi$, $r\rho$, e OR, uma para a outra. Faça M estar para $V \cdot t\pi$ como OR para $p\varpi$; e como o quadrado de $p\varpi$ está para o quadrado de $V \cdot t\pi$ como ST está para SP, teremos OR^2 para M^2 como ST para SP e, portanto, o produto $OR^2 \cdot SP$ igual ao produto dado $M^2 \cdot ST$; logo (supondo-se os triângulos STP e PTR agora situados no mesmo plano) TR, TP, SP, PR serão dados, pelo Lema I. Tudo isto eu faço de início graficamente de uma forma rápida e grosseira; então por um novo gráfico mais cuidadoso; e, finalmente, por cálculo aritmético. Em seguida, passo a determinar a posição das linhas $r\rho$, $p\varpi$ com a maior precisão possível, juntamente com os nós e a inclinação do plano $Sp\varpi$ para o plano da eclíptica; e nesse plano $Sp\varpi$ eu descrevo a órbita na qual um corpo que deixe o lugar P em direção à linha reta dada $p\varpi$ seja carregado com uma velocidade que está para a velocidade da Terra como $p\varpi$ para $V \cdot t\pi$. Q.E.F.

PROBLEMA II

Corrigir a razão pressuposta da velocidade e a órbita assim encontradas.

Tome uma observação do cometa perto do fim de sua aparição, ou qualquer outra a uma grande distância das observações usadas anteriormente, e encontre a interseção de uma linha reta traçada ao cometa, naquela observação com o plano $Sp\varpi$, assim como o lugar do cometa em sua órbita no momento da observação. Se aquela interseção ocorrer nesse lugar, é uma prova de que a órbita foi corretamente determinada; caso contrário, um

novo número V deve ser pressuposto e uma nova órbita encontrada; e então o lugar do cometa nesta órbita no momento da observação probatória e a interseção de uma linha reta traçada até o cometa com o plano da órbita, deverão ser determinados como antes; e comparando-se a variação do erro com a variação das outras quantidades, podemos concluir, por uma Regra de Três, o quanto aquelas outras quantidades deveriam ser alteradas ou corrigidas, a fim de que o erro seja o menor possível. E por meio destas correções obteremos a órbita com precisão, desde que as observações sobre as quais o cálculo se apóia sejam exatas e que não tenhamos errado de muito na suposição do número V; pois se isto aconteceu, a operação deve ser repetida até que a órbita seja determinada o mais precisamente possível. Q.E.F.

[FINAL DO SISTEMA DO MUNDO.]

» APÊNDICE HISTÓRICO E EXPLICATIVO

por Florian Cajori

1. Livro II, Proposição II. *Resistência proporcional à velocidade.* Se, para os sucessivos intervalos iguais de tempo, as velocidades são v_1, v_2, v_3, v_4 etc., e as resistências são cv_1, cv_2, cv_3, cv_4 etc., então, $v_2 = v_1 - cv_1$, $v_3 = v_2 - cv_2$, $v_4 = v_3 - cv_3$ etc. Portanto,

$$1 : c = v_1 : v_1 - v_2 = v_2 : v_2 - v_3 = v_3 : v_3 - v_4 = \text{etc.},$$

e pelo Lema I, Livro II,

$$v_1 : v_2 = v_2 : v_3 = v_3 : v_4 = \text{etc.},$$

e

$$v_1 : v_3 = v_1v_2 : v_2v_3 = 1 : c^2,\ v_1 : v_4 = v_1v_2v_3 : v_2v_3v_4 = 1 : c^3, \text{ etc.}$$

Também,

$$v_2 = v_1(1 - c),\ v_3 = v_1(1 - c)^2, \ldots, v_{n+1} = v_1(1 - c)^n.$$

2. Livro II, Proposição VII. *Resistência de esferas.* Seja V a velocidade inicial de um corpo e v sua velocidade subseqüente. Seja também R a resistência inicial, r sua resistência subseqüente e t o tempo. Para um segundo corpo, sejam os símbolos correspondentes V_1, v_1, R_1, r_1 e t_1. Por suposição,

$$V^2 : v^2 = R : r$$

$$V_1^2 : v_1^2 = R_1 : r_1$$

$$t : t_1 = \frac{V}{R} : \frac{V_1}{R_1} \cdot$$

Assim a perda de velocidade, -dv, do primeiro corpo no tempo dt, é

$$-dv = rdt = \frac{Rv^2}{V^2}\,dt.$$

Dividindo por v^2 e integrando,

$$v^{-1} = \frac{R}{V^2}\,t + c.$$

Quando t = 0, v = V; portanto, $C = V^{-1}$.

Simplificando,

$$v = \frac{V^2}{Rt + V}.$$

Portanto, a perda de velocidade é,

$$V - v = \frac{VRt}{Rt + V}.$$

Para o segundo corpo,

$$V_1 - v_1 = \frac{V_1R_1t_1}{R_1t_1 + V_1} = \frac{V_1Rt}{Rt + V}.$$

Portanto, as perdas em velocidades dos dois corpos nos tempos t e t_1 estão uma para a outra assim como suas velocidades iniciais V e V_1.

Para provar a segunda parte, relacionada aos espaços s, use o valor dado acima para v, em ds = vdt; integrando,

$$s = \frac{V^2}{R}\,\{\log\,(Rt + V) - \log V\}.$$

Escrevendo a fórmula correspondente para o segundo corpo e simplificando, obtemos

$$s : s_1 = Vt : V_1t_1.$$ Q.E.D.

3. Livro II, Lema II. *Infinitesimais fixas.* Para o benefício dos leitores interessados na história do cálculo na Inglaterra, cito certas partes do artigo de Augustus De Morgan, "On the early history of infinitesimals in England," publicado *Philosophical Magazine,* ser. 4, vol. 4, 1852, pp. 321-330. De Morgan prova que nos primeiros artigos de Newton e na primeira edição do *Principia,* são usadas livremente quantidades infinitamente pequenas (isto é, infinitesimais fixas): "Até o ano de 1704 e no que diz respeito ao cálculo algébrico, o próprio Newton utilizou quantidades infinitamente pequenas e nada mais em qualquer documento já publicado. As razões primeira e última, ou limites, aparecem no *Principia,* mas são abandonadas naqueles lugares onde se faz alusão às fluxões. Prossigo para estabelecer estas asserções detalhadamente." Admito como premissa que uma fluxão, como usada por Newton, é uma *velocidade,* ou derivada temporal. A fluxão que Newton denotava como $\dot{x}$ é hoje em dia escrita como $\frac{dx}{dt}$.

Nos *Principia* não ocorre a notação com ponto para as fluxões. Cito ainda De Morgan: "Na primeira edição dos *Principia* (1687) a descrição das fluxões é baseada em infini-

tesimais e na segunda edição (1713) esta base é alterada de alguma forma. Na primeira edição, momentos são *quantidades infinitamente pequenas*; na segunda, não é claro o que mais eles são. Como no seguinte extrato da primeira edição, com seu substituto na segunda:

PRIMEIRA EDIÇÃO (Livro II, Lema II)
"Cave tamen intellexeris particulas finitas. *Momenta, quam primum finitae sunt magnitudinis, desinunt esse momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento.* Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum."

SEGUNDA EDIÇÃO (idem)
"Cave tamen intellexeris particulas finitas. *Particulae finitae non sunt momenta sed quantitates ipsae ex momentis genitae.* Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum."

Apresento as seguintes traduções:

Mas deve-se tomar cuidado de não considerar como tais as partículas finitas. Os momentos deixam de ser momentos tão logo sejam uma grandeza finita. Dar limites finitos é de certa forma contrário a seus contínuos aumentos ou diminuições. Devemos concebê-los como os princípios nascentes de grandezas finitas.

Mas deve-se tomar cuidado de não considerar como tais as partículas finitas. As partículas finitas não são momentos, mas as próprias quantidades geradas pelos momentos. Devemos concebê-los como os princípios nascentes de grandezas finitas.

De Morgan comenta: "Mesmo através da dificuldade das frases em ambos extratos percebe-se muito claramente, que na primeira edição os momentos, ou incrementos momentâneos, são quantidades infinitamente pequenas, afirmo que... Newton começou com o sistema infinitesimal numa forma tão absoluta quanto Leibniz, no que diz respeito às quantidades infinitamente pequenas da primeira ordem. Além destas, ele não foi. E a distinção inicial entre os sistemas dos dois é, que Newton, mantendo o conceito de velocidade ou fluxões, utilizou o incremento infinitamente pequeno como uma maneira de determiná-la, enquanto que com Leibniz a relação dos incrementos infinitamente pequenos é ela própria o objeto de determinação."
Em 1704 apareceu a *Quadratura curvarum* de Newton, com uma Introdução explicando os fundamentos das fluxões. Aqui Newton tentou evitar o uso de constantes infinitamente pequenas. Notamos nesta publicação o marco dos esforços de Newton para colocar a doutrina das fluxões numa base totalmente lógica. Ele disse, "Não devem ser desprezados os menores erros em assuntos matemáticos." De Morgan enfatiza: "Em

1704 na *Quadratura curvarum*, Newton renunciou e abjurou a quantidade infinitamente pequena, mas o fez de uma maneira que nos levaria a supor que nunca a aceitou."[1] Nas três edições do *Principia* que apareceram durante a vida de Newton, são desprezadas as quantidades que são infinitamente pequenas em comparação com outras. Ver, por exemplo, Livro I, Proposição XXXIX, Corolário III; Proposição XLV, Exemplo 2 e 3; e Livro II, Proposições X e XV.

4. Livro II, Lema II. *Fluxões nos Principia.* Neste lugar e também no Livro I, Lemas I, II, XI (Escólio), Newton faz um comentário geral breve dos princípios das fluxões e dos fluentes (isto é, do cálculo diferencial e integral), mas não apresenta sua notação. Não se conhece ninguém que tenha obtido apenas dos *Principia* um conhecimento prático das fluxões. Supõe-se geralmente que deduziu muitos de seus teoremas nos *Principia* com a ajuda de sua teoria das fluxões e dos fluentes, e que depois disto traduziu seus resultados na forma sintética. É interessante notar que nos próprios *Principia* há uma confirmação desta suposição. No Lema II do Livro III, duas vezes ele cita "uma quantidade fluente cuja fluxão é..."

5. Livro II, Lema II, Corolário I. Se A, B, C, D, E são *continuamente proporcionais*, então, por definição,

$$A : B = B : C = C : D = D : E.$$

Suponha que C é dado e que D = CX, então

$$A = CX^{-2},\ B = CX^{-1},\ D = CX,\ E = CX^{2}.$$

Os momentos são

$$a = 2CX^{-3}x = -2A\,\frac{x}{X}$$

$$b = -CX^{-2}x = -B\,\frac{x}{X}$$

$$d = Cx = D\,\frac{x}{X}$$

$$e = 2CXx = 2E\,\frac{x}{X}.$$

Portanto, a : b : d : e = -2A : -B : D : 2E.

6. Livro II, Proposição VII, Escólio. *Newton e Leibniz sobre a invenção do cálculo.* Nas duas primeiras edições dos *Principia*, o Escólio da Proposição VII é totalmente diferente do Escólio dado na terceira edição (1726) e traduzido por Motte. Estas mudanças são impor-

1. Para uma discussão adicional ver F. Cajori, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain*, Chicago, 1919, pp. 2-32.

tantes na história da controvérsia sobre a prioridade e independência da invenção do cálculo diferencial por Newton e Leibniz. O Escólio na primeira edição era como segue: "Em cartas que troquei com o excelente geômetra, G. W. Leibniz, dez anos atrás, quando anunciei que eu tinha conhecimento de um método para determinar máximos e mínimos, de traçar tangentes e coisas similares, e quando o ocultei em letras transpostas envolvendo esta sentença (Data aequatione quotcunque; fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa; isto é, tendo qualquer equação dada nunca envolvendo tantas quantidades fluentes, encontrar as fluxões e vice-versa) aquele homem distinto respondeu que também havia obtido um método do mesmo tipo e comunicou seu método, que pouco diferia do meu, exceto nas suas formas das palavras e símbolos." Me parece que a afirmação de Newton, "que pouco diferia do meu, exceto nas formas das palavras e símbolos," exagera a identidade dos sistemas Newtoniano e Leibniziano, pois havia uma diferença nos conceitos fundamentais. Newton, na época em que escreveu os *Principia*, usava quantidades infinitamente pequenas com o propósito de encontrar *fluxões* (velocidades ou derivadas temporais); Leibniz tornou as próprias quantidades infinitamente pequenas em conceitos fundamentais, em suas *diferenciais* de ordens diferentes. Em 1713, quando a segunda edição dos *Principia* apareceu, a controvérsia sobre a invenção do cálculo já estava a caminho; o *Commercium epistolicum* de John Collins, favorecendo o lado inglês da disputa, havia aparecido em 1712. Contudo, o Escólio da primeira edição dos *Principia*, citado acima, permaneceu na segunda edição, exceto pela adição das palavras "e o conceito de geração das quantidades" (*et idea generationis quantitatum*), de forma que a última parte da frase ficou assim: "que pouco diferia do meu, exceto nas formas das palavras e símbolos, e o conceito de geração das quantidades." Esta adição parece a mim adicionar uma precisão maior à afirmação.

A diferença entre Newton e Leibniz no "conceito de geração das quantidades" era maior em 1704 quando apareceu publicado a *Quadratura curvarum* de Newton do que em 1687. Na Introdução a esta publicação, Newton disse: "Considero quantidades matemáticas neste lugar não como consistindo de quantidades muito pequenas, mas como descritas por um movimento contínuo." Assim a exposição de Newton dos fundamentos em 1704 foi de alguma forma diferente daquela em 1687; nenhuma utilização foi feita em 1704 das quantidades constantes infinitamente pequenas. Portanto, a adição de Newton ao Escólio nos *Principia* em 1713, "e o conceito de geração das quantidades," foi exatamente ao ponto.

Na medida em que a controvérsia progredia, Leibniz, numa carta (9 de abril de 1716) para um padre Italiano, A. S. Conti, residente então em Londres, lembrou Newton do que ele havia admitido no Escólio, o qual Newton agora desejava negar. Leibniz morreu em 1716. Pouco depois, em 14 de novembro de 1716, Newton publicou nas *Fluxões* de Raphson (1716, data do título, 1715) a seguinte afirmação: "Ele [Leibniz] alega que no meu livro *Principia* concedi a ele a invenção do *Cálculo diferencial*, independentemente de mim próprio; e que atribuir esta invenção a mim mesmo é contrário ao

meu conhecimento. Mas não encontro uma palavra com este sentido no parágrafo a que se refere." Com relação à admissão de Newton no Escólio, De Morgan observa que Newton foi pouco convincente, "primeiro em negar o significado claro e óbvio, e em segundo lugar, em omiti-lo completamente da terceira edição dos *Principia*."
Quando em 1726 foi publicada a terceira edição dos *Principia*, apareceu no lugar do Escólio das edições anteriores o novo Escólio, que foi publicado em todas as edições posteriores dos *Principia*. Este novo Escólio não menciona Leibniz. Sobre a controvérsia da invenção do cálculo, ver De Morgan, *Essays on the Life and Work of Newton* (ed. P. E. B. Jourdain), Chicago, 1914; M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, vol. 3, ed. 2, Leipzig, cap. 92, pp. 233-261; ver também outras histórias da matemática.

7. Livro II, Proposição X. *Correções por Johann e Nicolaus Bernoulli.* Em 14 de outubro de 1712, Newton escreveu para Cotes: "Há um erro na décima Proposição do segundo Livro, Problema III, que vai exigir a reimpressão de cerca de uma folha e meia. Fui informado disto desde que escrevi para você e estou corrigindo. Vou pagar os custos da reimpressão e o enviarei para você assim que tiver tudo pronto."[2]
Eddleston fornece informação adicional sobre o assunto. Este erro na primeira edição dos *Principia* surgiu ao encontrar-se o valor da resistência ao movimento de um projétil no ar. Foi apontado a Newton por Nicolaus Bernoulli (1687-1759), o sobrinho de Johann Bernoulli (1667-1748). Nicolau estava numa visita à Inglaterra durante setembro e outubro de 1712. O resultado de Newton, quando a curva descrita é um círculo, havia sido mostrado estar errado anteriormente por Johann Bernoulli numa carta a Leibniz de agosto de 1710 e numa comunicação para a Academia Francesa publicada em suas *Mémoires* de 1711, Paris, 1714, pp. 50-56[3]. Newton enviou para Johann Bernoulli, por Nicolaus, uma cópia de seu *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias*, publicado em 1711 e o propôs (Johann Bernoulli) como um membro da *Royal Society*, na qual foi conseqüentemente eleito no primeiro de dezembro seguinte.

8. Terceira edição, Livro II, Proposição XXXIV, Escólio. *Superfície de mínima resistência.* Na primeira edição dos *Principia* há nove Corolários da Proposição XXXIII; na segunda e terceira edições, apenas seis Corolários e o sexto está reescrito. Após a Proposição XXXIII, até a Proposição XLI, há muita revisão na segunda edição e são introduzidos resultados de novas experiências. A Proposição XXXV da primeira edição torna-se a Proposição XXXIV da segunda e terceira edições. O Escólio seguindo a Proposição XXXV na primeira edição, lidando com a superfície de mínima resistência, é o mesmo (excetuando mudanças pequenas sem importância) que o Escólio que segue a Proposição XXXIV na segunda e terceira edições.

2. Eddleston, *op. cit.*, p. 142.
3. Ver também a segunda edição da *Histoire de l'académie royale des sciences, Mémoires*, ano 1711, pp. 50-54; e o artigo de Nicolaus Bernoulli, pp. 54-56.

Neste Escólio Newton apresenta, sem prova, as condições geométricas que uma superfície de revolução tem de satisfazer para que ela possa mover-se com a menor resistência na direção de seu eixo através de um meio resistente. Este é o problema mais antigo deste tipo que é hoje em dia resolvido pelo cálculo de variações. Na Coleção Portsmouth[4], há o rascunho de uma carta para um correspondente de Oxford, provavelmente David Gregory e escrita ao redor de 1694, no qual Newton explica seu método de resolução. Reproduzo esta carta, fazendo apenas mudanças ligeiras na notação tais como $(\mathrm{Nn})^2$ ao invés de "$\mathrm{Nn}^{\mathrm{quad}}$," $\frac{dq}{dt}$ ao invés de "$\dot{q}$", e o uso de parêntesis no lugar do vínculo.

"Senhor, agradeço-o profundamente pela visita cordial que me fez e pela errata da qual você chamou minha atenção em meu livro... A forma que sofre a resistência mínima no Escólio da Proposição XXXIV, Livro II, é demonstrada por estes passos.

"I. Se sobre BM forem traçados paralelogramos infinitamente pequenos BG*hb* e MN*om*, se forem dadas suas distâncias M*b* e alturas MN e BG, se também for dada a semi-soma de suas bases $\frac{\mathrm{M}m+\mathrm{B}b}{2}$, chamada de S, e a semi-diferença $\frac{\mathrm{M}m-\mathrm{B}b}{2}$ for chamada de *x*; e se as linhas BG, *bh*, MN, *mo*, ligadas sobre a curva *n*N*g*G nos pontos *n*, N, *g* e G, e as linhas infinitamente pequenas *on* e *hg* forem iguais e chamadas C, e a figura *mn*N*g*GB for girada ao redor de seu eixo BM para gerar um sólido, e este sólido mover-se uniformemente na água de M para B de acordo com a direção de seu eixo BM, afirmo que a soma das resistências das duas superfícies geradas pelas linhas infinitamente pequenas G*g* e N*n* será mínima quando $(g\mathrm{G})^4$ está para $(n\mathrm{N})^4$ assim como BG.B*b* está para MN.M*m*.

"Pois as resistências das superfícies geradas pela revolução de G*g* e M*n* são como $\frac{\mathrm{BG}}{(\mathrm{G}g)^2}$ e $\frac{\mathrm{MN}}{(\mathrm{N}n)^2}$, isto é, se $(\mathrm{G}g)^2$ e $(\mathrm{N}n)^2$ forem chamadas *p* e *q*, como $\frac{\mathrm{BG}}{p}$ e $\frac{\mathrm{MN}}{q}$, e a soma delas $\frac{\mathrm{BG}}{p}+\frac{\mathrm{MN}}{q}$ é menor quando sua fluxão $-\frac{\mathrm{BG}}{p^2}\cdot\frac{dp}{dt}-\frac{\mathrm{MN}}{q^2}\cdot\frac{dq}{dt}$ se anula, ou quando $-\frac{\mathrm{BG}}{p^2}\cdot\frac{dp}{dt}=\frac{\mathrm{MN}}{q^2}\cdot\frac{dq}{dt}$.

"Ora, $\mathrm{p} = (\mathrm{G}g)^2 = (\mathrm{B}b)^2 + (gh)^2 = s^2 - 2sx + x^2 + c^2$ e, portanto,

$$\frac{dp}{dt} = -2s\frac{dx}{dt} + 2x\frac{dx}{dt},$$

e pelo mesmo argumento

$$\frac{dq}{dt} = 2s\frac{dx}{dt} + 2x\frac{dx}{dt}$$

4. *A Catalogue of the Portsmouth Collection of Books and Papers Written by or Belonging to Sir Isaac Newton*, Cambridge, 1888, pp. xxi-xxiii.

e, portanto,

$$\frac{BG.\left(2s\dfrac{dx}{dt}-2x\dfrac{dx}{dt}\right)}{p^2}=\frac{MN\left(2s\dfrac{dx}{dt}+2x\dfrac{dx}{dt}\right)}{q^2}$$

ou

$$\frac{BG\ (s-x)}{p^2}=\frac{MN\ (s+x)}{q^2}$$

e, portanto, p^2 está para q^2 assim como BG(s - x) está para MN(s + x), isto é, (gG)^4 está para (nN)^4 assim como BG.Bg está para MN.Mm.

"2. Se a linha curva DnNgG for tal que a superfície do sólido gerado por sua revolução sofre a menor resistência entre todos os sólidos com o mesmo topo e base BG e CD, então a resistência das duas estreitas superfícies anelares geradas pela revolução das [linhas infinitamente pequenas nN e] Gg é menor do que se o sólido intermediário bgNM for removido [ao longo de CB sem alterar Mb, até que bg chegue] a BG [supondo como antes que on é igual a hg e, por conseqüência, seja o menor possível] e, portanto, (gG)^4 está para (nN)^4 assim como BG [.Bb está para MN.Mm].

"* [Também se] gh for igual a hG de forma que o ângulo [gGh seja 45 graus] então 4(Bb)^4 estará [para (nN)^4 assim como BG.Bb está para] MN.Mm e, por conseqüência, 4(BG)^4 está para (GR)^4 assim como (BG)^2 está para MN.BR ou 4(BG)^2.BR está para (GR)^3 [assim como GR está para MN].

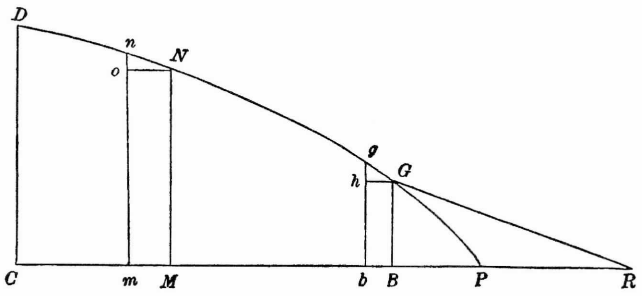
"De onde segue facilmente a proposição a ser demonstrada."

Isto é o rascunho da carta de Newton, mantida na Coleção Portsmouth, acrescentada em algumas partes defeituosas do manuscrito pela interpolação das palavras colocadas em colchetes. Estas interpolações foram feitas pelos editores do *Catálogo* da Coleção Portsmouth. Os colchetes como publicados no *Catálogo* não foram inseridos apropriadamente; segui a colocação deles como determinada por Oskar Bolza de Freiburg em Baden, que havia obtido de Arthur Berry de Cambridge (Inglaterra) um fac-símile do manuscrito original.

Bolza realizou um estudo intensivo da solução de Newton[5] e concluiu que as palavras "até que bg chegue," inserida pelos editores do *Catálogo* da Coleção Portsmouth, não são muito satisfatórias. Reproduzo aqui traduzido parte do artigo de Bolza no qual a figura e as suposições feitas na carta de Newton são seguidas:

* Se a altura do tronco do cone citado no parágrafo anterior for infinitamente pequeno, o semi-ângulo do cone torna-se igual a 45°. Portanto, quando a resistência total é um mínimo, a curva encontra a ordenada extrema GB num ângulo de 45°.

5. Oskar Bolza, in *Bibliotheca mathematica*, ser. 3, vol. 13, 1913, pp. 146-149.



'Então desloque o arco N*g* por uma distância infinitamente pequena K paralela ao eixo CB para a nova posição N'*g*' e trace as linhas retas N'*n* e G*g*'. Então, se, em geral, para qualquer arco A estando no plano da figura, designarmos por (A) a resistência da superfície gerada pela revolução de A ao redor do eixo BC, obtemos

$$(DnN'g'GB) > (DnNgGB) \qquad (1)$$

Como

$$(N'g') = (Ng),$$

segue de (I)

$$(nN') + (g'G) > (nN) + (gG)^{I} \qquad (2)$$

Mas a expressão $(nN') + (g'G)$, sendo função de K, tem de ter um mínimo para K = *o*. Este é um problema ordinário de mínimo que Newton resolve na primeira parte de sua prova pelo procedimento ainda comum atualmente, sendo apenas necessário notar que nas expressões para (nN) e (gG) ele despreza desde o início a grandeza $hg = on$ como sendo infinitamente pequena em comparação com BG e MN.

"Ao resolver o problema de mínimo, Newton obtém a relação

$$\frac{BG \,.\, Bb}{(Gg)^4} = \frac{MN \,.\, Mm}{(Nn)^4} \qquad (3)$$

a qual, de acordo com a fraseologia moderna, não é nada mais do que a bem conhecida primeira integral da equação diferencial Euleriana para o problema variacional que temos de resolver. Pois, se designamos

$$\angle gGh = S_o, \qquad \angle nNo = S,$$
$$cotg\, S_o = q_o, \qquad cotg\, S = q,$$
$$BG = y_o, \qquad MN = y,$$

e expressamos a distância B*g*, G*g*, M*m*, N*n* em termos de $hg = on$, então a equação (3) transforma-se em

$$\frac{yq}{(1 + q^2)^2} = \frac{y_o q_o}{(1 + q_o^2)^2} \qquad (4)$$

ou

$$\frac{yq}{(1 + q^2)^2} = \text{constante} \qquad (5)$$

e esta é de fato a primeira integral da equação diferencial Euleriana para nosso problema,

$$\int_{y_o}^{y_1} \frac{y dy}{1 + q^2} = \text{extremo} \tag{6}$$

Mas Newton avança um passo importante ao determinar a inclinação da curva no ponto G e portanto a constante de integração em (5).

"Pois no Escólio a que nos referimos acima, ele havia dado o seguinte teorema: Para obter o tronco do cone de raio dado OC da base e de altura OD dada que encontra a menor resistência na direção do eixo OD, divida ao meio a altura OD em Q, prolongue OQ até S de forma que QS = QC. Então S é o vértice do tronco do cone que se procura.

"Quando OD torna-se infinitamente pequeno, então o ângulo SCO aproxima-se do valor de 45°. A partir daqui Newton conclui, o que parece como auto-evidente a partir do conceito de uma curva como um polígono com um número infinito de lados infinitamente pequenos, que para o sólido de revolução de menor resistência, a tangente no ponto G faz com o eixo BC um ângulo de 45°, que portanto $\phi_o = 45°$. Portanto, a equação (4) fica na forma

$$\frac{yq}{(1 + q^2)^2} = \frac{y_o}{4} \tag{7}$$

Mas isto é o teorema nos *Principia* de Newton:

$$\frac{MN}{GB} = \frac{(GR)^3}{4BR \,.\, (GB)^2} \tag{8}$$

(onde GR é paralela à tangente à curva DG, em N), traduzida da forma geométrica para analítica.

"Interessante no cálculo de variações é o modo peculiar de variação da curva DG, utilizado por Newton, que nos lembra dos pensamentos de Du Bois-Reymond[6] sobre o lema fundamental do cálculo de variações.

"O sucesso deste modo de variação reside na ausência da variável x na integral (6)."

Bolza prossegue para mostrar como este processo pode ser estendido a um problema mais geral no cálculo de variações.

Uma discussão elaborada do sólido de resistência mínima, incluindo muito material histórico, é encontrada num artigo escrito por A. R. Forsyth[7].

9. Terceira edição, Livro II, Proposição XXXVI. *Água saindo de orifícios pequenos.* Deste problema difícil, Brougham e Roth afirmam[8]: A investigação desta questão, como fornecida

6. Du Bois-Reymond, in *Mathematische Annalen*, vol. 15, 1879, p. 313.
7. A. R. Forsyth, in *Isaac Newton, 1642-1727, A Memorial Volume*, ed. W. J. Greenstreet, London, 1927, pp. 75-86.
8. *Idem*, p. 264; ver também p. 380.

por Newton na primeira edição, estava muito errada. Ele desprezou totalmente a contração do veio após o fluido ter passado pelo orifício; portanto, deduziu que a velocidade do efluxo era aquela devida a *metade* da altura da água no recipiente. Depois ele corrigiu este erro, mas a investigação ainda permanece aberta a sérias objeções."

10. Livro II, Proposição XL, Escólio, Exper. 13. *Tempo e medida angular.* Na medida de tempo, 1 seg. = 60 terços; 1 terço = 60 quartos. Em medida angular, 1° = 60', 1' = 60", 1" = 60'", 1'" = 60^{iv}.

11. Livro II, Proposição XLVIII-L. *Velocidade do som.* Na dedução teórica de Newton da velocidade do som ele chegou à conclusão de que a velocidade variava diretamente como a raiz quadrada da "força elástica" e inversamente como a raiz quadrada da "densidade do meio," e obteve como a velocidade através do ar 979 pés por segundo, o valor experimental sendo de cerca de 1142 pés. Newton conjeturou sobre o motivo da discrepância entre os valores experimentais e teóricos, que se baseavam em suposições não convincentes. A explicação correta foi dada mais de um século depois por Laplace, que mostrou que, com relação ao ar, a "força elástica" deve ser multiplicada pelo fator 1,41, que é a razão do calor específico do ar a uma pressão constante e do calor específico a um volume constante. Por esta correção leva-se em conta as mudanças na elasticidade decorrentes da compressão quente e da rarefação fria.
Apesar da falha de Newton em considerar estas variações na elasticidade, sua discussão teórica é uma obra-prima de dedução teórica. Poucos reconheceram este fato mais adequadamente do que Laplace, que completou a teoria. Laplace publicou primeiro a correção, sem demonstração, nos *Annales de physique et de chimie*, vol. 3, 1816, pp. 238-241, onde afirmou, "La manière dont il y parvient est un des traits les plus remarquables de son génie." Em sua *Mécanique céleste*, 1798-1825, Livro XII, p. 95, diz: "Sa théorie, quoique imparfaite, est un monument de sont génie."[9]

12. Livro III, Fenômeno I. *Telescópio Huygeniano.* Newton refere-se aqui e no Livro III, Proposição XIX, a um instrumento, um "telescópio de 123 pés" utilizado pelo Reverendo James Pound em 1719. Telescópios tão longos eram utilizados antes da invenção da lente acromática por Dollond ao redor da metade do século XVIII. Foram projetados por Christiaan Huygens e vários foram construídos por ele e por seu irmão Constantijn. Ao aumentar o comprimento do telescópio, o efeito de imagens indistintas com bordas coloridas era enormemente reduzido e, ao mesmo tempo, o poder de aumento era ampliado. Newton afirma em *Óptica*, Livro I, Parte I, Proposição VII, Exp.

9. Consulte também I. Todhunter e K. Pearson, *A History of the Theory of Elasticity*, vol. 1, 1886, pp. 161, 162; comentários sobre o tratamento de Newton dos corpos elásticos são encontrados nas pp. 13, 14, 26, 93.

16, que "um telescópio de 64 pés de comprimento com uma abertura de 2⅓ polegadas aumenta aproximadamente 120 vezes, com tanta nitidez quanto um telescópio de 1 pé de comprimento com uma abertura de ⅓ de polegada aumenta 15 vezes."* Foram feitos instrumentos tão grandes quanto 300 pés. O poder de aumento de um telescópio é medido pelo comprimento focal da objetiva de vidro, dividido pelo comprimento focal da ocular. Como não foi possível naquela época construir oculares aproveitáveis com comprimento focal muito curto, o comprimento focal da objetiva era aumentado. Huygens presenteou a *Royal Society* de Londres com três lentes tendo comprimentos focais de 123, 170 e 210 pés, respectivamente. Uma descrição de um exame recente destas lentes é dado em *Nature*, vol. 123, 1929, p. 655, também p. 575. Sendo impraticável a construção de tubos telescópicos de comprimentos tão grandes, Huygens descartou seu uso e adotou para as observações noturnas o telescópio "aéreo." A objetiva era montada numa vara alta e colocada alinhada com a ocular através de fios, mas era difícil ter a objetiva e a ocular "casadas" ou colocadas paralelas uma à outra e ao mesmo tempo alinhadas com o objeto a ser observado.

A *Royal Society* de Londres emprestou a objetiva de 123 pés ao Reverendo James Pound, que montou-a em Wanstead Park, Essex, num mastro festivo que havia sido removido da costa e que havia sido obtido pelo próprio Newton para montar este telescópio. Foram fixados versos ao mastro por um brincalhão local que começavam assim:

Uma vez adornei a costa
mas agora encontrei
minha maneira de trabalhar com afinco
na terra do Barão Newton.

13. Livro III, Proposição IV. *O teste terra-lua da lei da gravitação.* Exceto pelas constantes experimentais utilizadas, este cálculo dado nos *Principia* é provavelmente o mesmo cálculo inicial de Newton em 1665 ou 1666. Esta Proposição IV famosa é a mesma nas três edições dos *Principia* (1687, 1713, 1726), exceto a lista das autoridades astronômicas citadas. Novo na terceira edição é o Escólio que segue à Proposição IV. Nas duas primeiras edições não havia Escólio neste lugar.

É bem conhecido que em 1665 ou 1666 Newton realizou seu primeiro teste da validade da lei da gravitação e que não anunciou a lei até cerca de vinte anos mais tarde. Qual foi o motivo desta longa demora? A primeira resposta a esta questão era de que em 1665 ou 1666 Newton tinha um valor muito impreciso para o tamanho da terra, a saber, 60 milhas para um grau de latitude, que, conseqüentemente, seus valores calculado e experimental para a intensidade da gravidade na superfície da terra não concordavam e que a validade da lei não apareceu até as medidas da terra por J. Picard

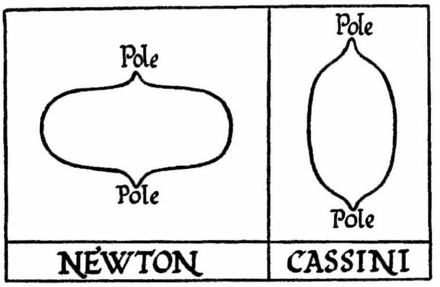
* N. T.: A *Óptica* já se encontra totalmente traduzida para o português, de onde tiramos a citação: Isaac Newton, *Óptica*, São Paulo: Edusp, 1996, tradução de A. K. T. Assis. Ver especialmente p. 101.

na França, que forneceram o valor de 69 1/3 milhas para um grau de latitude. Recentemente mostrou-se estar incorreta esta explicação na demora de Newton em anunciar a lei da gravitação. Foi mostrado que valores bem precisos para o tamanho da terra eram conhecidos desde as medidas de Snell em 1617 (fornecendo 66 2/3 milhas estatutárias inglesas para um grau de latitude) e de Norwood em 1636 (fornecendo 69 1/2 destas milhas).

Conhecia Newton em 1666 os valores de Snell ou de Norwood para o tamanho da terra? Estranhamente, em nenhuma parte de seus escritos ou de suas cartas Newton menciona qualquer valor numérico particular antes da aparição dos *Principia* (1687), onde adotou a determinação de Picard. Apesar disto, hoje em dia é consensual que Newton estava familiarizado com o valor de Snell pelo menos tão cedo quanto 1672 e muito provavelmente em 1666. Que Newton conhecia este valor em 1672 é evidente da sua edição da *Geography* de Varen, publicada naquele ano. Varen fornece neste livro uma pequena tabela de distâncias na qual o topo de uma montanha de altura conhecida pode ser visto no mar, desprezando a refração. O cálculo de Varen está errado e é corrigido por Newton. *Esta correção foi feita usando o valor de Snell.* Assim, uma montanha com uma altura de uma milha alemã podia ser vista a uma distância de 29 1/4 milhas alemãs de acordo com Varen, mas de 41 1/2 milhas alemãs de acordo com Newton[10].

O que de fato atrasou Newton por vinte anos foram questões teóricas de grande dificuldade relacionadas com a atração de uma esfera sobre um ponto externo - um problema que ele não resolveu antes de 1684 ou 1685, e que foi explicado pela primeira vez no *Principia*, Livro I, Proposição LXXV e LXXVI, e Corolários. Os fatos que relacionam-se com esta questão estão apresentados de forma completa num artigo em *Sir Isaac Newton, 1727-1927*, Baltimore, 1928, pp. 127-187. Ver também *Principia*, Livro III, Proposição VIII.

14. Livro III, Proposição XIX. *Forma da terra.* Na França Jacques Cassini foi desencaminhado, por medidas geodésicas de certa forma inadequadas, realizadas numa distância de meridiano comparativamente curta, acreditando que a terra estava alongada nos pólos. As teorias opostas de Newton e Cassini são mostradas de forma notável na velha caricatura seguinte:



10. Ver *Mathematical Gazette*, vol. 14, 1929, p. 415.

Medidas geodésicas posteriores realizadas na Lapônia por Maupertuis e Clairaut, quando consideradas conjuntamente com as obtidas previamente na França, forneceram dados que se estendem por uma distância de meridiano muito mais longa e mostraram um achatamento da terra nos pólos, como exigido pela teoria da gravitação de Newton. Voltaire satiricamente designou Maupertuis como "Aplatisseur du monde et de Cassini." Mais tarde Voltaire e Maupertuis ficaram envolvidos numa controvérsia heróico-cômica, e Voltaire (em seu *Discours sur la modération*) escreveu,

Vouz avez confirmé dans de lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.

Informação histórica detalhada encontra-se no livro de Isaac Todhunter, *Theories of Attraction and Figure of the Earth*, Londres, 1873, e no de A. D. Butterfield, *History of the Determination of the Figure of the Earth from Arc Measurements*, Worcester, Mass., 1906. Com bases teóricas Newton obteve que o diâmetro da terra no equador estava para o diâmetro de pólo a pólo assim como 230 está para 229, com a suposição de que a matéria da terra era toda ela "uniformemente densa." A compressão da terra é de acordo com isto (230 - 229)/230, ou 1/230. A determinação experimental mais recente da compressão da terra obtida por observações de pêndulos sobre a intensidade da gravidade fornece o valor 1/297,4. Ver *United States Coast and Geodetic Survey, Its Work, Methods and Organization*, Publicação Especial No. 23, Washington, 1928, p. 127.

15. Livro III, Proposição XX. *A toesa.* 1 toesa = 1,949+ metros = 6,394+ pés ingleses.

16. Livro III, Proposição XXII, XXV-XXXV. *O problema dos três corpos.* Ao estudar a órbita lunar sob a influência da terra e do sol com as forças atrativas agindo de acordo com a lei da gravitação, Newton deu origem a uma forma particular de um problema geral famoso que veio a ser conhecido na mecânica celeste como o "problema dos três corpos." Enquanto que a determinação do movimento de dois corpos considerados como partículas, quando suas atrações mútuas são as únicas forças consideradas, é um problema comparativamente simples em mecânica, a adição de um terceiro corpo dá origem a dificuldades inesperadas. Ainda não foi encontrada nenhuma solução perfeitamente geral deste problema. Associados com a história inicial do "problema dos três corpos" após Newton estão os nomes de D'Alembert, Clairaut, Euler, Lagrange, Laplace[11].

17. Livro III, Proposição XXIII. *Um satélite de Júpiter.* Por "satélite mais externo" de Júpiter quer se dizer a lua mais afastada das quatro luas descobertas por Galileu; ela é chamado Calisto. Há hoje nove luas conhecidas de Júpiter. Uma delas é interna às quatro

11. Para uma história resumida deste problema, incluindo o século XIX, ver E. O. Lovett, "The problem of three bodies", *Science*, vol. 29, 1909, pp. 81-91.

luas encontradas por Galileu; as quatro luas restantes de descoberta recente têm suas órbitas mais afastadas de Júpiter do que Calisto.

18. Livro III, Proposição XXIV. *Época da maior maré.* O fato de que a maior maré não ocorre na sizígia, mas ao redor de três dias mais tarde, é atribuído por Newton à "força de reciprocação" pela qual a água uma vez movida retém este movimento por um pouco de tempo devido à sua inércia. Mas Laplace mostrou (*Mécanique celeste,* Livro XIII, Cap. I) que isto não é verdadeiro, que as maiores marés cheias devem ocorrer exatamente nas sizígias, e as menores exatamente nas quadraturas, e que, portanto, a explicação do atraso deve ser procurada em outras circunstâncias. Ele é causado pelo atrito[12].

19. Livro III, Proposição XXVIII. Os "raios" em questão são como A*d* na figura do Lema XI, Livro I, o ângulo curvilíneo *d*AB sendo o ângulo de contato. Se *g*A ou *g*B forem considerados como o raio de curvatura, temos muito aproximadamente $(gb + bd)^2 = gA + Ad^2$, ou a curvatura $\frac{1}{gA} = \frac{2bd}{Ad^2}$. Se *bd* for considerada como a tangente evanescente do ângulo de contato, então as curvaturas das duas curvas, para valores infinitesimais iguais de A*d*, estão uma para a outra como as tangentes destes ângulos.

20. Livro III, Lema III. Por "movimento" quer se dizer aqui *momento, mv.* Assumindo, por simplicidade, velocidade angular unitária e densidade unitária, a primeira afirmação de Newton na prova, de que a esfera e o cilindro circunscrito têm momentos na razão de 3π: 16, pode ser mostrada como segue:

O momento de uma área circular material de raio R, girando ao redor de um eixo perpendicular a ela e passando através de seu centro, é (considerando *r* como o raio variável de um anel plano com circunferência $2\pi r$ e largura *dr*),

$$2\pi \int_0^R r^2 dr = \tfrac{2}{3}\pi R^3.$$

O momento do cilindro em questão é portanto $\tfrac{4}{3}\pi R^4$.

Em relação à esfera girante, considere qualquer seção dela perpendicular ao eixo de rotação, o momento dela é $\tfrac{2}{3}\pi R^3 \text{sen}^3\alpha$ vezes uma espessura infinitesimal $R\text{sen}\alpha \,.\, d\alpha$, ou $\tfrac{2}{3}\pi R^4 \text{sen}\alpha^4 \,.\, d\alpha$, com α sendo o ângulo entre R e a abcissa. Portanto, o momento de toda a esfera é

$$\tfrac{4}{3}\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^4\alpha \,.\, d\alpha = \tfrac{1}{4}R^2\pi^2.$$

Temos, portanto,

12. Brougham e Routh, *op. cit.*, p. 293; ver também p. 397.
O leitor encontrará muita informação num artigo de J. Proudman, "Newton's work on the theory of the tides," in *Isaac Newton, 1642-1727...*, pp. 87-95.

$$\text{momento da esfera : momento do cilindro} = \tfrac{1}{4}\pi^2R^4 : \tfrac{4}{3}\pi R^4 = 3\pi : 16, \qquad (1)$$

A segunda afirmação de Newton em sua prova, de que os momentos do cilindro e do anel fino, ambos considerados ao redor do eixo do cilindro, são como o dobro da matéria no cilindro para o triplo da matéria no anel, é evidente a partir da proporção,

$$\tfrac{4}{3}\pi R^4 : 2\pi R^2 . dR = 2(2\pi R^3) : 3(2\pi R . dR), \qquad (2)$$

Para obter o momento deste anel ao redor de seu próprio diâmetro, multiplique seu arco infinitesimal, $R . d\alpha$, pela distância, $R\cos\alpha$, deste arco até o diâmetro vertical, e o momento do anel ao redor de seu diâmetro fica

$$4R^2 . dR \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha . d\alpha = 4R^2 . dR.$$

Portanto, a terceira afirmação de Newton na prova é evidente da proporção,

$$2\pi R^2 . dR : 4R^2 . dR = 2\pi R : 4R, \qquad (3)$$

Multiplicando conjuntamente os termos correspondentes das proporções (1), (2) e (3) e simplificando obtemos

$$\text{momento da esfera : momento do anel ao redor de seu diâmetro} =$$
$$\pi^2R^2 : 32 . dR = 3\pi^2(\tfrac{4}{3}\pi R^3) : 32(2\pi R . dR) =$$
$$925275(\tfrac{4}{3}\pi R^3) : 1\,000\,000(2\pi R . dR).$$

21. Livro III, Proposições XL-XLII. *Cometas.* Algumas adições e mudanças ocorrem na segunda e terceira edições. Assim, novo na segunda e terceira edições, são o que se segue ao Corolário III da Proposição XL, também o Corolário e Escólio do Lema VIII, os dados do cometa de 1681 em seguida a "20 de novembro" na Proposição XLI e, finalmente, a parte da Proposição XLII que se segue a "Q.E.I." A terceira edição difere da segunda na parte final da Proposição XLII.

22. Livro III, Lema V, em seguida à Proposição XL. *Fórmulas de Newton de interpolação.* Este Lema famoso trata destas fórmulas. Newton discute este assunto em quatro outros lugares: (1) em seu *Methodus differentialis*, publicado em 1711; (2) numa carta de 8 de maio de 1675 para John Smith, dando instruções detalhadas para o cálculo de certas tabelas; (3) num manuscrito publicado pela primeira vez em 1927, contido na Coleção Portsmouth dos manuscritos Newtonianos; (4) em suas cartas de 13 de junho de 1676 e de 24 de outubro de 1676, publicadas pela primeira vez no *Commercium epistolicum* editado por John Collins em 1712. Todas as contribuições de Newton para a teoria da interpolação foram juntadas num pequeno livro de Duncan C. Fraser com o título, *Newton's Interpolation Formulas*, Londres, 1927[13]. Fraser reproduz o *Methodus*

13. O pequeno livro de Fraser é reimpresso a partir do *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 51, pp. 77-106 (outubro, 1918) e pp. 311-232 (abril, 1919); vol. 58, págs. 53-95 (março, 1927). Uma contribuição mais recente de Fraser a este assunto é um artigo detalhado intitulado "Newton and interpolation," em *Isaac Newton, 1642-1727...*, pp. 43-69.

differentialis e o manuscrito na Coleção Portsmouth, ambos em fac-símile e também com uma tradução em inglês. Ele apresenta muito material histórico interessante. O processo de interpolação de Newton, como explicado em alguns tratados modernos e chamado de "fórmula de interpolação de Newton" ou "fórmula de interpolação original de Newton," não é a fórmula geral de Newton, mas apenas sua fórmula particular para valores dos argumentos que são eqüidistantes. Esta ligação do nome de Newton ao uso particular, sem menção de seu tratamento mais geral, é vista, por exemplo, no livro de Simon Newcomb, *Logarithmic and other Mathematical Tables*, New York [1882], p. 62; em Herbert L. Rice, *The Theory and Practice of Interpolation*, Lynn, Mass., 1899, pp. 41-61; em H. C. Plummer, *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*, Cambridge (Inglaterra), 1918, p. 325. Ao contrário, em T. N. Thiele, *Interpolationsrechnung*, Leipzig, 1909, p. 3, há uma explicação das "diferenças divididas" que leva à fórmula geral de Newton, sendo que esta explicação se aplica a valores do argumento que não são necessariamente eqüidistantes.

23. Livro III, Lema X. *Um teorema de Newton.* Kriloff[14] chamou atenção para o fato de que a relação entre o tempo de descrição de um arco de uma órbita parabólica de cometas, os dois raios vetores traçados às extremidades deste arco, e a corda, é chamado em tratados modernos de astronomia teórica de "teorema de Euler"[15], "teorema de Lambert"[16] ou "teorema de Euler-Lambert", embora Lagrange, em sua *Mécanique analytique*, Pt. II, § VII, p. 26, tenha apontado que ela é apenas a expressão analítica do Lema X de Newton no Livro III. Kriloff mostra que as transformações algébricas necessárias podem ser realizadas de uma maneira muito simples.

24. Livro III, Proposição XLI, Exemplo. *Observações astronômicas de Newton.* Embora seja conhecido geralmente que Newton tenha realizado experiências com luz que tiveram grande importância, também com corpos em queda e com movimento de pêndulos em meios resistivos, não é amplamente conhecido que ele se refere neste lugar dos *Principia* a observações astronômicas que ele próprio realizou em 1681. Utilizou um "telescópio de 7 pés", aparentemente não um refletor.

25. Livro III, Escólio Geral da Proposição XLII. *Idéia de Newton sobre Deus.* Na primeira edição dos *Principia* de Newton (1687) nenhuma afirmação é feita sobre a natureza de Deus. Contudo, foram proferidas críticas contra os *Principia* por motivos teológicos por dois pensadores proeminentes, Bispo Berkeley, que em 1710 publicou seu *Principles of*

14. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Londres, vol. 84, 1924, p. 392.
15. L. Euler, *Miscellanea Berlinensia*, vol. 7, 1743, "Determinatio orbitae cometae anno 1742 observati."
16. J. H. Lambert, *Nouveaux mémoires de l'académie royale des sciences et belles-lettres*, ano 1771, Berlin, 1773, pp. 352-364.

Human Knowledge, e Leibniz, que em 10 de fevereiro de 1711 escreveu uma carta para Hartsoeker, um médico holandês de Düsseldorf, que foi publicada em 5 de maio de 1712, em *Memoirs of Literature*, uma publicação semanal vendida em Londres[17].

Berkeley ataca a exposição de Newton nos *Principia* da noção de espaço absoluto, tempo absoluto e movimento absoluto. "Este célebre autor", diz Berkeley, "mantém que existe um *Espaço absoluto*, o qual, sendo imperceptível para os sentidos, permanece similar a si próprio e imóvel". Em relação ao movimento absoluto, "tenho de confessar que não parece para mim que possa haver qualquer outro movimento senão o *relativo*, de forma que para conceber o movimento, devem ser concebidos pelo menos dois corpos... Mas sua principal vantagem [do espaço relativo como defendido por Berkeley] é que ficamos livres daquele dilema perigoso, ... de pensar ou que o Espaço Real é Deus, ou então que tem alguma coisa além de Deus que é eterna, que não foi criada, que é infinita, indivisível, imutável. Ambas idéias podem ser justamente consideradas noções absurdas e perniciosas"[18]. Assim o espaço, tempo e movimento absolutos de Newton foram criticados como uma concepção ateísta.

Leibniz, o segundo crítico distinto, não menciona Newton ou os *Principia* em sua carta a Hartsoeker, mas a referência é óbvia. Leibniz diz:

"Assim os antigos e modernos que admitem que a gravidade é uma *qualidade oculta*, estão certos se eles querem dizer com isto que há um certo mecanismo desconhecido para eles, por meio do qual os corpos são impelidos em direção ao centro da terra. Mas se a noção deles é que isto acontece sem qualquer mecanismo, por uma simples *propriedade primitiva* [qualité primitive], ou por uma lei de Deus que realiza este efeito sem utilizar quaisquer meios inteligíveis [moyens intelligibles], então isto é uma qualidade oculta sem sentido, que é tão oculta que nunca pode ser clarificada, embora um Espírito, para não dizer o próprio Deus, estivesse tentando explicá-la".

Nem Newton nem Cotes, que editou a segunda edição (1713) dos *Principia*, fizeram uma referência direta a Berkeley. Mas Cotes, escrevendo para Newton em 18 de março de 1713, refere-se à carta de Leibniz para Hartsoeker e diz: "Penso ser apropriado adicionar alguma coisa pela qual seu livro ficará livre de alguns preconceitos que têm sido levantados diligentemente contra ele. Como o de que ele abandona as causas mecânicas, é construído sobre milagres e recorre a qualidades ocultas. Para que você não pense ser desnecessário responder a tais objeções, consulte uma publicação semanal chamada *Memoires of Literature* e vendida por Ann Baldwin em Warwick-Lane... Você

17. Esta carta de Leibniz é encontrada na *Opera omnia*, de Leibniz, vol. 2, Genève, 1768, Pt. II, p. 60; *Philosophische Schriften von Leibniz* (ed. C. I. Gerhardt), vol. 3, Berlin, 1887, p. 519. Ver também Brewster, *Memoirs of Sir Isaac Newton*, vol. 2, cap. 22, pp. 219-222; Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes*, p. 153. Leibniz também ataca a teoria da gravidade em seus *Essais de théodicée sur la bonté de Dieu*, 1710.
18. G. Berkeley, *Principles of Human Knowledge*, Parte I, Par. 111, 117.

encontrará uma carta bem extraordinária do Sr. Leibniz para o Sr. Hartsoeker que confirmará o que tenho dito. Não proponho que seja mencionado o nome do Sr. Leibniz, é melhor esquecê-lo, mas as objeções penso que seria bom respondê-las e mesmo rebater os defensores de vórtices"[19]. Cotes apresentou uma resposta inspirada a Leibniz perto do fim de seu Prefácio na segunda edição dos *Principia*.

Que Newton foi mal interpretado por Leibniz com relação à natureza da gravidade, é evidente. Newton não acreditava em ação à distância sem a ajuda de um meio interposto. (Ver Nota 6 do Vol. 1.) Que ele estava interessado em questões teológicas mesmo antes de ter escrito os *Principia*, é evidente a partir de suas anotações do livro de Henry More, *On the Prophet Daniel and the Apocalypse*, encontradas na própria cópia de Newton deste livro, "ex dono Reverendi Authoris". Estas anotações ainda não receberam a atenção devida no estudo dos conceitos teológicos e cosmológicos de Newton nos diferentes períodos de sua carreira. Com relação aos *Principia*, Newton disse numa carta a Richard Bentley (10 de dez. de 1692), "Quando escrevi meu tratado sobre nosso sistema, tinha em vista os princípios que pudessem fazer com que os homens considerassem a crença de uma Divindade; e nada pode alegrar-me mais do que encontrá-lo útil para este fim."

E assim, em 1713, vinte e seis anos após a primeira aparição dos *Principia*, Newton, então com setenta e um anos de idade, preparou o famoso Escólio Geral, publicado no final da segunda edição dos *Principia*.

A sentença, "E desta maneira muito do que concerne a Deus, no que diz respeito a falar sobre ele a partir das aparências das coisas, pertence certamente à filosofia natural," é de interesse por dois motivos. Em primeiro lugar, não estava no rascunho original do Escólio Geral; Newton adicionou-o quando a segunda edição estava indo para impressão[20]. Em segundo lugar, Newton apresenta aqui sua justificativa de ter tratado este assunto nos *Principia*. Obter uma idéia de Deus "a partir das aparências das coisas, pertence certamente à filosofia natural."

Na terceira edição (1726) dos *Principia*, há seis adições ou mudanças feitas no Escólio Geral. Estas modificações são como segue:

(1) Nova na edição de 1726 é a sentença: "E para evitar que os sistemas das estrelas fixas caíssem um sobre o outro por suas gravidades, colocou estes sistemas a imensas distâncias entre si."

(2) Novas na edição de 1726, em seguida às palavras "Deus de Israel", são as palavras, "o Deus dos Deuses e Senhor dos Senhores."

(3) Na edição de 1726 a passagem, "o Eterno dos Deuses; também não dizemos meu Infinito nem meu Perfeito," toma o lugar de "não dizemos, meu Infinito, seu Infini-

19. Edleston, *op. cit.*, p. 153.
20. Ver Edleston, *op. cit.*, p. 155.

to, o Infinito de Israel; não dizemos meu Perfeito, seu Perfeito, o Perfeito de Israel," na segunda edição.
(4) Na edição de 1726, "Ele não é eternidade e infinidade" toma o lugar de "Ele não é eternidade ou infinidade" na segunda edição.
(5) As quatro sentenças na edição de 1726, "Toda alma que tenha percepção... Deus é o mesmo Deus, sempre e em todo lugar," são uma adição para o Escólio como dado na segunda edição.
(6) As quatro sentenças na edição de 1726, "Pois o adoramos como seus servos; ... analogia que apesar de não ser perfeita conserva alguma semelhança," são uma adição para o Escólio na segunda edição. Mas substancialmente Newton preparou esta adição muito antes de 1726; de fato, apenas seis meses após a publicação da segunda edição em 1713. Ela é fornecida numa lista de correções e adições[21] para a segunda edição que ele enviou a Cotes, mas isto não foi publicado na época.
Deve ser notado que a idéia de Newton sobre Deus na segunda (1713) edição dos *Principia* é obtida em grande parte das "aparências das coisas," enquanto que as interpolações publicadas na terceira edição (1726) são obtidas mais particularmente "das condutas da humanidade."

26. Livro III, Escólio Geral da Proposição XLII. *Causas finais.* Newton utilizava o termo "causa final" como fazia Aristóteles, que distinguia quatro tipos de causa: "material," "formal," "eficiente," e "final"; a causa final de Aristóteles era o propósito, fim, ou finalidade para a qual é feita uma coisa. Assim: "Para a permanência passageira na terra, é a causa que viemos a ti"; uma caneta é feita para servir na escrita.

27. Livro III, Escólio Geral da Proposição XLII. *Apresentação da lei da gravitação.* A apresentação geral moderna desta lei, a saber, que "toda partícula de matéria atrai toda outra partícula com uma força variando diretamente como o produto de suas massas e inversamente como o quadrado da distância entre elas," não é encontrada em nenhum lugar nos *Principia* e no *Sistema do Mundo.* Talvez o que esteja mais próximo disto é dado no Escólio Geral no final dos *Principia,* onde Newton afirma que a "gravidade ... opera ... de acordo com a quantidade de matéria sólida que eles [o sol e os planetas] contêm, propagando sua virtude para todos os lados a distâncias imensas, diminuindo sempre como o inverso do quadrado das distâncias." Para outras aproximações da forma moderna da apresentação, ver Livro I, Proposição LXXVI, Corolários III e IV, e *Sistema do Mundo,* Par. 26.

28. Livro III, Escólio Geral da Proposição XLII. *A utilização de hipóteses por Newton.* "Não construo hipóteses" (*hypotheses non fingo*) é a expressão de Newton, ocorrendo no

21. Edleston, *op. cit.*, p. 165.

Escólio Geral no final de seus *Principia* - uma expressão citada freqüentemente para indicar seu desprezo pela especulação descuidada e sua confiança absoluta nas observações e experiências. Sem dúvida, os leitores dos *Principia* de Newton, de seus artigos iniciais publicados sobre luz, e de sua *Óptica*, ficarão perplexos por esta declaração absoluta, "hypotheses non fingo," pois certamente o próprio Newton construía muitas hipóteses - tantas, talvez, como qualquer outro cientista de reputação. Como reconciliar esta declaração de sua posição com sua prática real?

Em primeiro lugar, deve ser notado que Newton não apresenta "hypotheses non fingo" como uma proposição geral, aplicada a todo seu trabalho científico; é utilizada por ele em conexão com uma declaração pública relacionada a este assunto especial, difícil e sutil, a natureza real da gravitação, que era então misterioso e tem permanecido assim até nossos dias. Além do mais, esta "hypotheses non fingo" é para ser considerada não como sua prática privada, nem como seu hábito individual de pensamento, mas como a posição que tomou na publicação pública, na ocasião de colocar perante o mundo científico os resultados positivos de seu pensamento matemático, que foram baseados principalmente na observação e na experimentação. A "hypotheses non fingo" de Newton separada de seu contexto é uma deturpação completa de Newton.

Um exame das várias passagens nos escritos de Newton relacionadas com a utilização de hipóteses revela a regra de que os fatos experimentais devem tomar invariavelmente precedência sobre qualquer hipótese em conflito com eles. Em segundo lugar, as hipóteses que parecem incapazes de verificação através da experiência devem ser vistas com suspeita. De qualquer forma, devemos observar a distinção entre resultados experimentais exatos e meras sugestões derivadas de hipóteses.

Pode ser de algum interesse fornecer em ordem cronológica algumas das principais hipóteses propostas por Newton, assim como seus comentários feitos em épocas diferentes de sua carreira, sobre a utilização apropriada de hipóteses.

Em 1666, quando tinha cerca de vinte e quatro anos de idade, Newton cogitou sobre a gravidade, formulou a hipótese dela alcançar a lua e de variar inversamente com o quadrado da distância; prosseguiu então para testá-la comparando as implicações desta hipótese com os resultados da experiência real[22].

Em 1672 foram publicadas as experiências de Newton sobre a dispersão da luz[23]. Para explicar o motivo pelo qual o comprimento do espectro obtido da luz entrando no quarto através de uma pequena abertura circular era cinco vezes sua largura, Newton estabeleceu hipóteses diferentes, ou "suspeitas" como as chamou, mas removeu cada uma delas como insustentáveis, sendo finalmente levado a seu *experimentum crucis* [experiência crucial]. Uma destas hipóteses insustentáveis era a de que os raios solares

22. O teste foi muito provavelmente, em linhas gerais, o mesmo que aquele dado nos *Principia*, Livro III, Proposição IV.
23. *Philosophical Transactions Abridged* (J. Lowthrop), vol. 1, London, 1705, pp. 128-130.

após deixar o prisma formando o espectro moviam-se em linhas curvas, algumas mais curvadas do que outras - "freqüentemente vi uma bola de tênis, golpeada com uma raquete oblíqua, descrever tal linha curva. ... se os raios de luz fossem possivelmente corpos globulares e por sua passagem oblíqua de um meio a outro adquirissem um movimento circular, eles deveriam sentir a resistência maior do éter ambiente naquele lado onde os movimentos se unem e por isso seriam continuamente encurvados para o outro. Mas apesar desse motivo plausível de suspeita, ... não pude observar tal curvatura neles"†. Nesta pesquisa o jovem de trinta anos tolerava com total liberdade a formulação de hipóteses. Duas entre elas não eram outras senão a teoria corpuscular da luz e aquela do éter luminífero! Estas eram hipóteses tão audazes e de conseqüências tão amplas quanto as que alguma vez foram propostas na física. Elas também não eram do tipo que é prontamente verificado experimentalmente. Contudo, sua subhipótese da trajetória curva destas partículas de luz foi facilmente eliminada através do teste experimental.

Em 1672, em resposta a críticas feitas por Robert Hooke, Newton explicou como a hipótese de Hooke de que a luz é causada por pulsos ou, melhor, por movimentos ondulatórios do éter, podia ser utilizada para explicar os fenômenos das cores espectrais e das cores das placas finas. Mas Newton encontrou que a hipótese de Hooke era incapaz de explicar o fato de que a luz caminha em linhas retas[24]. Se a luz consistisse de vibrações, argumentou, ela iria, como o som, espalhar-se "para dentro do meio sombreado." Vemos aqui que Newton não hesita em tomar em consideração a hipótese do movimento ondulatório da luz no éter.

Contudo, no final da resposta de Newton a Hooke aparece o primeiro presságio de impaciência com hipóteses. Hooke explicaria o espectro causado por um prisma, não pela refrangibilidade diferente dos raios, mas pela separação e rarefação dos pulsos etéreos. A hipótese de Hooke era de pulsos no éter, ao invés de ondas reais no éter. Newton considera a hipótese de Hooke, mas encontra-a insuficiente e diz finalmente: "Mas quaisquer que sejam as vantagens ou desvantagens desta hipótese, espero ser dispensado de admiti-la, pois não creio que seja necessário explicar minha doutrina por qualquer hipótese". Mais além Newton diz[25]:

"Portanto, você vê o quanto está além do assunto em questão disputar sobre hipóteses. Por este motivo procederei agora, por último lugar, abstraindo as dificuldades no

† N. T.: O artigo completo já se encontra traduzido para o português, de onde tiramos este trecho: C. C. Silva e R. de A. Martins, A "Nova Teoria sobre Luz e Cores" de Isaac Newton: uma Tradução Comentada, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 18, pp. 313-327 (1996).

24. *Philosophical Transactions Abridged*, vol. 1, 1705, p. 146; *Philosophical Transactions*, No. 88, 1672, p. 5086.

25. *Philosophical Transactions Abridged*, vol. 1, 1705, p. 148; *Philosophical Transactions*, No. 88, 1672, p. 5086.

discurso do crítico, e sem levar em conta qualquer hipótese, considerá-las em termos gerais. E elas podem ser reduzidas a estas três Questões:

"1. Se as refrações desiguais feitas sem qualquer relação com qualquer desigualdade de incidência, são causadas pelas refrangibilidades diferentes dos vários raios; ou pela separação, quebra, ou dissipação do mesmo raio em partes divergentes?

"2. Se há mais do que duas espécies de raios?

"3. Se a brancura é uma mistura de todas as cores?"

A revelação interessante nesta última citação é que Newton deixa de lado as duas hipóteses principais da luz como movimento ondulatório e como partículas voando, para considerar três hipóteses menores, resolvidas mais facilmente pelo teste experimental, mas apesar disto ainda hipóteses, embora não as chame por este nome.

Quando um outro crítico, Gaston Pardies, professor de matemática na Universidade parisiense de Clermont, chamou de hipótese a refrangibilidade da luz, Newton respondeu com ênfase e ardor que sua teoria "parecia conter nada mais do que certas propriedades da luz, que descobri e que não considero difícil provar; e que se não as tivesse percebido como verdadeiras, teria preferido rejeitá-las como especulação fútil e vazia, ao invés de admiti-las como hipóteses"[26].

Em resposta a objeções adicionais de Pardies, Newton diz[27]:

"Pois o método melhor e mais seguro de filosofar parece ser, em primeiro lugar, investigar diligentemente as propriedades das coisas e estabelecê-las pela experiência, procurando então hipóteses para explicá-las. Pois as hipóteses devem ser ajustadas meramente para explicar as propriedades das coisas e não para tentar predeterminá-las, exceto naquilo em que elas podem ser uma ajuda para as experiências. Se qualquer um apresentar suposições sobre a verdade das coisas a partir das meras possibilidades das hipóteses, não vejo como qualquer coisa certa possa ser determinada em qualquer ciência; pois é sempre possível inventar hipóteses, uma após outra, que são ricas em novas tribulações. Por isto julguei que devemos nos abster de considerar hipóteses assim como de um argumento falacioso, e que a força de suas oposições deve ser removida, para que possamos chegar numa explicação mais madura e mais geral". Esta passagem é importante, sendo a afirmação isolada mais completa que Newton fez sobre a utilização de hipóteses. Ele reconhece o papel que elas podem realizar na pesquisa e coloca as restrições apropriadas para sua utilização.

Em 1673, numa resposta a críticas de Christiaan Huygens, Newton disse[28]: "Nem é

26. *Philosophical Transactions Abridged*, vol. 1, 1705, p. 141; *Philosophical Transactions*, No. 84, 1672, p. 4091.

27. *Isaaci Newtoni Opera*, vol. 4, pp. 314, 315. Carta de Newton para Oldemburg, 2 de junho de 1672. Esta parte da carta não foi impressa nas *Philosophical Transactions*.

28. *Philosophical Transactions Abridged*, vol. 1, 1705, p. 157; *Philosophical Transactions*, No. 97, 1673, p. 6108.

mais fácil construir uma hipótese assumindo apenas duas cores originais, ao invés de uma variedade infinita; a não ser que seja mais fácil supor que existam apenas duas formas, tamanhos e graus de velocidade ou força dos corpúsculos etéreos ou pulsos, ao invés de uma variedade indefinida; o que certamente seria uma suposição severa. ... Mas está além de meus propósitos examinar como as cores podem ser explicadas hipoteticamente. Nunca tive a intenção de mostrar no que consiste a natureza e diferença das cores, mas ... deixar para outros explicar por hipóteses mecânicas, a natureza e diferença destas qualidades; o que não considero ser um assunto difícil". Aqui, por um momento, Newton permite a si próprio o luxo de considerar corpúsculos ou pulsos etéreos de formas, tamanhos e velocidades diferentes; não se repreende por isto, nem afirma que está tolerando um procedimento não científico, mas finalmente decide deixar estas hipóteses para outros. Viu que freqüentemente o mesmo fato experimental podia ser explicado por hipóteses diferentes[29], daí a futilidade de disputar sobre elas numa discussão calorosa.

Minhas citações de Newton sugerem o motivo que o levaram a ficar contra a utilização de hipóteses, a saber, o perigo de ficar envolvido em controvérsias desagradáveis. Esta conjetura é confirmada pela própria afirmação de Newton contida numa comunicação de 9 de dezembro de 1675 para a *Royal Society*[30]: "Pretendi anteriormente nunca escrever qualquer hipótese sobre luz e cores; receando que isto pudesse ser uma maneira de engajar-me em disputas vãs: mas espero que uma resolução declarada não corresponda a nada que se pareça com uma controvérsia, a não ser que possa defender-me deste receio possivelmente no meu próprio tempo numa ocasião secundária." E então Newton procede elaborando mais amplamente suas explicações da refração e reflexão da luz, envolvendo corpúsculos de tamanhos diferentes, causando em seus vôos compressões e rarefações do éter numa superfície refratora. Esta é sua hipótese famosa dos "estados" de fácil reflexão e de fácil refração, que é de interesse para a física do século XX por ter uma semelhança considerável com a teoria moderna da "mecânica ondulatória". Newton não podia prescindir das hipóteses em suas cogitações assim como uma águia não pode prescindir de voar. Newton também não conseguiu evitar controvérsias.

Os anos de 1672-6 foram anos de conflito e Newton ficou cada vez menos propenso a tornar públicas quaisquer de suas especulações. Por sua natureza Newton era muito sensível às críticas. Ele detestava controvérsia.

Suas experiências desagradáveis de 1672-6 cessaram com sua indulgência particular na prática de formular hipóteses? De jeito nenhum. Sua mente continuou tão livre, arrojada e imaginativa quanto antes. Para amigos como Robert Boyle sentia-se livre

29. *Philosophical Transactions Abridged*, vol. 1, 1705, p. 145; *Philosophical Transactions*, No. 88, 1672, p. 5086.
30. T. Birch, *History of the Royal Society of London*, vol. 3, 1757, p. 248.

para revelar seus pensamentos mais íntimos, tanto em conversações quanto em cartas. Para ficar convencido deste fato necessita-se apenas ler a carta[31] de Newton para Boyle sobre a causa da gravitação, escrita em 28 de fevereiro de 1678/9. (Ver também a Nota 6 do Vol. 1.) Isto foi ao redor de oito antes da publicação dos *Principia*. No mesmo tópico que nos *Principia* levou à declaração, "hypotheses non fingo," havia na carta para Boyle uma festança de hipóteses não verificadas. Mas ele mostra-se cauteloso: "minhas noções sobre coisas deste tipo estão tão cruas, que eu próprio não estou satisfeito com elas" . Cito:

"E, em primeiro lugar, suponho que há uma substância etérea difundida por todo o espaço, capaz de contração e dilatação, fortemente elástica; e, numa palavra, muito como o ar em todos os aspectos, mas muito mais sutil. ... Quando dois corpos, movendo-se em direção um ao outro, ficam mais próximos, suponho que o éter entre eles torna-se mais rarefeito do que antes. ... Quando dois corpos, aproximando-se um do outro, chegam tão próximos quanto a fazer com que o éter entre eles comece a se rarefazer, eles vão começar a ter uma relutância em se aproximar ainda mais e se esforçarão em se afastar um do outro, ... mas finalmente, quando se aproximam tanto que o excesso da pressão do éter externo que cerca estes corpos em relação ao éter rarefeito que está entre eles é tão grande quanto a superar a relutância que os corpos têm de ficar juntos, então este excesso de pressão vai juntá-los violentamente. ... Ora, é por este motivo principalmente que concebo que uma mosca caminha sobre a água sem molhar suas patas e, conseqüentemente, sem tocar a água";

"Apresentarei mais uma conjetura, ... é sobre a causa da gravidade. Para este fim suponho que o éter consiste de partes diferindo uma da outra em tenuidade por graus indefinidos: que nos poros dos corpos há menos éter mais espesso proporcionalmente ao mais tênue, do que em espaços livres; e, conseqüentemente, que no grande corpo da terra há muito menos éter mais espesso proporcionalmente ao mais tênue do que nas regiões do ar: e que ... do topo do ar até a superfície da terra, e novamente da superfície da terra até seu centro, o éter fica imperceptivelmente cada vez mais tênue. Imagine, agora, qualquer corpo suspenso no ar ou estando sobre a terra; e o éter sendo, pela hipótese, mais espesso nos poros que estão nas partes superiores do corpo do que naquelas que estão nas partes inferiores; e que o éter mais espesso, sendo menos apto a ficar alojado nestes poros do que o éter mais tênue abaixo, irá tentar sair e dará lugar ao éter mais tênue abaixo, o que não pode acontecer sem que os corpos desçam para deixar espaço acima para que o éter mais espesso possa sair".

Estas especulações sobre a gravidade eram muito extravagantes para aparecerem num trabalho como os *Principia*. Por esta razão o exercício de Newton de se controlar em sua declaração pública, "hypotheses non fingo." Ele enfatizou a distinção entre hipó-

31. *Isaaci Newtoni Opera*, vol. 4, pp. 385-394.

teses e lei experimental, o que ele próprio observou cuidadosamente. Em seus *Principia*, Livro III, Regra 3, "de raciocínio em filosofia [natural]," ele afirma[32]: "Certamente não devemos abandonar a evidência das experiências devido a sonhos e a ficções vãs de nossa própria criação, nem devemos nos afastar da analogia da Natureza, que tem o costume de ser simples e sempre consoante a si própria."

A declaração clássica de Newton contra o uso impróprio de hipóteses é encontrado no final dos *Principia*: "tudo aquilo que não é deduzido a partir dos fenômenos é para ser chamado de uma hipótese. E as hipóteses, quer metafísicas ou físicas, quer de qualidades ocultas ou mecânicas, não têm lugar na filosofia experimental. Nesta filosofia as proposições particulares são inferidas a partir dos fenômenos, sendo depois generalizadas pela indução. Assim foram descobertas a impenetrabilidade, a mobilidade e a força impulsiva dos corpos, e as leis do movimento e da gravitação."

Em 1704 foi publicado o livro de Newton intitulado *Óptica*. Continha alguns trabalhos anteriores e algum material novo. O livro não pôde evitas as hipóteses, mas foi feito um esforço para excluir da parte principal do trabalho as mais extravagantes dentre elas. As partes que pareceram a Newton muito especulativas, ou que representavam investigações deixadas incompletas, foram introduzidas no fim na forma de "Questões." Nestas Questões Newton aparentemente permitiu-se uma liberdade maior de expressão. Elas permitem um discernimento maravilhoso das operações da mente de Newton sobre questões de pesquisa física.

Em geral, podemos dizer que Newton permitiu à sua imaginação científica um alcance livre e fez um uso muito extensivo de hipóteses. Mas as hipóteses foram sempre destronadas escrupulosamente sempre que se encontraram estar em conflito irreconciliável com o fato experimental. Em suas publicações Newton freqüentemente evitou declarações completas de suas hipóteses, esperando com isto escapar das controvérsias que muito receava.

29. Livro III, Escólio Geral da Proposição XLII. *Causalidade.* Questões de causa e efeito têm interessado os filósofos de todos os tempos - Aristóteles, Hume, Kant, Mill. Newton está entre os primeiros cientistas a incutir confiança na existência de um sistema compreensivo de causalidade nos fenômenos físicos. As três leis de Kepler do movimento planetário foram descobertas brilhantes, mas elas não satisfaziam os requisitos de causalidade. Foi Newton quem mostrou que as três leis aparentemente independentes eram a conseqüência lógica de uma lei fundamental da natureza. No início do Livro III dos *Principia*, Newton discute relações de causa e efeito nas Regras de Raciocínio em Filosofia.

Mas em seus *Principia* Newton não ousou fazer sugestões sobre a causa da gravidade. (Ver Nota 6 do Vol. 1.) Escritos tão ultra-especulativos são encontrados em suas cartas

32. Ver neste volume.

para Richard Bentley e Robert Boyle (ver Nota 28 sobre Hipóteses), mas seriam inadequados nos *Principia*, um trabalho objetivando uma adesão estrita a fatos experimentais e a uma dedução matemática rigorosa a partir deles. Portanto, a passagem famosa de Newton no Escólio Geral no final da segunda e terceira edições dos *Principia*, "Mas ainda não fui capaz de descobrir a causa destas propriedades da gravidade a partir dos fenômenos, e não construo hipóteses". Relações de causa e efeito têm ocupado a atenção dos cientistas desde a época de Newton. Famosa é a máxima de Robert Mayer[‡] —*causa aequat effectum*—um dogma metafísico que o guiou para chegar no princípio da conservação da energia.

Enquanto Newton esforçava-se em submeter os fenômenos da natureza física à lei mecânica, percebeu mais amplamente do que seus seguidores imediatos que não havia tido sucesso completo nisto. De fato, não acreditava que havia uma "máquina do mundo" que continuava em movimento de acordo com a lei da gravitação sem supervisão de Deus[33], mas ao invés disto acreditava que irregularidades no sistema solar causadas pela ação dos planetas e cometas entre si são ajustadas por Deus sempre que surgem emergências. "Este sistema belíssimo do sol, planetas e cometas," diz Newton em seus *Principia* (Livro III, Proposição XLII, Escólio Geral), "só pode ter surgido do conselho e domínio de um Ser inteligente e poderoso". Laplace, o grande sucessor de Newton na elaboração matemática das conseqüências da lei da gravitação, mantinha que a lei mecânica é suficiente para explicar os fenômenos mecânicos do sistema solar. Laplace disse em seu *Essai philosophique sur les probabilités*[34]: "Se um ser inteligente, num dado instante, conhece todas as forças que animam a natureza e as posições respectivas das coisas que a compõem, e se este ser inteligente também for suficientemente versado para submeter todos estes dados a uma análise, ele vai compreender numa fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo assim como aqueles do menor átomo: nada ficará incerto para ele e o futuro assim como o passado estarão presentes para sua visão. A mente humana oferece na perfeição que ela foi capaz de fornecer para a astronomia, um exemplo modesto de uma inteligência deste tipo". Nestas palavras temos uma declaração arrojada da crença no determinismo, relação causal. Laplace acreditava que baseado na lei da gravitação ele e outros haviam sucedido em mostrar o que Newton não havia conseguido, a saber, que o sistema solar é estável. Em resposta a uma questão de se era verdade que em sua *Mécanique céleste* ele nunca havia mencionado o Criador, Laplace disse a Napoleão: "Je n'avais pas besoin

‡ N. T.: *A causa é igual ao efeito.* Este artigo de Mayer já se encontra traduzido para o português: J. R. Mayer, Observações sobre as forças da natureza inanimada, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, vol. 6, 1984, pp. 85-95, tradução de R. de A. Martins. Ver ainda R. de A. Martins, Mayer e a conservação da energia, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, vol. 6, 1984, pp. 63-84 (1984).

33. Consulte A. J. Snow, *Matter and Gravity in Newton's Philosophy*, Oxford, 1926, p. 204.

34. *Œuvres complètes*, tomo VII, p. vi.

de cette hypothèse-la". Laplace, de fato, havia tido sucesso em explicar, por exemplo, todas as desigualdades nos movimentos observados de Júpiter e Saturno utilizando a lei de Newton; toda dificuldade havia levado-o a um novo triunfo[35].

Mas mesmo na mecânica clássica a prova de Laplace da estabilidade do sistema solar não é mais considerada conclusiva. O século XIX veio exigir um rigor matemático maior do que o século XVIII. K. Weierstrass, nos últimos anos de sua vida, deu muita atenção a esta questão da estabilidade do sistema solar. Assim o fez H. Poincaré. Mas até agora nenhuma resposta rigorosa foi obtida. H. F. Baker disse numa reunião da Associação Britânica em 1913, referindo-se a este problema: "Para aqueles que podem fazer pronunciamentos em relação a isto tenho um sentimento de inveja; para os seus métodos, até agora, tenho um sentimento bem diferente. Apenas o interesse neste problema é suficiente para justificar o desejo do matemático puro por métodos poderosos e rigor perfeito"[36].

O determinismo de Laplace tem perdido sua posição na ciência física mais recente baseado em outras coisas, a saber, o papel que a ciência estatística e a probabilidade têm representado em algumas das questões mais fundamentais. Estas ciências relacionam-se com o comportamento de grandes conjuntos. Compramos uma nova lâmpada elétrica. Quanto tempo ela vai durar? Não sabemos. Isto não pode ser previsto matematicamente. Mas sabemos que, por um estudo estatístico de grandes números deste tipo de lâmpadas, a vida média de tal lâmpada é um certo número de dias. Não há relação individual de causalidade nesta duração provável de nossa nova lâmpada. Estamos lidando aqui com uma média estatística, na qual a relação usual de causa e efeito não vigora. Se o vidro fosse aquecido da maneira usual acima de seu ponto de fusão, a relação de causalidade valeria diretamente, pois estamos certos de que o vidro iria se fundir. De acordo com Kant, a lei de causalidade é, "tudo o que acontece (começa a ser) pressupõe alguma coisa da qual ela procede de acordo com alguma lei". Nenhuma regra deste tipo existe para a vida útil de nossa lâmpada individual.

Eddington diz: "Em épocas recentes alguns dos maiores triunfos de previsão física foram fornecidos por leis reconhecidamente estatísticas que não se apoiam numa base de causalidade"[37]. De acordo com os pontos de vista modernos, a segunda lei da termodinâmica[38] tem uma base estatística. Na física atômica de hoje em dia observa-se a ausência de determinismo. A derivação de Planck de sua teoria quântica original[39]

35. Laplace, *Mécanique céleste*, Livro XV, Cap. 1, p. 324.
36. H. F. Baker, *Report of the British Association for 1913*, London, 1914, p. 371.
37. Eddington, *The Nature of the Physical World*, p. 298.
38. Consulte H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*, Munique, 1927, pp. 154, 155.
39. Consulte W. Schottky, "Das Kausalproblem der Quantentheorie als eine Grundfrage der modernen Naturforschung überhaupt," in *Die Naturwissenschaften*, vol. 9, 1921, pp. 492-496; E. Mach, *Analyse der Empfindungen*, ed. 3, 1902, Cap. V.

baseou-se na probabilidade. A nova mecânica quântica desenvolvida por W. Heisenberg[40] em 1927 enfatiza o indeterminismo, ou o princípio de incerteza nos processos microscópicos. Ele observa que não podemos medir simultaneamente a posição e a velocidade de uma partícula individual. Assim não podemos encontrar tanto a posição quanto a velocidade de um elétron, num sentido exato, em qualquer momento específico. Suponha que temos um microscópio tão poderoso que possa nos revelar os eventos atômicos e intra-atômicos. Um elétron isolado não poderia ser visto, pois não podemos ver um objeto a não ser que ele emita ou reflita luz. Mas se a luz vem de um elétron, o elétron tem estado interagindo com um quantum de luz ou fóton. Esta interação muda a velocidade do elétron com tanta certeza quanto a velocidade de uma bola de bilhar é modificada quando sofre uma colisão com uma outra bola de bilhar, ou como a posição de uma arma se modifica quando ela sofre um coice quando da emissão de uma bala. No ato de emitir luz, o elétron salta. O raio de luz pode dizer onde estava o elétron, mas ele não diz com que velocidade o elétron estava se movendo antes do salto. Exprimindo o princípio de uma forma mais geral, se podemos medir onde está a partícula microscópica, não podemos dizer quão rapidamente ela está se movendo, e se por certos efeitos podemos medir quão rapidamente ela está se movendo, não podemos dizer ao mesmo tempo onde ela está. Previsão de sua situação para o futuro não pode ser feita com exatidão, mas apenas com precisão limitada, expressa em termos de uma certa probabilidade.

Este princípio de indeterminismo corta na raiz a física mais velha, na qual a posição e a velocidade eram fundamentais. O determinismo geral de Laplace cai em ruínas. De acordo com este princípio de indeterminismo, temos de abandonar o conceito de uma cadeia de relações causais precisas conectando a história do universo físico, tanto passado quanto futuro, com o estado exato do universo num dado instante.

Pesquisa adicional pode fornecer modificações importantes neste princípio. Enquanto isto, Eddington aponta que este princípio fornece a quem acredita no livre arbítrio uma escapatória das conclusões da filosofia mecânica de Laplace e da ciência clássica do século XIX.

Grandes têm sido os avanços desde Newton. Mas a marcha da ciência não é sempre unidirecional. Após duzentos anos nos afastando, estamos voltando aos ensinamentos de Newton em alguns de nossos pontos de vista gerais. Newton não via conflito entre religião e ciência. O pensamento de hoje em dia, como aponta Eddington, tende a remover alguns dos obstáculos para uma reconciliação da religião e da ciência.

40. W. Heisenberg, de Copenhague, em *Zeitschrift für Physik*, vol. 43, 1927, pp. 172-198. Para comentários sobre Heisenberg, ver N. Bohr em *Die Naturwissenschaften*, vol. 16, 1928, p. 246.

30. Tradutor do *Sistema do Mundo.* Uma tradução inglesa do *Sistema do Mundo* foi publicada em 1728, mas o nome do tradutor não é mencionado. Há uma longa passagem em latim no *Sistema do Mundo* que é praticamente idêntica a uma passagem latina no Livro III dos *Principia.* Suas traduções são tão parecidas que podem muito provavelmente ser atribuídas ao mesmo tradutor. Considere-se, em particular, o seguinte trecho (*Principia,* Livro III, Proposição XLI, Exemplo; *Sistema do Mundo,* parágrafo 37): "Nam quod dicitur Fixas ab Aegyptiis comatas nonnunquam visas fuisse". A tradução de "comatas" apresentou problemas e foi resolvida em ambos os livros com o uso de três palavras, "coma or capillitium"; que foi assim traduzido: "For as to what is alleged that the fixed stars have been sometimes seen by the Egyptians environed with a coma or capillitium". Tal coincidência em uma tradução livre indica que ambos os livros foram traduzidos pela mesma pessoa, ou seja, Andrew Motte. Na revisão da tradução de Motte omiti as palavras "or capillitium".

31. *Sistema do Mundo,* parágrafo 30. *Previsão de um planeta remoto?* J. Ph. Wolfers, em sua edição alemã dos *Principia* de Newton (Berlim, 1872, p. 659), acha esta passagem (particularmente a parte "Portanto é provável que hajam cometas ... que ... passam quase suas vidas inteiras nas regiões além dos planetas") sumamente interessante, como apontando para a existência do planeta Urano, o qual naquele tempo ainda não fora observado e que foi pela primeira vez visto por William Herschel em 1781. Newton considerava os planetas e cometas como corpos celestes intimamente relacionados, um ponto de vista que está bem de acordo com as idéias modernas.

32. *Sistema do Mundo,* parágrafo 54. *Efeitos de maré terrestres.* Os efeitos das marés na terra, os quais Newton considerava imperceptíveis, foram detectados por Michelson e Gale em terra firme, no terreno do Observatório de Yerkes, em 1919, por meio da aplicação de métodos muito delicados de observação de franjas de interferência de luz monocromática. Os resultados foram utilizados na determinação da rigidez da Terra[41].

41. A. A. Michelson e Henry G. Gale, *Physical Review,* ser. 2, vol. 15, 1920, p. 144; *Science,* n. s., vol. 50, 1919, p. 327; também vol. 39, 1914, p. 927.

Título	*Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural, Livros II e III / O Sistema do Mundo*
Autor	Isaac Newton
Tradução	André Koch Torres Assis (*Principia, Livros II e III*) Fábio Duarte Joly (*O Sistema do Mundo*)
Revisão de Tradução	Fábio Duarte Joly
Produção	Marilena Vizentin Cristiane Silvestrin
Capa	Ricardo Assis
Projeto Gráfico e Editoração Eletrônica	Cristiane Silvestrin
Revisão de Texto	Marilena Vizentin
Revisão de Provas	Fábio Duarte Joly
Divulgação	Regina Brandão Cinzia de Araujo João Argentin Neto
Secretaria Editorial	Eliane dos Santos
Formato	18 x 25,5 cm
Tipologia	New Baskerville 11/15
Papel	L'Agenda 80 g/m^2 (miolo) Cartão Supremo 300 g/m^2 (capa)
Número de Páginas	448
Tiragem	2000
CTP, Impressão e Acabamento	Imprensa Oficial do Estado de São Paulo